

Categorified Vassiliev skein relation on Khovanov homology

吉田 純 (東京大学大学院数理科学研究科)*1
伊藤 昇 (東京大学大学院数理科学研究科)*2

Khovanov ホモロジーは、Jones 多項式の圏化として Khovanov [8] により発見された。一方 Birman-Lin [5] により、Jones 多項式を始めとする多項式に値を取る量子不変量について、Vassiliev 不変量との関係が明らかになっている。本研究の目標は、Khovanov ホモロジーと Vassiliev 不変量とのより直接的な関係を明らかにすることである。本稿では、その最初の段階として、Khovanov ホモロジーを特異絡み目へ拡張し、FI 関係式を証明する。

1. Overview

本稿で特異絡み目とは、向き付き閉1次元多様体の三次元球面 S^3 への滑かな嵌め込みで、その特異値が高々可算個の横断的な二重点に限られるもの、またはその ambient isotopy 類のことをいう。記号 \mathcal{X}_r で、二重点を丁度 r 個持つ特異絡み目の ambient isotopy 類の集合を表す。すなわち、 A をアーベル群とする時、 A に値を取る絡み目不変量とは、写像 $v : X_0 \rightarrow A$ のことである。絡み目不変量 v に対し、 $v^{(0)} := v$ と置くと、一般に $r \geq 0$ について、写像 $v^{(r)} : \mathcal{X}_r \rightarrow A$ が次式によって r について帰納的に誘導されることが知られている。

$$v^{(r)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) = v^{(r-1)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) - v^{(r-1)} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right) . \quad (1.1)$$

式 (1.1) を *Vassiliev* スケイン関係式と呼ぶ。

定義. ある非負整数 r について、アーベル群 A に値を取る結び目不変量 v が r 次の *Vassiliev* 不変量であるとは、 $v^{(r)} \neq 0$ かつ $v^{(r+1)} = 0$ となることである。

絡み目不変量 v が量子群の表現から得られる時、次のことが知られている。

定理 1 (Birman-Lin [5], Birman [4]). 量子群不変量 $Q_q : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ について、 $q = e^x$ を代入したものを *Taylor* 展開し、 $Q_q(K)|_{e^x} = \sum_i u_i(K)x^i$ とする。この時、各 $u_i(K)$ は i 次の *Vassiliev* 不変量である。

一方、Khovanov [8] は、絡み目の図式 D とアーベル群 M について、鎖複体 $C^{*,*}(D; M)$ を定義し、次を証明した。

定理 2 (Khovanov [8]). 任意のアーベル群 M について、絡み目 L の図式 D に対して以下が成立する。

- (1) 各整数 i, j に対し、ホモロジー群 $Kh^{i,j}(L; M) := H^i(C^{*,j}(D; M))$ は、図式 D によらない、すなわち絡み目 L の不変量である。これを L の係数 M の Khovanov ホモロジーと呼ぶ。

*1 e-mail: yoshidaj@ms.u-tokyo.ac.jp

*2 e-mail: noboru@ms.u-tokyo.ac.jp

(2) $M = k$ が体の時、 $V(L)$ を L の Jones 多項式として、次式が成立する。

$$(q + q^{-1})V(L) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_k Kh^{i,j}(L; k) \quad . \quad (1.2)$$

式 (1.2) は標語的に、*Khovanov* ホモロジーは *Jones* 多項式の圏化であることを主張している。

さて、*Jones* 多項式は量子不変量として、定理 1 を通して *Vassiliev* 不変量と密接に関係していたので、その関係が *Khovanov* ホモロジーまで持ち上がるか、という自然な問が考えられる。ところが、*Khovanov* ホモロジーは次数付きアーベル群であり、そのままでは *Vassiliev* スケイン関係式 (1.1) や *Taylor* 展開が意味を持たない。本稿ではこの前者の問題を解決する。鍵は、差分漸化式の代わりに、ホモロジーの長完全列を考えることである。

定理 3 (Ito-Y. [7] arXiv:1911.09308). 標数 2 の素体 \mathbb{F}_2 を係数とする *Khovanov* ホモロジーは、次のような長完全列を持つ特異絡み目の不変量に拡張される:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow Kh^{i,j} \left(\text{Diagram 1}; \mathbb{F}_2 \right) &\xrightarrow{\hat{\Phi}_*} Kh^{i,j} \left(\text{Diagram 2}; \mathbb{F}_2 \right) \\ &\rightarrow Kh^{i,j} \left(\text{Diagram 3}; \mathbb{F}_2 \right) \rightarrow Kh^{i+1,j} \left(\text{Diagram 4}; \mathbb{F}_2 \right) \rightarrow \dots \quad . \quad (1.3) \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{\Phi}_*$ は、種数 1 写像がホモロジー上に誘導する写像である。

種数 1 写像 $\hat{\Phi}$ は、第 4 節で定義される。長完全列 (1.3) を圏化された *Vassiliev* スケイン関係式と呼ぶ。定理 3 の直接の帰結として、関係式 (1.2) は、特異絡み目に対しても成立することがわかる。

Kontsevich 積分 [9] の観点からは、*Vassiliev* 不変量を考える際に、特異結び目の図式の張る線形空間の上で、いくつかの関係式が重要になる。この文脈では、*Vassiliev* スケイン関係式は、結び目の空間 $\text{Emb}(S^1, S^3) \subset C^\infty(S^1, S^3)$ において、特異点のなす「壁」を越える際の差分を測っていると理解できる。その意味で *FI* 関係式は、における可縮な「壁」に関する壁越えの自明性を担保する。

定理 4 (Ito-Y. [7] arXiv:1911.09308). 定理 3 で拡張された *Khovanov* ホモロジーは、*FI* 関係式を満たす、すなわち次式が成立する:

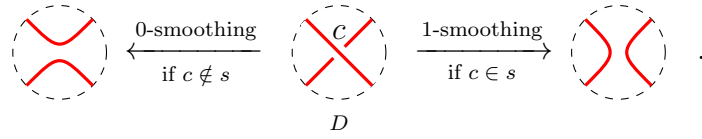
$$Kh^{*,*} \left(\text{Diagram 5}; \mathbb{F}_2 \right) = 0 \quad .$$

注意 1.1. 定理 4 の意味での *FI* 関係式を満たす、次数付きアーベル群としての特異絡み目の不変量は、筆者の知る限りでは初めてのものである。

2. *Khovanov* ホモロジーの復習

最初に、*Khovanov* ホモロジーの簡単な復習から始める。

定義. 絡み目の図式 D 上の交点の部分集合を D の状態と呼ぶ。状態 s に対して、図式 D_s を D の各交点に次のような平滑化を施して定義する:



各状態 s について、 D_s は平面に埋め込まれた円周 S^1 の非交和であり、その連結成分の集合を $\pi_0(D_s)$ と書く。

絡み目図式 D に対して、Khovanov ホモロジーを与える次数付き鎖複体 $C^{*,*}(D)$ を定義する。そのために、 V を二元 $1, x$ によって生成される自由アーベル群を考える。ここで、 $\deg 1 = 1, \deg x = -1$ とする次数によって、 V を次数付きアーベル群とみなす。定義. 絡み目図式 D と整数 i, j に対し、アーベル群 $\bar{C}^{i,j}(D)$ を次のように定義する:

$$\bar{C}^{i,j}(D) := \bigoplus_{\substack{s: \text{state} \\ |s|=i}} (V^{\otimes \pi_0(D_s)})^{j-|s|} .$$

ここで、 $|s|$ は s の集合としての元の数である。

次に、各 j について、次数付きアーベル群 $\bar{C}^{*,j}(D)$ の上に微分を定義する。アーベル群 V は、Frobenius 代数 $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ の底アーベル群とみなせることに注意する。余積、余単位射は以下の通りである:

$$\Delta : V \rightarrow V \otimes V ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1, \\ x & \mapsto x \otimes x ; \end{cases} \quad \varepsilon : V \rightarrow \mathbb{Z} ; \quad \begin{cases} 1 & \mapsto 0, \\ x & \mapsto 1. \end{cases}$$

一般に、Frobenius 代数は二次元の位相的場の理論と等価な代数構造である。すなわち、各二次元の向き付きコボルディズム $W : Y_0 \rightarrow Y_1$ に対して、写像

$$Z_V(W) : V^{\otimes \pi_0(Y_0)} \rightarrow V^{\otimes \pi_0(Y_1)}$$

が定義される。特に、 D の交点 c と c を含まない状態 s に対して、 c の近傍で鞍点を考えることにより、コボルディズム $W_c : D_s \rightarrow D_{s \sqcup \{c\}}$ が定義される:

$$W_c = \left(\text{Diagram of } W_c \right) : \left(\text{Diagram of } D_s \right) \rightarrow \left(\text{Diagram of } D_{s \sqcup \{c\}} \right) . \quad (2.1)$$

これを用いて、以下の写像を定義する。

$$\delta_c := Z_V(W_c) : V^{\otimes \pi_0(D_s)} \rightarrow V^{\otimes \pi_0(D_{s \sqcup \{c\}})} . \quad (2.2)$$

定義. 絡み目図式 D に対して、写像 $d : \bar{C}^{i,j}(D) \rightarrow \bar{C}^{i+1,j}(D)$ を各成分 $d_s : V^{\otimes \pi_0(D_s)} \rightarrow \bar{C}^{|s|+1,j}(D)$ 毎に次で定義する:

$$d_s := \sum_{\substack{c: \text{crossing} \\ c \notin s}} \pm \delta_c ,$$

ここで、符号は Bar-Natan [1] に従う。ただし、以降の節では、主に標数 2 の場合を扱うので、符号についての詳しい議論はここでは避ける。

最後に、図式の交点の情報によって $\bar{C}^{*,*}(D)$ の次数を正規化する。絡み目図式 D の正交点及び負交点の数をそれぞれ n_+, n_- として、*Khovanov* 複体を以下で定義する:

$$C^{i,j}(D) := \bar{C}^{i+n_-, j+2n_- - n_+}(D) \quad .$$

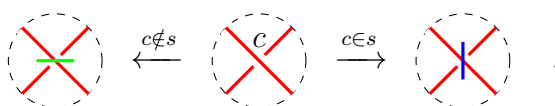
絡み目 L について、アーベル群 M を係数とする *Khovanov* ホモロジーは、図式 D の *Khovanov* 複体のホモロジーとして以下のように定義される:

$$Kh^{i,j}(L; M) := H^i(C^{*,j}(D) \otimes M) \quad .$$

これが D の選び方に依らず、絡み目の不変量を定義することが *Khovanov* によって示された (定理 2)。

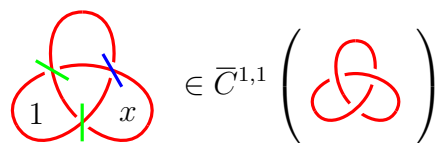
Khovanov ホモロジーの記述について、*Viro* [10] はエンハンスト状態を利用することを提案した。これは、結び目図式 D について、 $\bar{C}^{i,j}(D)$ の生成元を以下のような絵として記述するものである。

- 各状態 s について、 D の各交点 c 上に以下の通りにマーカーを付す:



- D を上で決めたマーカーの向きに平滑化した際の各連結成分に、1 または x のラベルを付す。

例 2.1. 以下は三葉結び目のエンハンスト状態である:



3. 写像錐とスケイン関係式の圏化

Khovanov ホモロジーは、大雑把に言えば、($q = -A^2$ に関して適切に正規化された) 次の形の *Kauffman* スケイン関係式を圏化したものを満たす:

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \right\rangle - q \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right\rangle \quad . \quad (3.1)$$

このことを見るために、次の構成を考える:

定義. アーベル圏 \mathcal{A} の鎖複体 X, Y とその間の鎖写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し、鎖複体 $\text{Cone}(f)$ を以下のように定義する:

- 各整数 n に対し、 $\text{Cone}(f)^n = Y^n \oplus X^{n+1}$ とおく;
- 微分 $d = d_f^n : \text{Cone}(f)^n \rightarrow \text{Cone}(f)^{n+1}$ を上の直和分解について次の行列で定める:

$$d_f^n := \begin{pmatrix} d_Y^n & f \\ 0 & -d_X^{n+1} \end{pmatrix} ,$$

ここで、 $d_Y^n : Y^n \rightarrow Y^{n+1}$ 及び $d_X^{n+1} : X^{n+1} \rightarrow X^{n+2}$ はそれぞれ Y, X の微分である。

この鎖複体 $\text{Cone}(f)$ を f の写像錐という。

写像錐はスケイン関係式の圏化において、重要な役割を果たす。具体的には、次の補題が重要である。

記号. 鎖複体 X と整数 r に対して、鎖複体 $X[r]$ を以下で定める:

$$X[r]^n = X^{n-r}, \quad d_{X[r]}^m = (-1)^r d_X^{m-r} .$$

補題 3.1. 鎖写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し、以下が成立する:

- (1) 標準的な埋め込み $i_Y : Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$ 及び射影 $p_X : \text{Cone}(f) \rightarrow X[-1]$ はそれぞれ鎖写像であり、以下の鎖複体の短完全列をなす:

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i_Y} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p_X} X[-1] \rightarrow 0 . \quad (3.2)$$

- (2) 短完全列 (3.2) が誘導する境界写像は、 f の誘導する写像と一致する。すなわち、次はホモロジーの長完全列である:

$$\dots \xrightarrow{p_X^{[1]*}} H^n(X) \xrightarrow{f_*} H^n(Y) \xrightarrow{i_{Y*}} H^n(\text{Cone}(f)) \xrightarrow{p_X} H^{n+1}(X) \xrightarrow{f_*} \dots . \quad (3.3)$$

一般に、体 k 上の鎖複体のホモロジーの長完全列

$$\dots \rightarrow H^n(X) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(Z) \rightarrow H^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

があり、各ホモロジー群が有限次元である時、次式が成立する:

$$\sum_i (-1)^i \dim_k H^i(X) - \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(Y) + \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(Z) = 0 . \quad (3.4)$$

これを用いて、Khovanov ホモロジーの圏化された Kauffman スケイン関係式を導出することができる。絡み目図式 D の交点 c について、 c を 0-平滑化、1-平滑化したものをそれぞれ $D^{(0)}$, $D^{(1)}$ とする。これら図式の交点を D の交点と同一視することにより、 $D^{(0)}$ と $D^{(1)}$ 上の状態は自然に対応する。この時、前節 (2.1) で定義したコボルディズム W_c は、以下の鎖写像を定義する:

$$\delta_c : C^{*,j} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ D^{(0)} \end{array} \right) \rightarrow C^{*,j-1} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ D^{(1)} \end{array} \right) .$$

微分を比較することで、次の同型が示される:

$$C^{*,j}(D) \cong \text{Cone}(\delta_c)[1] .$$

この時、補題 3.1 の長完全列 (3.3) は、等式 (3.4) の意味で Kauffman スケイン関係式 (3.1) の圏化になっている。

4. 種数 1 写像と特異絡み目の Khovanov ホモロジー

前節で、Khovanov ホモロジーを写像錐とみなすことによって、圏化された Kauffman スケイン関係式が得られることを見た。本節では、この議論を真似ることによって、Khovanov ホモロジーを特異絡み目に拡張する。具体的には、交差交換に対応する以下の形の鎖写像

$$\widehat{\Phi} : C^{*,*} \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow C^{*,*} \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) \otimes \mathbb{F}_2 \quad . \quad (4.1)$$

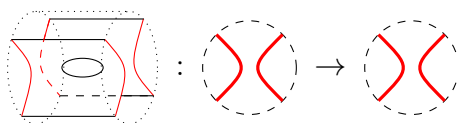
の写像錐を考えることによって、Vassiliev スケイン関係式 (1.1) を圏化し、この構成を帰納的に行うことによって、拡張を得る。

命題 4.1. 二つの絡み目図式 D_+ と D_- は、一つの交点を除き一致し、またその交点はそれぞれ正交点 c_+ 、負交点 c_- であるとする。この時、それら交点の近傍のエンハンスト状態に関して、次のような対応は、鎖写像 $\widehat{\Phi} : C^{*,*}(D_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow C^{*,*}(D_+) \otimes \mathbb{F}_2$ を定義する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} q \text{---} \end{array} \mapsto 0, \\ \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} q \text{---} \end{array} \mapsto (pq)^{(1)} \text{---} (pq)^{(2)} ; \end{array} \right. \quad \text{または} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} p \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ q \end{array} \mapsto 0, \\ \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} p \text{---} \end{array} \mapsto p^{(1)} p^{(2)} . \end{array} \right. \quad (4.2)$$

ここで、余積には *Sweedler* の記法を用いた。

証明の概略. 定義式 (4.2) に用いられているオペレーションは、位相的場の理論 Z_V によって、以下のコボルディズムから誘導されるものである:

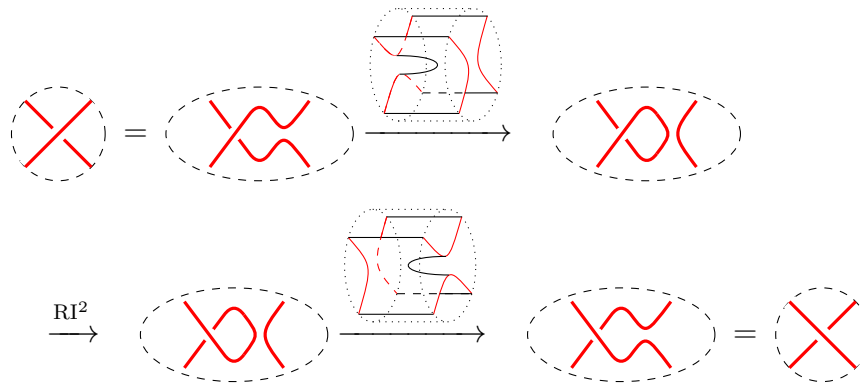


従って、対応する写像を Φ と置くと、これは図式 (4.2) 外の交点 c' については、式 (2.2) で定義された写像 $\delta_{c'}$ と可換である。また、標数 2 の上では $\Phi \delta_- = 0$ 及び $\delta_+ \Phi = 0$ であるから、これにより鎖写像 $\widehat{\Phi}$ が誘導される。 \square

命題 4.1 で定義された鎖写像を以下では種数 1 写像と呼ぶ。

注意 4.2. 交差交換に対応する鎖写像として、種数 1 写像の他に、コンコーダンスの

観点からは、以下の変形の列から誘導されるものが自然である:



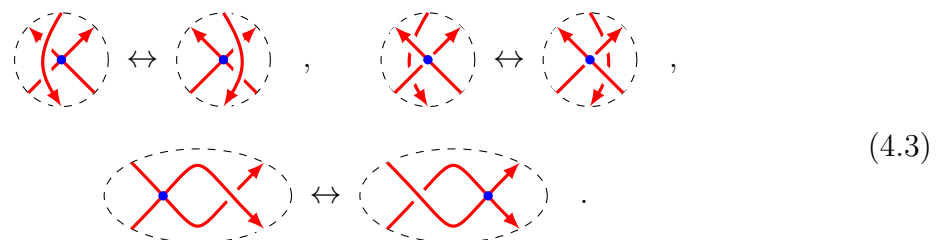
ところが、次数の計算により、Khovanov 複体に誘導される鎖写像の次数は $(0, 0)$ にならない。実際には、この鎖写像は、Vassiliev スケイン関係式ではなく、Jones 多項式に関する通常のスケイン関係式の圏化を与えている。

今、 D を唯一の二重点 b を持つ絡み目図式とし、この二重点を正交点、負交点に置き換えたものをそれぞれ D_+, D_- とおく。命題 4.1 により、鎖写像 $\widehat{\Phi}_b : C^{*,*}(D_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow C^{*,*}(D_+) \otimes \mathbb{F}_2$ が定義される。この鎖写像の写像錐によって、 D の \mathbb{F}_2 係数の Khovanov 複体を定義する:

$$C^{*,*} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram } D \\ \text{with crossing } c \end{array}; \mathbb{F}_2 \right) := \text{Cone} \left(C^{*,*} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram } D_- \\ \text{with crossing } c \end{array}; \mathbb{F}_2 \right) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\widehat{\Phi}_b} C^{*,*} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram } D_+ \\ \text{with crossing } c \end{array}; \mathbb{F}_2 \right) \otimes \mathbb{F}_2 \right).$$

一般に、 D を任意の特異絡み目図式とする時、Khovanov 複体 $C^{*,*}(D; \mathbb{F}_2)$ を上の構成を二重点の個数に関して帰納的に適用して得られる鎖複体とする。標数 2 では、この構成は、特異点の解消の順序によらないことに注意する。

命題 4.3. 特異絡み目図式 D と D' が次の変形の列で互いに移り合うとする:



この時、鎖複体 $C^{*,*}(D; \mathbb{F}_2)$ と $C^{*,*}(D'; \mathbb{F}_2)$ のホモロジーは同型である。

証明は、Reidemeister 変形に対応する鎖写像 [11, Page 337] [2, Section 4.3] [6, Section 2] と種数 1 写像 $\widehat{\Phi}$ とのホモトピー可換性を示すことが本質的である。詳細は、[7, Section 5] を参照されたい。

今、特異絡み目 L について、その図式 D をとって以下のように定める:

$$Kh^{i,j}(L; \mathbb{F}_2) := H^i(C^{*,j}(D; \mathbb{F}_2)) \quad . \quad (4.4)$$

文献 [3] で指摘されているように、同じ特異絡み目の二つの図式は、変形 (4.3) の列で移り合うことが知られている。従って、命題 4.3 より、アーベル群 (4.4) は、図式 D の選び方によらない。これを L の \mathbb{F}_2 係数の *Khovanov* ホモロジー と呼ぶ。

定理 3 の証明. *Khovanov* ホモロジーの特異絡み目への拡張は上で与えた通りである。定義より、鎖複体 $C^{*,*}(D; \mathbb{F}_2)$ は、各二重点に対して、対応する種数 1 写像 $\hat{\Phi}$ の写像錐とみなせるから、完全列 (1.3) は補題 3.1 より従う。 \square

系. *Jones* 多項式を *Vassiliev* スケイン関係式により特異絡み目へ拡張したものを再び V で書く。この時、任意の特異絡み目 L に対して、次式が成立する:

$$(q + q^{-1})V(L) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{F}_2} Kh^{i,j}(L; \mathbb{F}_2) \quad . \quad (4.5)$$

証明. 定理 2 により、等式 (4.5) は二重点を持たない通常の絡み目 L については成立している。一方、定理 3 より、等式 (4.5) の右辺は *Vassiliev* スケイン関係式を満たすことがわかる。よって、主張は二重点の個数に関する帰納法より従う。 \square

5. FI 関係式

最後に、拡張された *Khovanov* ホモロジーは、*FI* 関係式を満たすことを見る (定理 4)。圏化された *Vassiliev* スケイン関係より、これは以下の形の種数 1 写像がホモロジーに同型を誘導することと等価である:

$$\hat{\Phi}: C^{*,*} \left(\text{Diagram 1}; \mathbb{F}_2 \right) \rightarrow C^{*,*} \left(\text{Diagram 2}; \mathbb{F}_2 \right) \quad . \quad (5.1)$$

一般に、アーベル群 A に値を持つ絡み目不変量 $v: \mathcal{X}_0 \rightarrow A$ を *Vassiliev* スケイン関係式によって特異絡み目に拡張したものについて、第一種の *Reidemeister* 移動による不変性から、以下の等式が成立する:

$$v \left(\text{Diagram 3} \right) = v \left(\text{Diagram 4} \right) - v \left(\text{Diagram 5} \right) = 0 \quad .$$

鎖写像 (5.1) が同型であることは、この等式を圏化することによって示される。

定理 4 の証明. 鎖写像 (5.1) の定義域と値域の (特異) 絡み目図式をそれぞれ D_- 及び D_+ とおき、次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} & C^{*,*} \left(\text{Diagram 6}; \mathbb{F}_2 \right) & \\ \text{RI}^- \swarrow & & \searrow \text{RI}^+ \\ C^{*,*} \left(\text{Diagram 7}; \mathbb{F}_2 \right) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & C^{*,*} \left(\text{Diagram 8}; \mathbb{F}_2 \right) \end{array} \quad . \quad (5.2)$$

ここで、 RI^+ と RI^- はそれぞれ左手、右手向きの第一種 Reidemeister 変形に対応する鎖写像であり、[11] により以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
 RI^- \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} , \\
 RI^+ \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} + \text{diagram} .
 \end{aligned}$$

具体的に計算することにより、図式 (5.2) が可換であるとわかる。さて、鎖写像 RI^- と RI^+ はともにホモロジー上に同型を誘導するのであるから、可換性から、 $\widehat{\Phi}$ もやはり、ホモロジー上に同型を誘導する。これにより、主張が従う。 \square

謝辞

研究集会での講演の機会をいただき、世話人の市原一裕先生 (日本大学文理学部) と茂手木公彦先生 (日本大学文理学部) に深く感謝いたします。また、河野俊丈先生 (東京大学) には、貴重なコメントをいただきました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] D. Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(1):337–370, 2002.
- [2] D. Bar-Natan. Khovanov's homology for tangles and cobordisms. *Geometry & Topology*, 9(3):1443–1499, 2005.
- [3] K. Bataineh, M. Elhamdadi, M. Hajij, and W. Youmans. Generating sets of Reidemeister moves of oriented singular links and quandles. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 27(14):1850064–1–15, 2018.
- [4] J. S. Birman. New points of view in knot theory. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 28(2):253–287, 1993.
- [5] J. S. Birman and X.-S. Lin. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111(2):225–270, 1993.
- [6] N. Ito. Chain homotopy maps for Khovanov homology. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 20(1):127–139, 2011.
- [7] N. Ito and J. Yoshida. Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation, 2019. arXiv:1911.09308.
- [8] M. Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426, February 2000.
- [9] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Advances in Soviet Mathematics*, pages 137–150. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [10] O. Viro. Remarks on definition of Khovanov homology. arXiv:math/0202199, 2002.
- [11] O. Viro. Khovanov homology, its definitions and ramifications. *Fundamenta Mathematicae*, 184:317–342, 01 2004.