Gauss diagram formulas for plane curves associated with Legendrian knots

高村正志　(青山学院大学社会情報学部)[*1]
伊藤 昇　(東京大学大学院数理科学研究科)[*2]

本稿は「結び目の数理II」の報告集の一部として書かれたものです. オーガナイザーである日本大学の茂手木公彦先生, 市原一裕先生, 開催スタッフの皆様に深く感謝致します.

定理 1 $b,\ d$ $(2 \le b \le d)$ を整数とする. $\check{G}_{\le d}$, $\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}[\check{G}_{\le l}]$, $\check{n}_d = |\check{G}_{\le d}|$, $\check{G}_{b,d} = \{x_i^*\}_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d}$, $\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*$, $\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*$, $\check{R}_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5}(b,d)$ は (巡回語の同値関係を外し)[4, 5] と同様に定義する.

32 通りの選択肢から $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5) \in \{0,1\}^5$ を任意に一つ選ぶ. 次を仮定する.

- If $\epsilon_1 = 1$, $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ for each $r^* \in \check{R}_{10000}(b,d)$.
- If $\epsilon_2 = 1$, $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ for each $r^* \in \check{R}_{01000}(b,d)$.
- If $\epsilon_3 = 1$, $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ for each $r^* \in \check{R}_{00100}(b,d)$.
- If $\epsilon_4 = 1$, $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ for each $r^* \in \check{R}_{00010}(b,d)$.
- If $\epsilon_5 = 1$, $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0$ for each $r^* \in \check{R}_{00001}(b,d)$.

このとき, $\epsilon_j = 1$ に対応する各 Reidemeister move に対して $\displaystyle\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*$ は向き基点付き平面曲線の整数値不変量である.

特に $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5) = (0,1,0,1,1)$ の場合には平面曲線は Legendrian knot を誘導する [1, 3]. 基点付き Arnold 不変量 (long curve の Arnold 不変量) は, [2, 7] において整理されている.

1. 定理 1 の証明

- (Proof for the case $\epsilon_1 = 1$.)

C and C' を向き基点付き平面曲線とし, C と C' は 1 回の RI で移り合うとする. したがって, ある oriented letter i と向き付きガウスワード S が存在して $AD_C = Si\bar{i}$ or $S\bar{i}i$ and $AD_{C'} = S$. 議論はパラレルとなるので, 一般性を失わず, $AD_C = Si\bar{i}$ と仮定する.

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) - \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C')$$
$$= \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \sum_{z_0\in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*\left(z_0 i\bar{i}\right).$$

[*1] e-mail: `takamura@si.aoyama.ac.jp`
[*2] e-mail: `noboru@ms.u-tokyo.ac.jp`

$\epsilon_1 = 1$における仮定により, 各 $z_0 \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)$ に対して,

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^* (z_0 i\bar{i}) = 0.$$

したがって

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) = \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C').$$

• (Proof of the case $\epsilon_2 = 1$.)

C and C' を向き基点付き平面曲線とし, C と C' は1回の strong RⅡ で移り合うとする. したがって C, C' に対応して $G = Si\bar{j}Tj\bar{i}$ (or $S\bar{i}jT\bar{j}i$), $G' = STU$ が存在する. すなわち $AD_C = Si\bar{j}Tj\bar{i}$ (or $AD_C = S\bar{i}jT\bar{j}i$), $AD_{C'} = ST$. 例えば $AD_C = Si\bar{j}Tj\bar{i}$ と仮定する.

ここで式

$$x^*(AD) = \sum_{z^* \in \mathrm{Sub}(G^*)} \tilde{x^*}(z^*). \tag{1}$$

および Reidemeister move で変化をする文字 i, j を n 個含む G^* の部分ガウスワードの集合 $\mathrm{Sub}^{(n)}(G^*)$

$$\mathrm{Sub}(G^*) = \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \amalg \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*) \amalg \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*) \amalg \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*). \tag{2}$$

を思い出そう (ただし, この定義から今の場合 $\mathrm{Sub}^{(3)}(G^*) = \emptyset$ に注意). すると

$$\begin{aligned}
\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z^* \in \mathrm{Sub}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z^*) \right) \\
&= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z_0^*) \right) + \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \sum_{z_{12}^* \in \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z_{12}^*) \\
&= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z'^* \in \mathrm{Sub}(G'^*)} \tilde{x}_i^*(z'^*) \right) + \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \sum_{z_{12}^* \in \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z_{12}^*).
\end{aligned}$$

(上記で $\mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)$ と $\mathrm{Sub}(G'^*)$ は自然に同一視されることに注意.)

$z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)$ とする. ここで G 向き付きガウスワード z_0 を一意的に S, T に分解をすることに注意しよう. このとき S に対応する部分語[1]を $\sigma(z_0^*)$, T に対応する部分語を $\tau(z_0^*)$ とすれば $z_0^* = \sigma(z_0^*)\tau(z_0^*)$ という表示が自然になされる. この記法を用いて写像を定義する：

$$\begin{aligned}
z_2^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*); z_2^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*) i\bar{j} \tau(z_0^*) j\bar{i}, \\
z_1^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*); z_1^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*) i \tau(z_0^*) \bar{i}, \\
z'^*_1 &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*); z'^*_1(z_0^*) = \sigma(z_0^*) \bar{j} \tau(z_0^*) j.
\end{aligned}$$

[1] ガウスワードから文字のいくつかをとってガウスワードをなすものを**部分ガウスワード**としていた. これに対してワードの中で「ある連続する部分文字列」を**部分語**と呼び区別する.

このとき, 集合 $\mathrm{Sub}^{(1)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)$ は次の分解を持つ：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sub}^{(1)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)\\&= \{z_1^*(z_0^*) \mid \forall z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{{z'}_1^*(z_0^*) \mid \forall z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{z_2^*(z_0^*) \mid \forall z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\}.\end{aligned}$$

これらの表示は次を導く：

$$\begin{aligned}\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C')\\&\quad + \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \sum_{z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z_2^*(z_0^*) + z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*))\\&= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C')\\&\quad + \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \sum_{z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z_2^*(z_0^*) + z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*)).\end{aligned}$$

ここで $\epsilon_2 = 1$ のときの条件から, 任意の $z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)$ に対して,

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z_2^*(z_0^*) + z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*)) = 0$$

が成り立つことを check しよう.

まず $\epsilon_2 = 1$ の場合の主張における条件から任意の z_0^* に対して

$$\tilde{x}_i^*(z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*) + z_2^*(z_0^*)) = 0$$

が成立することを見る.

細かいことであるが, 定理1の条件は各 relator $r^* \in \check{R}_{01000}(b,d)$ についてのものである. 一方で $z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*) + z_2^*(z_0^*)$ は必ずしも relator, すなわち $\check{R}_{01000}(b,d)$ の元とはならない. しかしながら, ここで次の命題が成り立つ：

命題 1 次の 2 つの statements は同値である：

(1) $\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0 \quad (\forall r^* \in \check{R}_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5})$.

(2) $\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r^*) = 0 \quad (\forall r^* \in \check{R}_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5}(b,d))$.

よって命題1により, 与えられた relator に関する仮定の条件と, 任意の和 $z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*) + z_2^*(z_0^*)$ に対する条件が一致する. よって,

$$\tilde{x}_i^*(z_1^*(z_0^*) + {z'}_1^*(z_0^*) + z_2^*(z_0^*)) = 0.$$

したがって

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) = \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C').$$

ここまでの証明をみると $AD_C = S\bar{i}jT\bar{j}iU$ は全く同様であるので, 省略する.

• (Proof of the case $\epsilon_3 = 1$.) この証明は $\epsilon_2 = 1$ と本質的に同様なので記載を省略する.

• (Proof of the case $\epsilon_4 = 1$.) C and C' を向き基点付き平面曲線とし, C と C' は1回の strong RⅢ で移り合うとする. したがって C, C' に対応して $G = S\bar{i}jT\bar{k}iU\bar{j}k$, $G' = Sj\bar{i}Ti\bar{k}Uk\bar{j}$ が存在する. すなわち $AD_C = S\bar{i}jT\bar{k}iU\bar{j}k$, $AD_{C'} = Sj\bar{i}Ti\bar{k}Uk\bar{j}$.

再び (1), (2) により, 次を得る.

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) = \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z^*\in \mathrm{Sub}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z^*) \right)$$
$$= \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z_{01}^*\in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\cup \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z_{01}^*) + \sum_{z_{23}^*\in \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)\cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z_{23}^*) \right).$$

また

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C') = \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z'^*\in \mathrm{Sub}(G'^*)} \tilde{x}_i^*(z'^*) \right)$$
$$= \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{z'^*_{01}\in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\cup \mathrm{Sub}^{(1)}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z'^*_{01}) + \sum_{z_{23}^*\in \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)\cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*)} \tilde{x}_i^*(z'^*_{23}) \right).$$

$\mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)$ ($\mathrm{Sub}^{(1)}(G^*)$ resp.) と $\mathrm{Sub}^{(0)}(G'^*)$ ($\mathrm{Sub}^{(1)}(G'^*)$ resp.) の対応する元同士は自然に同一視される. したがって

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) - \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C') = \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \sum_{z_{23}^*\in \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*)\cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z^*)$$
$$- \sum_{\check{n}_{b-1}+1\le i\le \check{n}_d} \sum_{z'^*_{23}\in \mathrm{Sub}^{(2)}(G'^*)\cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G'^*)} \alpha_i \tilde{x}_i^*(z'^*).$$

Reidemeister move に対応し, G^* は向き付きガウスワード z_0^* に対して, 部分語 S, T, U に分解される. そこで z_0^* における S に対応した語を $\sigma(z_0^*)$, T に対応した語を $\tau(z_0^*)$, U に対応した語を $\mu(z_0^*)$ とする. 定義から $z_0^* = \sigma(z_0^*)\tau(z_0^*)\mu(z_0^*)$ となる. この記法を用いて次の定義をする:

$$\begin{aligned}
z_3^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*); z_3^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*)\bar{i}j\tau(z_0^*)\bar{k}i\mu(z_0^*)\bar{j}k,\\
z_{2a}^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*); z_{2a}^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*)\bar{i}j\tau(z_0^*)i\mu(z_0^*)\bar{j},\\
z_{2b}^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*); z_{2b}^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*)\bar{i}\tau(z_0^*)\bar{k}i\mu(z_0^*)k,\\
z_{2c}^* &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G^*); z_{2c}^*(z_0^*) = \sigma(z_0^*)j\tau(z_0^*)\bar{k}\mu(z_0^*)\bar{j}k.
\end{aligned}$$

同様に次も定義する：

$$\begin{aligned}
z'^*_3 &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G'^*) \to \mathrm{Sub}^{(3)}(G'^*); z'^*_3(z_0^*) = \sigma(z_0^*)j\bar{i}\tau(z_0^*)i\bar{k}\mu(z_0^*)k\bar{j},\\
z'^*_{2a} &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G'^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G'^*); z'^*_{2a}(z_0^*) = \sigma(z_0^*)j\bar{i}\tau(z_0^*)i\mu(z_0^*)\bar{j},\\
z'^*_{2b} &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G'^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G'^*); z'^*_{2b}(z_0^*) = \sigma(z_0^*)\bar{i}\tau(z_0^*)i\bar{k}\mu(z_0^*)k,\\
z'^*_{2c} &: \mathrm{Sub}^{(0)}(G'^*) \to \mathrm{Sub}^{(2)}(G'^*); z'^*_{2c}(z_0^*) = \sigma(z_0^*)j\tau(z_0^*)\bar{k}\mu(z_0^*)k\bar{j}.
\end{aligned}$$

このとき$\mathrm{Sub}^{(2)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*)$ は次の分解を持つことは見易い.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sub}^{(2)}(G^*) \cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G^*) \\
&= \{z_3^*(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{z_{2a}^*(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \\
&\amalg \{z_{2b}^*(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{z_{2c}^*(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\}
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sub}^{(2)}(G'^*) \cup \mathrm{Sub}^{(3)}(G'^*) \\
&= \{z'^*_3(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{z'^*_{2a}(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \\
&\amalg \{z'^*_{2b}(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\} \amalg \{z'^*_{2c}(z_0^*) \mid z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)\}.
\end{aligned}$$

上記の記法から次を得る：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) - \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C') \\
&= \sum_{z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^* \Big((z_3^*(z_0^*) + z_{2a}^*(z_0^*) + z_{2b}^*(z_0^*) + z_{2c}^*(z_0^*)) \\
&- (z'^*_3(z_0^*) + z'^*_{2a}(z_0^*) + z'^*_{2b}(z_0^*) + z'^*_{2c}(z_0^*)) \Big) \\
&= \sum_{z_0^* \in \mathrm{Sub}^{(0)}(G^*)} \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^* \Big((z_3^*(z_0^*) + z_{2a}^*(z_0^*) + z_{2b}^*(z_0^*) + z_{2c}^*(z_0^*)) \\
&- (z'^*_3(z_0^*) + z'^*_{2a}(z_0^*) + z'^*_{2b}(z_0^*) + z'^*_{2c}(z_0^*)) \Big).
\end{aligned}$$

ここで次に注意する：

$$(z_3^*(z_0^*) + z_{2a}^*(z_0^*) + z_{2b}^*(z_0^*) + z_{2c}^*(z_0^*)) - (z'^*_3(z_0^*) + z'^*_{2a}(z_0^*) + z'^*_{2b}(z_0^*) + z'^*_{2c}(z_0^*)) \in \check{R}_{00010}.$$

$\epsilon_4 = 1$のときの仮定と 命題1を合わせると (cf. Proof of the case $\epsilon_2 = 1$), 任意のz_0^*に対し,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i^* \Big((z_3^*(z_0^*) + z_{2a}^*(z_0^*) + z_{2b}^*(z_0^*) + z_{2c}^*(z_0^*)) \\
&\qquad - (z'^*_3(z_0^*) + z'^*_{2a}(z_0^*) + z'^*_{2b}(z_0^*) + z'^*_{2c}(z_0^*)) \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

これは次を導く.

$$\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C) = \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i x_i^*(C').$$

$AD_C = Sk\bar{j}Ti\bar{k}Uj\bar{i}$については上記の証明と同様であるから省略する.

• (Proof of the case $\epsilon_5 = 1$.) この証明は$\epsilon_4 = 1$と本質的に同様なので記載を省略する.

□

2. コンピュータによる計算

Cを向き基点付き平面曲線とする．$M = \mathbb{R}^2 \times S^1 = \mathbb{R}^2 \times (-\pi, \pi] \ni (x, y, \theta)$とし，接触形式$\alpha = -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy$を考える．点$(x, y) \in C$における接線ベクトルと$x$軸との方位角を$\theta$とするとき，$M$内にknot K_Cができる．このK_CをCに付随するLegendrian knotという．Cの2重点の上下を接線の方位角$\theta \in (-\pi, \pi]$が大きい方が上になるように付けると，基点付きknot diagramができる．さらに，[4, 5]と同様の方法で，基点付きknot diagramから向き付きガウスワード，基点付きアロー図AD_Cが定まる．

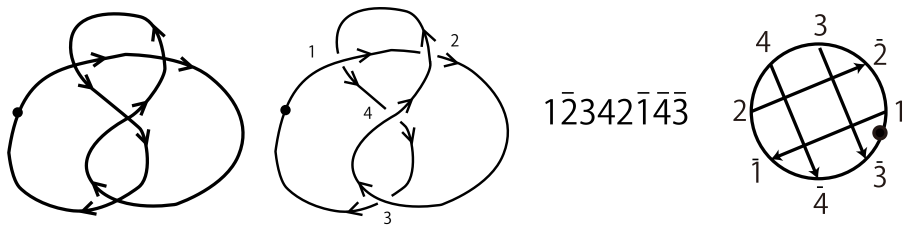


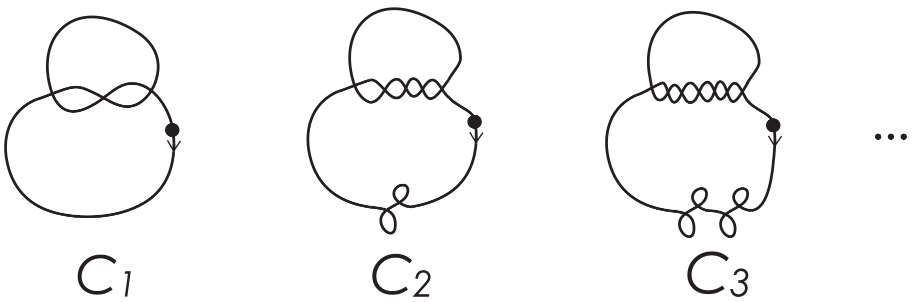
図 1: 平面曲線，knot diagram, ガウスワード，アロー図

向き付き平面曲線の局所的な5種類のmoveとknotのReidemeister moveの関係は講演スライド[6, Page 10]の様になる．これにより，$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) = (0, 1, 0, 1, 1)$の場合にLegendrian knotを誘導することが見て取れる．

ガウスワードの同値類全体の集合，向き付きガウスワードの同値類全体の集合を求めるコンピュータ・プログラムの実装は[4, 5]で完成している．今回，このプログラムに基点の情報を追加する改良を行った．これは，定理1の$b, d, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5)$を指定すると， 向き基点付き平面曲線の整数値不変量を求めるために必要な行列を出力するプログラムである．その後，Mathematicaを利用し，行列の零空間を求めることで不変量が求まる．

計算結果 1 $b = 2, d = 3, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) = (0, 1, 0, 1, 1)$の場合，零空間の次元は6である．つまり，6個の不変量が存在する（具体的な表示は本講演[6]の講演スライドpp.19–24をご参照いただきたい）.

曲線族$C_1, C_2, C_3, \ldots$を考える．



$i = 1, 2, \ldots$に対し，回転数は$\mathrm{rot}(C_i) = 0$であり，アーノルド不変量は$J^+(C_i) = 1$となる([3]を参照)．今回得られた不変量$I_{2,3;i}, i = 0, 1, \ldots, 5$に対して，次の結果を得た．

計算結果 2 $I_{2,3;i}(AD_{C_j})$ の値は次になる．

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$I_{2,3;0}$	-4	-11	-18	-25	-32
$I_{2,3;1}$	0	-2	-4	-6	-8
$I_{2,3;2}$	2	4	6	8	10
$I_{2,3;3}$	0	-1	-2	-3	-4
$I_{2,3;4}$	0	1	2	3	4
$I_{2,3;5}$	1	1	1	1	1

ここで，$I_{2,3;5}$ が J^+ であることに注意しておく．

参考文献

[1] V. I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented as Rutgers University, New Brunswick, New Jersey. University Lectures Series, 5. *American Mathematical Society, Providence, RI,* 1994.

[2] S. M. Gusein-Zade and S. M. Natanzon, The Arf-invariant and the Arnold invariants of plane curves, *The Arnold-Gelfand mathematical seminars,* 267–280, *Birkhäuser Boston, Boston, MA,* 1997.

[3] K. Hayano and N. Ito, A new aspect of the Arnold invariant J^+ from a global viewpoint, *Indiana Univ. Math. J.* **64** (2015), 1343–1357.

[4] N. Ito and M. Takamura, Arrow diagrams on spherical curves and computations, arXiv:1908.06085.

[5] 伊藤昇・高村正志, Arrow diagrams on spherical curves and computations, 結び目の数学 X 報告集, 東京女子大学, 2018 年 1 月.

[6] 伊藤昇・高村正志, 本講演の講演スライド (研究集会「結び目の数理 II」web ページ内), `http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/Knots2019/index.html`

[7] J. Zhou, J. Zou, and J. Pan, The basic invariants of long curve and closed curve perestroikas, *J. Knot Theory ramifications* **7** (1998), 527–548.