A cobordism realizing crossing change on sl(2) tangle homology and a categorified Vassiliev skein relation

伊藤昇*　　　　吉田純†

2021 年 1 月 26 日

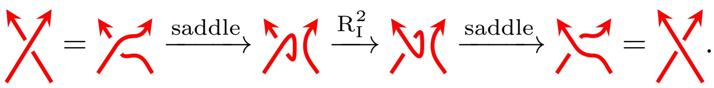
本稿の文責は伊藤昇にある*1．それにより，この文面全体として共同研究者の伊藤の視点から吉田純氏との共同研究に言及する立場をとることにする．また本稿は結び目の数理Ⅲの報告集原稿でもあり，まずはじめに運営にあたられた東京女子大学の大山淑之先生，新國亮先生，スタッフの皆様に感謝申し上げたい．

表題の研究内容詳細は[Ito and Yoshida, 2020a]にあり，ここでは講演で行った発見的な方法の雰囲気を保ちながら記述は入門的なレベルに終始したい．以下，本題に入る．

最初の出発点として以下の問いが考えられる．

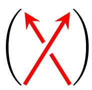
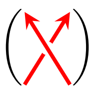
問 1. Khovanov homologyにおける「交差交換」とは何か？

次の列は低次元トポロジストとしては最初に考えるものである．



(1)

これは確かに交差交換を実現し，しかもJonesスケイン関係式を誘導する*2．

Kh  $\to$ Kh  .　(2)

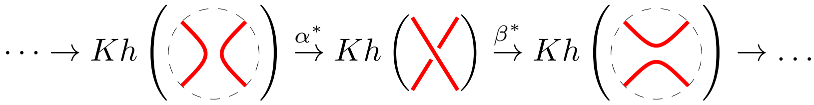
しかしながら，これはbidgree $(0,0)$射を導かない．さらにいうと，よく知られてい

* 茨城工業高等専門学校
† 東京工業大学/東京大学

*1 吉田純氏の図のソースをたくさん使わせていただいた．

*2 [Hedden and Watson, 2018].

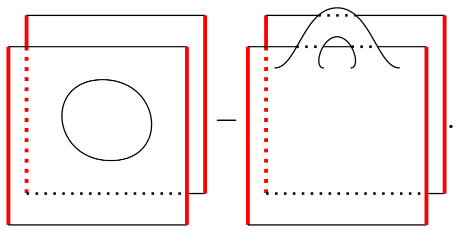
る[*3]Khovanov homologyの長完全列



を導くchain morphism α, βをどのように組み合わせても，bidegree $(0,0)$の種数1射は得られない．そこで上記問1をより精密にしてみる．

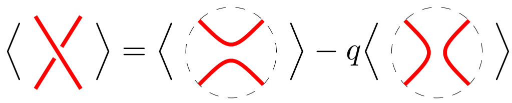
問 2. Vassiliev理論に見られるJones多項式の変数の次数を動かさない交差交換はKhovanov homology上どのように実現がなされるのか？

今回の答えは次の通りである：

$\Phi :=$ 

この射がどうして出てくるのか，一つの考え方を説明する．

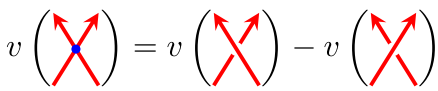
まず，Khovanov homologyというものは，カウフマンブラケットのcategorificationになっており，各交点を２種類のsmoothingした図式のmapping coneとして記述されている．言い換えればブラケット多項式のスケイン関係式における引き算



(3)

をcategorifyしたものとして記述される[Khovanov, 2000].

ここでVassiliev不変量の2重点は，Vassiliev skein relation

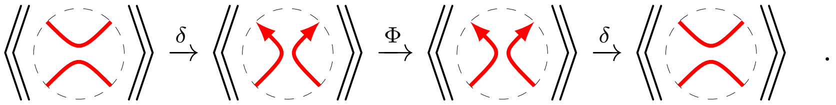


(4)

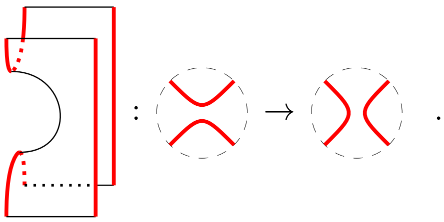
により定義されるので，（交点と同様に）２重点に関してもmapping coneによって構成されるのではないだろうか．例えば次の命題（Lemma 1）を満たす射Φがあるのではないだろうか．

[*3] 明示的には[Viro, 2004]で与えられ，implicitには[Khovanov, 2000]に現れる．

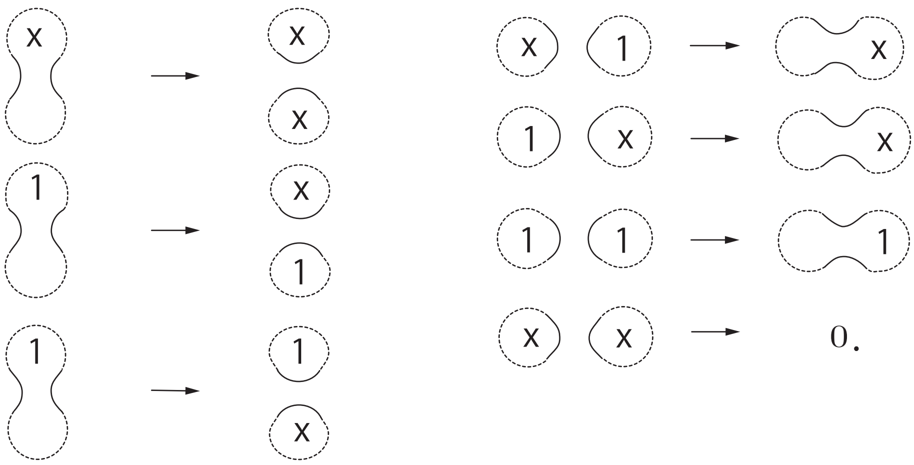
Lemma 1. *The following is a* 0-sequence; *i.e. the compositions of adjacent two morphisms vanish:*



上記の方針で話を進めよう．ここで現れる δ について考えてみる．2次元TQFT，または$(1+1)$-次元TQFTとも呼ばれるものは Cob_2 から Mod_k への関手である（これをZとする）．Khovanovが，これを用いてKhovanov homologyを与えたことは今では有名事実となっている[Khovanov, 2000]．ここでカウフマンステイトに現れる円周 S^1 に対して $Z(S^1)=A$ なる代数 A はcommutative Frobenius 代数である（commutative Frobenius代数と 2 次元TQFTは 1 対 1 に対応する）．そのため，演算は積 m，余積 Δ, unit, counitを考えることになる．今注目している（Lemma 1に現れる）δ はTQFTでは Cob_2 から見れば suddle に対応する：



この中で特にKhovanov homologyに限って Mod_k 側から眺めると次の形に見える（左列が余積，右列が積）：



$\Phi\delta$ もしくは $\delta\Phi$ は suddle を3つ続ければよい．ここで本質的に問題が露出するケース（i.e., $\mathbb{F}_2$であることを活かしていたパートの一つ [Ito and Yoshida, 2020b]）

$$m\Delta m(1\otimes 1)=2x$$

を分析すると 2 通りの意味合いが考えられる．

すなわち先に適用する two suddles は

$$\Delta m(1 \otimes 1) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

とみなしたり，別の意味合いで

$$\begin{aligned}(m \otimes 1)(\Delta \otimes 1)(1 \otimes 1) &= (m \otimes 1)(1 \otimes x + x \otimes 1) \otimes 1 \\ &= 2x \otimes 1\end{aligned}$$

とみなされたりすることに気づく．

以上の考察からなる射（$\Delta m - (m \otimes 1)(\Delta \otimes 1)$）を眺めると見方によっては人工的に感じるかもしれないが，そうではない．実際は，

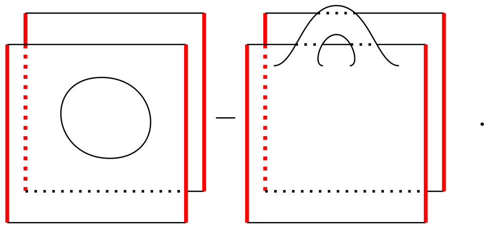
$$(\Delta m - (m \otimes 1)(\Delta \otimes 1))(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1$$

における

$$1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes x - x \otimes 1$$

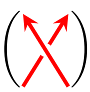
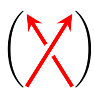
という対応はKhovanov homologyの（positive crossingを生成する方の）first Reidemeister move における不変性を証明する際に現れる（[Viro, 2004], 一般のTQFTに対しては[Ito, 2020](:博士論文(2010)の付録)）．

このtwo suddles $\Delta m - (m \otimes 1)(\Delta \otimes 1)$ をcobordismとして書くと次を得る：

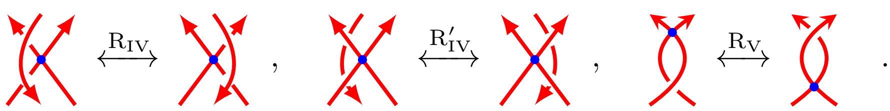

(5)

これがbidegree $(0, 0)$ を保つ Φ である．この Φ の発見は次の結果を導く：

Theorem 1 ([Ito and Yoshida, 2020a]). *There is a non-trivial map*

$$\widehat{\Phi} : Kh\left(\;\right) \to Kh\left(\;\right)$$



of bidegree $(0, 0)$. *Furthermore, it is* invariant *under* moves with respect to double points:



上記のKhovanovの考察したTQFT Z $(= Z_{0,0})$は2パラメータ (h, t) 付きTQFT $Z_{h,t}$ に一般化され[Khovanov, 2006]，その意味で長完全列が得られる．

Corollary 1 ([Ito and Yoshida, 2020a], Categorified Vassiliev skein relation)**.** *For every* $h, t \in k$*, there is a* long exact sequence

$$\cdots \to H^i Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket \xrightarrow{\widehat{\Phi}} H^i Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket \longrightarrow H^i Z_{h,t} \llbracket \bullet \rrbracket \longrightarrow H^{i+1} Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket \xrightarrow{\widehat{\Phi}} H^{i+1} Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket \to H^{i+1} Z_{h,t} \llbracket \bullet \rrbracket \to \cdots$$

この長完全列のオイラー数をとるとthe Vassiliev skein relation:

$$\chi\left(H^* Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket\right) - \chi\left(H^* Z_{h,t} \llbracket \times \rrbracket\right) + \chi\left(H^* Z_{h,t} \llbracket \bullet \rrbracket\right) = 0$$

が得られる．このため，コホモロジー H はVassiliev skein relationのcategorificationを与えている，ということになる．

Theorem 2 ([Ito and Yoshida, 2020a])**.** *For every* singular tangle diagram D*, there exists a complex* $\llbracket D \rrbracket$ *in* $\mathcal{C}ob_2^\ell(\partial_0 D, \partial_1 D)$ *having an isomorphism*

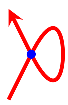
$$\llbracket \bullet \rrbracket \cong \mathrm{Cone}\left(\llbracket \times \rrbracket \xrightarrow{\widehat{\Phi}} \llbracket \times \rrbracket\right) \quad ;$$

$\llbracket D \rrbracket$ *is* invariant *under the moves of singular tangle diagrams.*

Remark 1*.* 特に sl(2) homologies のsingular link への拡張を与えている. 例えば， *Kh* (with arbitrary coeff., $h = t = 0$), *Lee* ($\mathbb{Q}$, $h = 0, t = 1$), *BN* ($\mathbb{Z}/2$, $t = 0$), etc.

S^1 のembedding spaceを取り扱うVassiliev理論という観点からは次の結果が基本的になることが予測される．

Theorem 3 ([Ito and Yoshida, 2020a], Categorified FI relation)**.** *If a singular tangle diagram* D *contains a local tangle of the form*



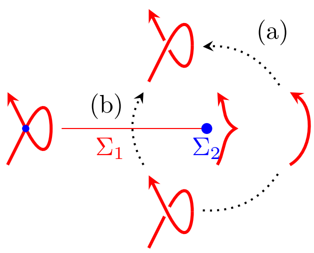
,

then $\llbracket D \rrbracket$ *is* contractible*; i.e. the identity is null-homotopic.*

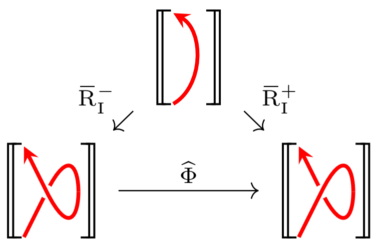
ひょっとすると，どうしてこれが重要なのかということに一瞬首を傾げてしまうかもしれない．だが，その"一瞬の違和感"は圏論化された場合のFI関係式とそうでない場合の印象の差だと考えられる．より具体的には first Reidemeister movesに現れる"捻り"の意味を見直すとはっきりする．次の表を見ていただきたい[*4]：

交差交換タイプ (cobordism)	圏論化の対象	対応する射	古典論での現れ方の例
(1)	Jones skein relation	射(2)	framingの補正
(5)	Vassiliev skein relation	$\widehat{\Phi}$ (Theorem 1)	カスプ周りの monodromyの記述

いうまでもなく表の 1 段目はKhovanov homology $Kh^{\star,*}$ の bidegreeが変化する交差交換の cobordism （Jones skein relation 由来の従来の方法)，表の 2 段目はbidegreeを変化させない交差交換の cobordism （今回の私たちの方法）に対応する．表の 2 行目，我々の構成に関する非自明なmonodromyについて説明しよう．下記の図はカスプ Σ_2 の周りを 1 周する非自明なpath (monodromy)を現し，Σ_1を通過するpath (b) は"壁越え"を表す.



このmonodromyの"圏論化"は特異点の周りの 2 通りのpathは次の図式が可換であることに対応する.



終わりに専門家が興味があるであろうことを付記しておく．例えば共著論

[*4] 射(2)は[Hedden and Watson, 2018]，射$\widehat{\Phi}$は[Ito and Yoshida, 2020a]による（但し$\mathbb{F}_2$の場合の初出は[Ito and Yoshida, 2020b]）.

文[Ito and Yoshida, 2020a]では2重点が１つ入ったsinguler linkの計算例があるが，その後このような計算は吉田純氏の単著[Yoshida, 2020]によってstate, complexのレベルから理論的にすっきりした計算で行われることがわかり，この"categorified" first derivativeの議論は新たな微分理論として展開されつつある．特にcategorified FI-relationは一般のnugatory crossingへと拡張された[Yoshida, 2020].

Vassiliev理論によりKhovanov 理論は本質的に新しい視点から急速に見直されようとしており，魅力的であることは間違いない．ただ，この急成長は理論として基礎的なレベルから始まっているため，発展の度合いを現段階で予測するのは筆者にとっても困難な状況である．

参考文献

[Hedden and Watson, 2018] Hedden, M. and Watson, L. (2018). On the geography and botany of knot Floer homology. *Selecta Math. (N.S.)*, 24(2):997–1037.

[Ito, 2020] Ito, N. (2020). On khovanov complexes. *Topology and its Applications*, page 107514.

[Ito and Yoshida, 2020a] Ito, N. and Yoshida, J. (2020a). A cobordism realizing crossing change on $\mathfrak{sl}_2$ tangle homology and a categorified Vassiliev skein relation. arXiv:2005.12664.

[Ito and Yoshida, 2020b] Ito, N. and Yoshida, J. (2020b). Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(7):2050051, 24.

[Khovanov, 2000] Khovanov, M. (2000). A categorification of the Jones polynomial. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426.

[Khovanov, 2006] Khovanov, M. (2006). Link homology and Frobenius extensions. *Fund. Math.*, 190:179–190.

[Viro, 2004] Viro, O. (2004). Khovanov homology, its definitions and ramifications. *Fundamenta Mathematicae*, 184:317–342.

[Yoshida, 2020] Yoshida, J. (2020). Decomposition of the first vassiliev derivative of Khovanov homology and its application. arXiv:2007.15867.