

The tabulation of prime knot projections with their mirror images up to eight double points

瀧村 祐介 (学習院中等科)

伊藤 昇 (東京大学大学院数理科学研究科)

本研究集会の講演後に大阪市立大学の金信泰造先生に球面上の prime knot projection の集合は, Tait の著作 [18, 19] (9 交点以下が [18] で, 10 交点が [19]) で決定されていることを教えて頂きました. 深く感謝致しますとともに, どこが過去の結果と重複があり, どこが重複のない結果なのかを (本研究のモチベーションから主結果に至るまでの) 冒頭で整理し, その上で講演報告をしたいと思えます.

モチベーションに関して

近年, knot projections の研究が盛んになってきたことに伴い, (knot table だけでなく) knot projections のテーブルはどのようにして作成され, どのように順序良く延長されるべきか, ということが問題になってきました. 例えば 1994 年の Arnold の表 [1, Figure 53] はこの意味で完全ではない状態でした (図 1 [12]).

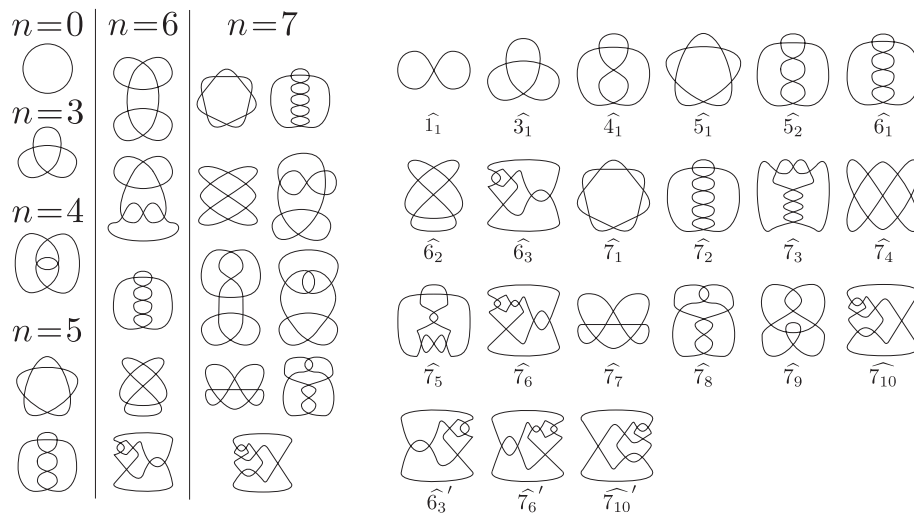


図 1: 7 交点までにおける表. 左が Arnold table [1, Figure 53], 右が我々のもの. 鏡像を同一視したとしてもなお $\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_5, \hat{\tau}_6, \hat{\tau}_9$ が Arnold table から抜けている.

Arnold の本 [2] では reducible knot projection の概念に到達しており, 次のように書かれております:

“Many of these irreducible curves are “combinatorics” of simpler curves. For instance, the first two curves with six crossings are two different combinations of two trefoil curves. However, I do not know any formal theory describing such combinatorics.”

knot の primeness と違い, 球面曲線/knot projection の連結和は一意的ではありませんが, 由緒正しい定義が与えられます [9, Page 379, Definiton 4], [5, Definition 2.5] (このあたりの扱いが, 平面曲線の取り扱いよりもずっとすっきりしており, 球面上で考え

ることの一つの理由となっております¹⁾。

その一方で、球面(平面)曲線におけるライデマイスター移動による距離が誘導する複体を初めて導入した [5] の研究者の方々から鏡像込みの knot projections のテーブル、もしくはその作成法を提示してほしい、という質問もありました。

今回、これらを踏まえて「アクセスしやすい初等的な証明付きの tabulation」を目指して本研究を行いました。knot projections を出力するという視点で歴史的な tabulation の方法を大別すると次のようになります(確証が持てない場合は空欄とした) [12]。

	encoding 経由しない	flype 経由する	knot projection の出力	鏡像含む
[18, 19]			yes	no
[4, 7]	no		yes	
[3]	yes	no	yes	
[13]	yes	no	yes	
[12]	yes	yes	yes	yes

- Dowker-Thistlewaite [4] の方法は、一般交点での knot projections の tabulation について原理的な説明を与えている。この場合 knot projections を書き出し、その上で不変量計算によって knot table を作成する。[4] を利用し、現在得られる computer power により 16 交点までの prime knot table が存在する [7]。
- alternating knot の alternating knot projection は flype で移り合うので、tangle 分解して考えるアプローチも有効である (flype 計算は不変量を計算していることに相当する)。古くは Conway による rational tangle の tabulation がある。この方法は Dowker-Thistlewaite やガウスワードと違い encoding を経由しない [12]。
- cascade diagram (同心円状の diagram) を広げていく方法がある [3]。[3] では flype を用いない。
- Kanenobu-Saito-Satoh [13] による graph を用いた tangle の tabulation がある。[13] では flype を用いない。

Tabulation に関する 4 つの問題

上記の歴史的な経緯を踏まえると以下の問題(ポイント)が浮かび上がります。

- (1) (鏡像関係なく) knot projections すべてを書きつくす方法を提示し実行する。
- (2) (鏡像関係なく) 重複があるかを check する方法を提示し実行する。
- (3) (鏡像込みで) knot projections すべてを書きつくす方法を提示し実行する。
- (4) (鏡像込みで) 重複があるかを check する方法を提示し実行する。

この(3), (4)を完全に解決している可能性があるのは [4, 7] ですが、ここでは、encoding をせずに、少ない(しかし非自明な)交点数で(3), (4)を研究者が実行できるようにすることを意図しています。

¹ さらにサポート種数正の場合は状況が異なるということもあるが、ここではこれ以上触れない (cf. [8])。

主結果

最小交点数が n の、鏡像は区別しない場合の prime knots の数を $|\mathcal{K}_n|$ とする. 交点数が n の球面上の鏡像は区別しない (鏡像は区別する, resp.) prime knot projection の集合を \mathcal{P}_n ($\widetilde{\mathcal{P}}_n$, resp.) とする. このとき $n \leq 8$ において \mathcal{P}_n と $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ の表とその作成方法を球面に乗るかのらないかの判定不変量²を用いず書き表した. その上で \mathcal{P}_n の濃度を $|\mathcal{P}_n|$ とするとき, $1 \leq n \leq 8$ における $|\mathcal{K}_n|, |\mathcal{P}_n|$ の表 (下記) を作成し, 下記の予想を定式化した.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \mathcal{K}_n $	0	0	1	1	2	3	7	21
$ \mathcal{P}_n $	1	0	1	1	2	3	10	27

Conjecture. 整数 n, m が $3 < n < m$ を満たすとする.

- (1) $|\mathcal{K}_n| < |\mathcal{K}_m|$ (有名問題)
- (2) $|\mathcal{P}_n| < |\mathcal{P}_m|$
- (3) $|\mathcal{K}_n| \leq |\mathcal{P}_m|$

Definition. P を knot projection とする. P の交点の逆像を chord で結ぶことによって P の chord diagram が得られ, CD_P と表す. P を positive にして得られる knot diagram を P^{pos} と表す. P^{pos} に対応して arrow diagram が得られ, AD_P と表す. (例: 図 2).

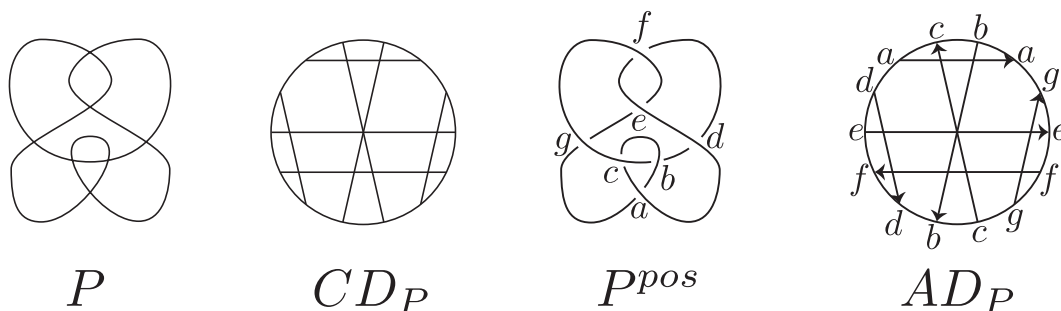


図 2:

Proposition. P の鏡像を P' と表す. AD_P と $AD_{P'}$ では矢印の向きが全て逆転するため, 与えられた knot projection が鏡像と一致するかどうかを arrow diagram によって判定できる. 例えば, $\widehat{6}_3$ は鏡像と一致しない (図 3).

Tait flyping Conjecture (Menasco-Thistlethwaite Theorem [14]).

alternating knot の任意の 2 つの reduced, prime alternating diagrams について, 一方に図 4 の flype を有限回施すことによって, もう一方の alternating knot diagram が得られる.

²Turaev のナノワード理論により「move を入れない」ときはサポート種数を判定できる不変量があるが, それを用いてサポート種数正のものを消去する議論 [8] は雰囲気が大きく異なるので, ここではサポート種数正のものを扱わない場合について考える. また「move が入るとき」の最小サポート種数の決定は virtual knot 理論においては重要な意味を持つ).

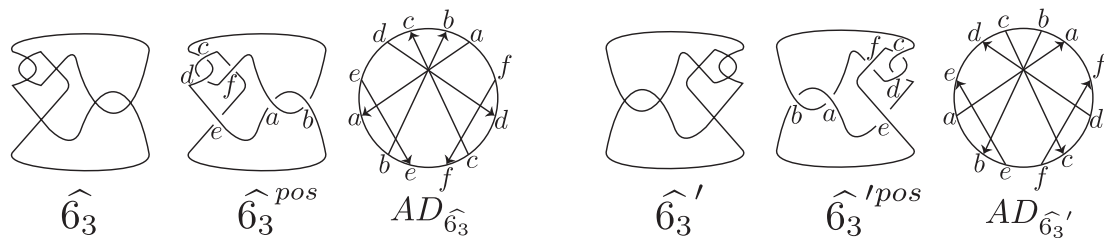


図 3:

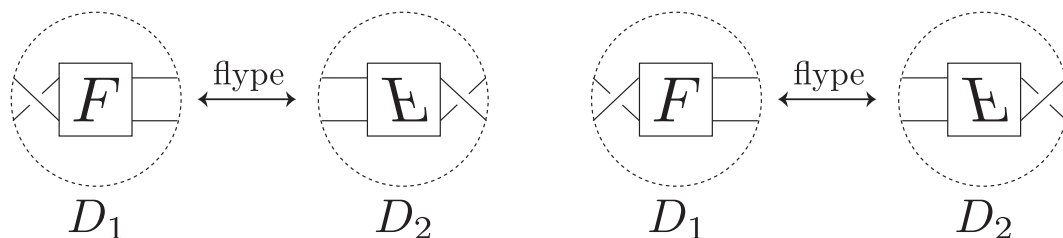


図 4:

knot projection に対して, 図 5 のように flype を定義する.

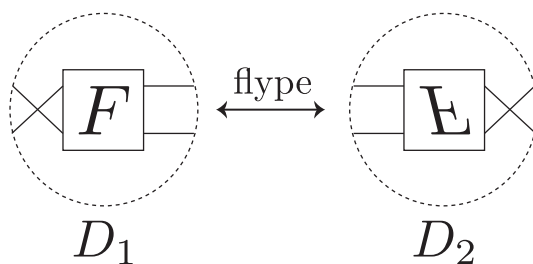


図 5:

Tait flying Conjecture により, 全ての reduced, prime alternating diagrams は, alternating knots における flypes により得られる. これより, Rolfsen knot table [16] の knot projections に対し, flypes を全て確認することによって knot projections の table を作成する.

全ての knot projection は, 図 6 のように 2つの (2, 2)- tangle の連結和で表すことができる. (2, 2)-tangle は \hat{U} 型 tangle, \hat{T} 型 tangle の 2種類ある. knot projection においては, \hat{T} と \hat{T} の連結和か \hat{T} と \hat{U} の連結和となる. D_1 を flype した knot projection と D_2 を flype した knot projection は, 一致するか鏡像になる.

7交点, 8交点の knot projection において, (3, 2)-tangle の連結和で表すと, 交点数においては次の table のようになる.

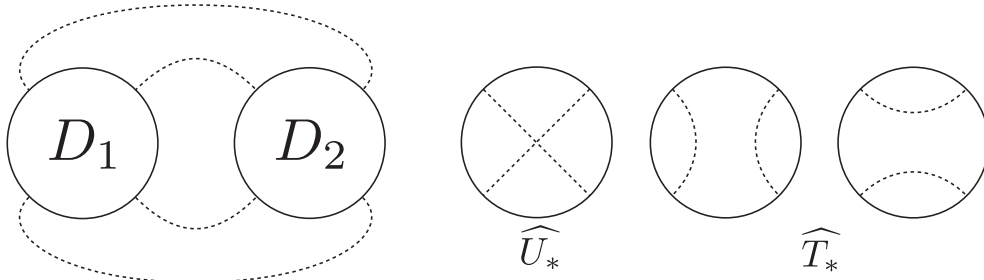


図 6:

7交点の knot projection						8交点の knot projection					
T		T	U		T	T		T	U		T
1	+	6	1	+	6	1	+	7	1	+	7
2	+	5	2	+	5	2	+	6	2	+	6
3	+	4	3	+	4	3	+	5	3	+	5
			4	+	3	4	+	4	4	+	4
			5	+	2				5	+	3
			6	+	1				6	+	2
									7	+	1

どちらか一方の flype を確認すればよいので, 8 交点以下の knot projection の table を作成するには 3 交点以下の U tangle, 4 交点以下の T tangle で調べればよい (図 7). flype で変化する tangle のみを調べればよいので, 実際には, \widehat{T}_3 と \widehat{T}_{4c} の flype を調べればよい.

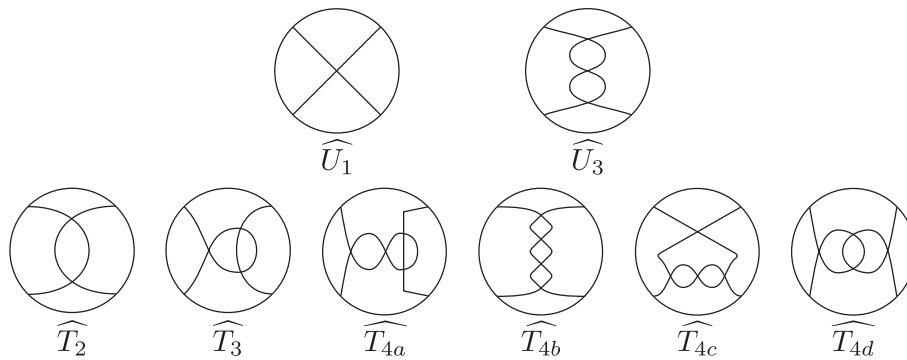


図 7:

7 交点と 8 交点で, 一例を挙げる (図 8).

球面上の 8 交点以下の prime knot projection の集合は, 図 9 である. それらに対応した chord diagram が 図 10, arrow diagram が 図 11 である. 鏡像と一致しない knot projection の集合は 図 12 である.

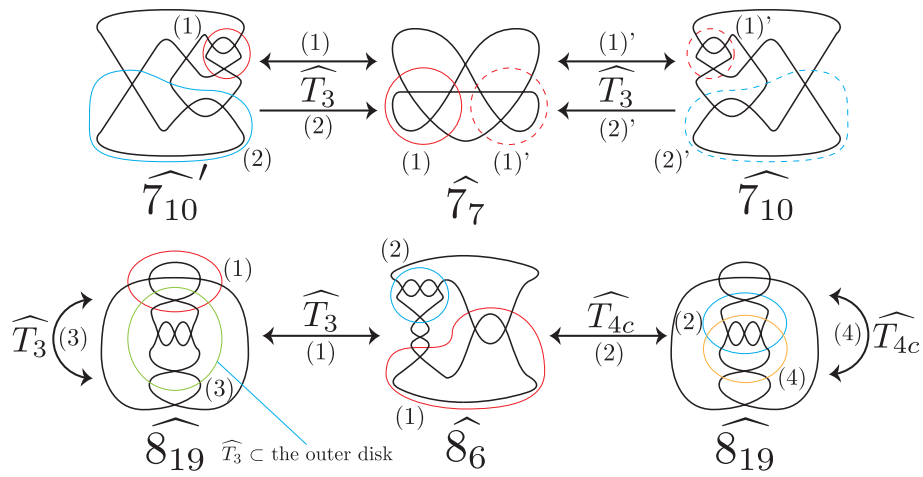


図 8:

knot projection P に対して, 次の値を定義する. 8 交点以下の knot projection に対して, 各値の table を作成した.

$c(P)$: P の交点数

$s(P)$: P の Seifert circle の数

$g(P)$: P の canonical genus

$a(P)$: P の average invariant ([15])

$\tau(P)$: P の circle number ([10])

$tr(P)$: P の trivializing number ([6])

$r(P)$: P の既約度 ([17])

$X(P)$: CD_P の cross chord の総数 (図 13, [11])

$H(P)$: CD_P の H chord の総数 (図 13, [11])

$T(P)$: CD_P の triple chord の総数 (図 13, [11])

$\lambda(P)$: $\frac{1}{4}\{3 \times H(P) - 3 \times T(P) + X(P)\}$ ([11])

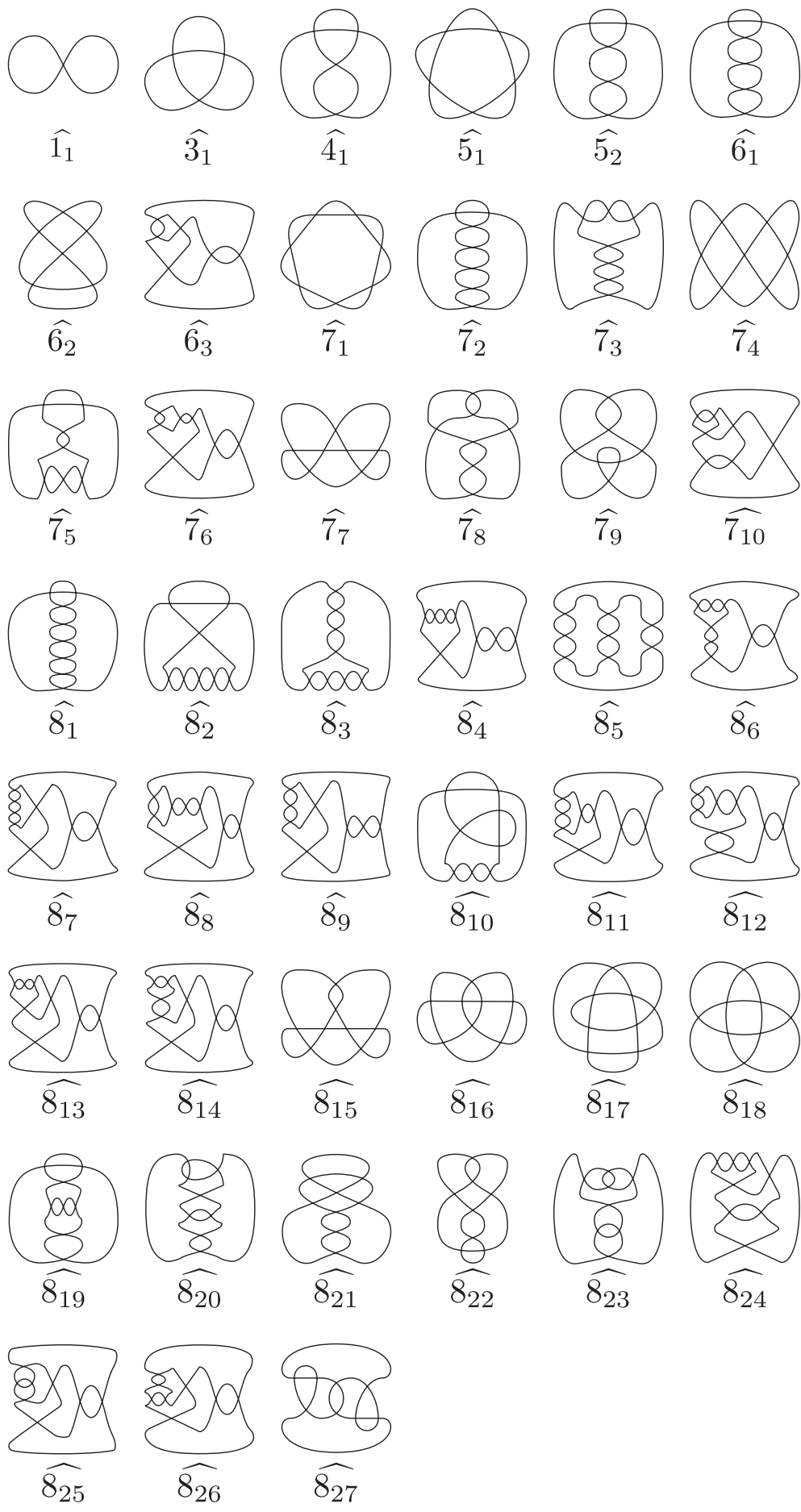


图 9:

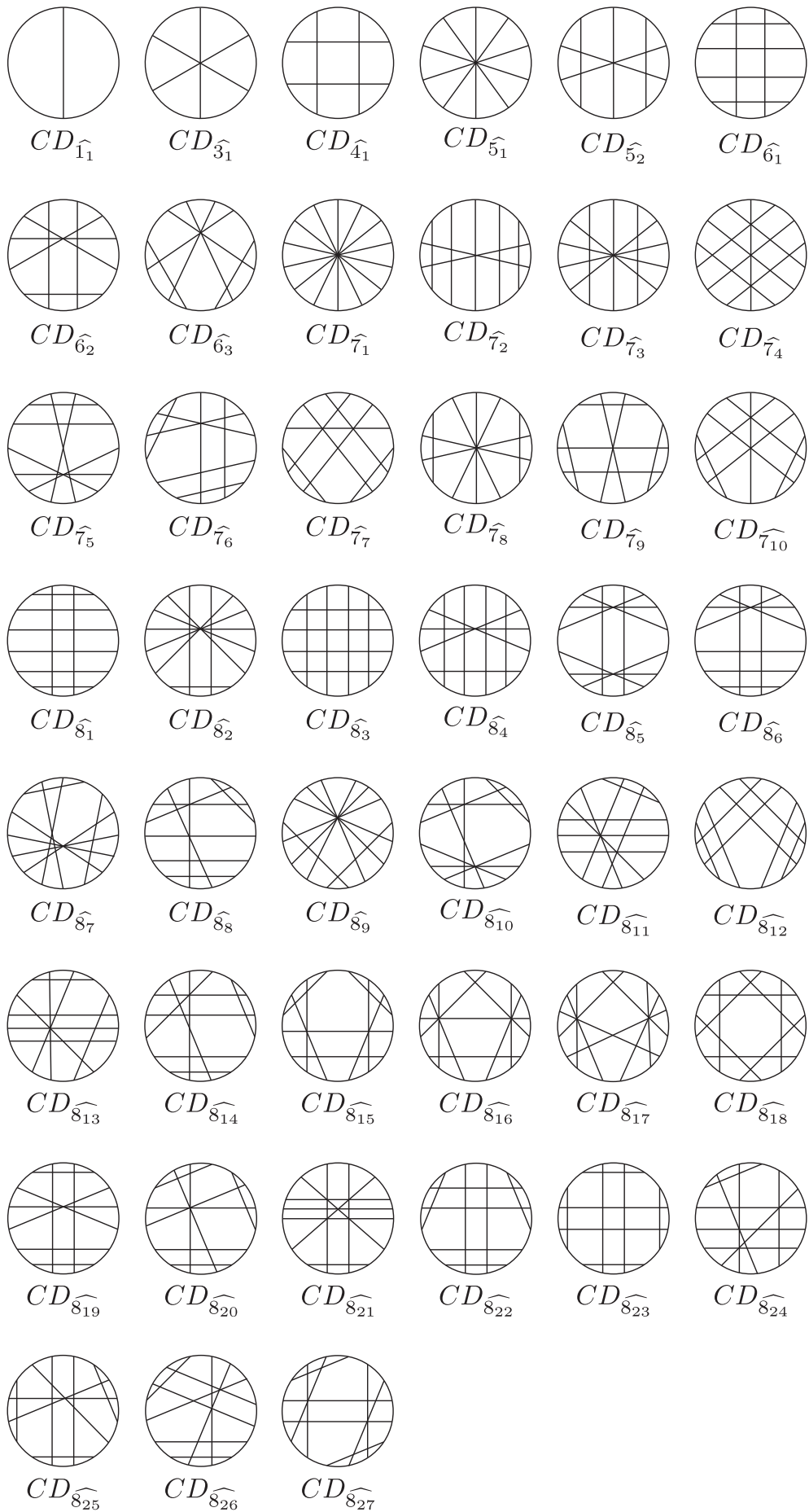


图 10:

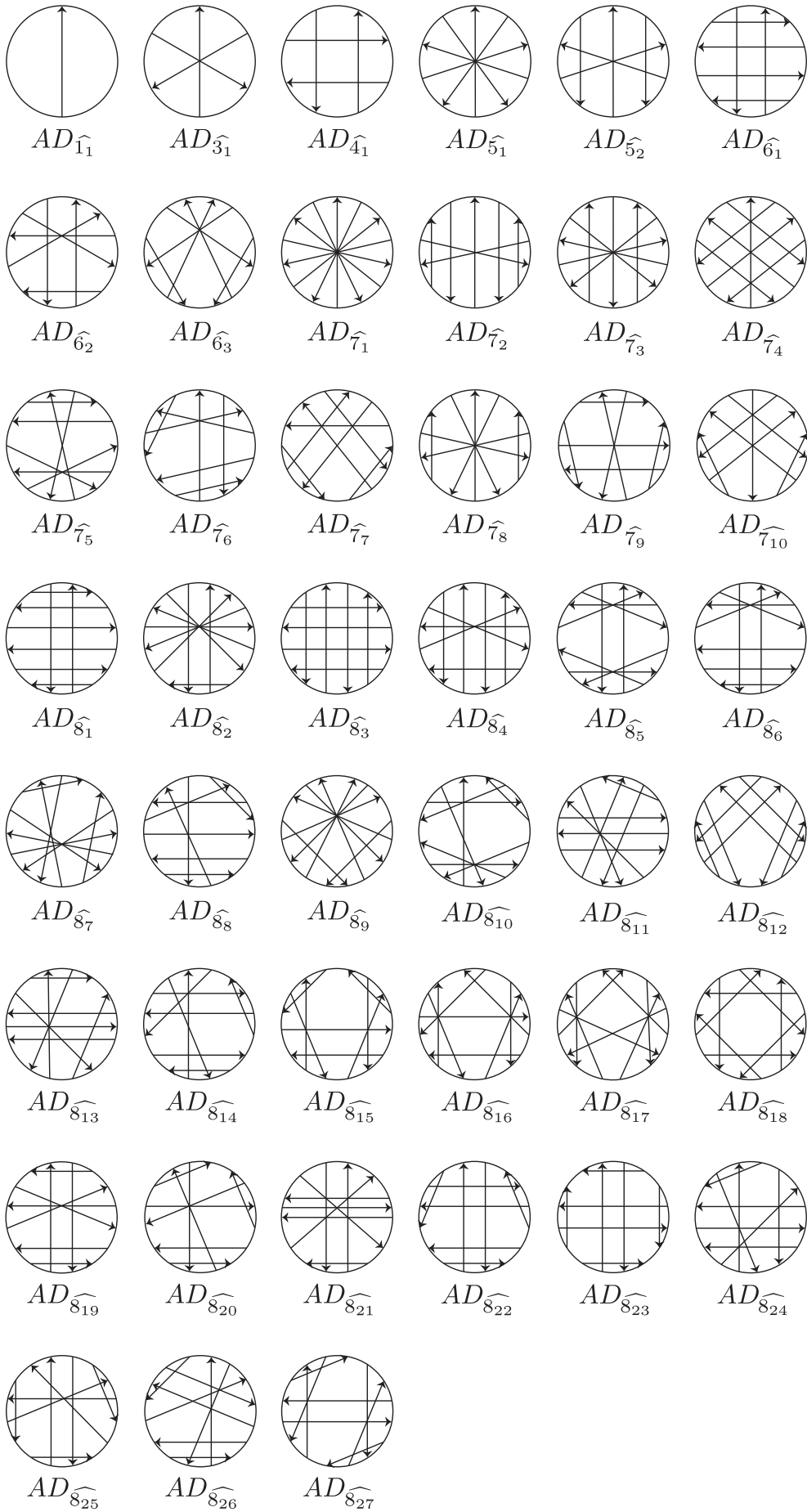


图 11:

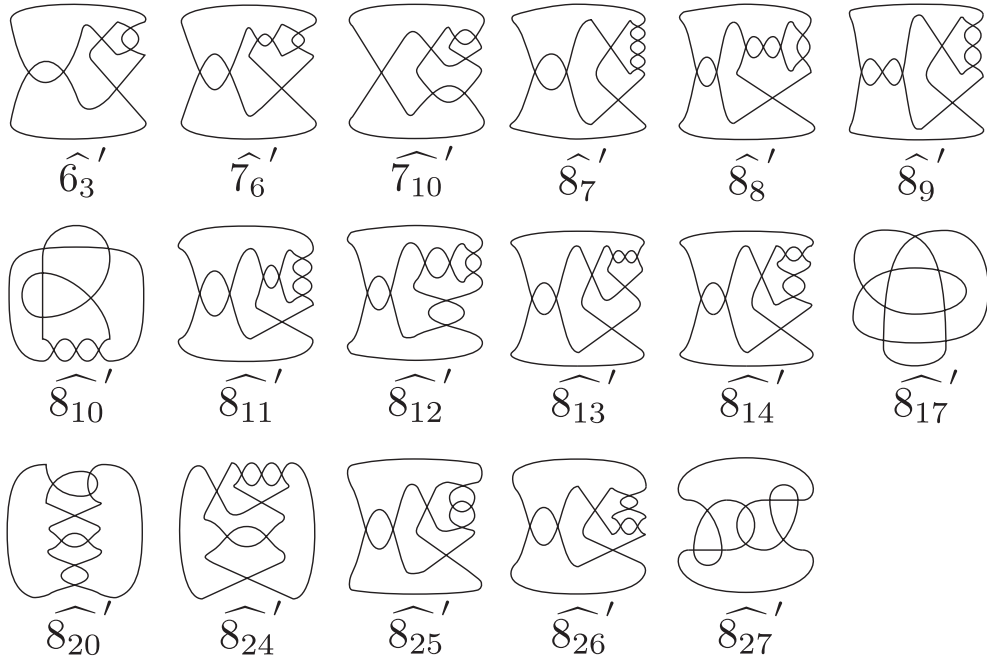


图 12:

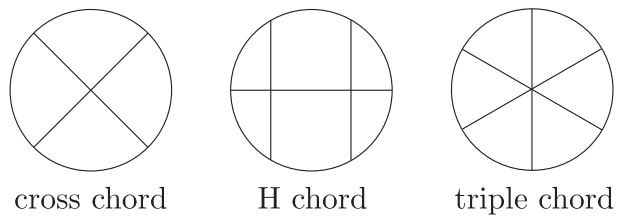


图 13:

P	$c(P)$	$s(P)$	$g(P)$	$a(P)$	$\tau(P)$	$tr(P)$	$r(P)$	$X(P)$	$H(P)$	$T(P)$	$\lambda(P)$
$\widehat{1}_1$	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\widehat{3}_1$	3	2	1	1	3	2	1	3	0	1	0
$\widehat{4}_1$	4	3	1	0	1	2	2	4	4	0	4
$\widehat{5}_1$	5	2	2	2	5	4	1	10	0	10	-5
$\widehat{5}_2$	5	4	1	1	3	2	1	7	6	3	4
$\widehat{6}_1$	6	5	1	0	1	2	2	8	16	0	14
$\widehat{6}_2$	6	3	2	1	3	4	1	11	10	7	5
$\widehat{6}_3$	6	3	2	2	3	4	1	10	8	6	4
$\widehat{7}_1$	7	2	3	3	7	6	1	21	0	35	-21
$\widehat{7}_2$	7	6	1	1	3	2	1	11	20	5	14
$\widehat{7}_3$	7	4	2	2	5	4	1	18	12	22	-3
$\widehat{7}_4$	7	6	1	1	3	4	2	15	24	9	15
$\widehat{7}_5$	7	4	2	2	5	4	1	14	14	12	5
$\widehat{7}_6$	7	4	2	1	3	4	1	11	18	3	14
$\widehat{7}_7$	7	4	2	0	1	4	2	12	20	4	15
$\widehat{7}_8$	7	4	2	2	5	4	1	14	14	12	5
$\widehat{7}_9$	7	4	2	1	3	4	1	11	18	3	14
$\widehat{7}_{10}$	7	4	2	0	1	4	2	12	20	4	15
$\widehat{8}_1$	8	7	1	0	1	2	2	12	36	0	30
$\widehat{8}_2$	8	3	3	2	5	6	1	22	16	30	-5
$\widehat{8}_3$	8	7	1	0	1	4	2	16	48	0	40
$\widehat{8}_4$	8	5	2	1	3	4	1	19	36	13	22
$\widehat{8}_5$	8	3	3	2	5	6	1	18	24	14	12
$\widehat{8}_6$	8	5	2	1	3	4	1	15	30	7	21
$\widehat{8}_7$	8	3	3	3	5	6	1	21	16	27	-3
$\widehat{8}_8$	8	5	2	2	3	4	1	14	22	8	14
$\widehat{8}_9$	8	3	3	2	5	6	1	22	24	26	4
$\widehat{8}_{10}$	8	3	3	3	5	6	1	17	16	15	5
$\widehat{8}_{11}$	8	5	2	1	3	4	1	19	28	17	13
$\widehat{8}_{12}$	8	5	2	0	1	4	2	12	28	0	24
$\widehat{8}_{13}$	8	5	2	2	3	4	1	18	28	14	15
$\widehat{8}_{14}$	8	5	2	1	3	4	1	15	24	9	15
$\widehat{8}_{15}$	8	5	2	2	5	4	1	14	20	6	14
$\widehat{8}_{16}$	8	3	3	3	3	6	1	17	24	11	14
$\widehat{8}_{17}$	8	3	3	2	3	6	1	18	24	14	12
$\widehat{8}_{18}$	8	3	3	4	1	6	3	16	24	8	16
$\widehat{8}_{19}$	8	5	2	1	3	4	1	15	30	7	21
$\widehat{8}_{20}$	8	5	2	2	3	4	1	14	22	8	14

P	$c(P)$	$s(P)$	$g(P)$	$a(P)$	$\tau(P)$	$tr(P)$	$r(P)$	$X(P)$	$H(P)$	$T(P)$	$\lambda(P)$
$\widehat{8}_{21}$	8	5	2	1	3	4	2	19	28	17	13
$\widehat{8}_{22}$	8	5	2	0	1	4	2	12	28	0	24
$\widehat{8}_{23}$	8	5	2	0	1	4	2	12	28	0	24
$\widehat{8}_{24}$	8	5	2	2	3	4	1	18	28	14	15
$\widehat{8}_{25}$	8	5	2	1	3	4	1	15	24	9	15
$\widehat{8}_{26}$	8	5	2	1	3	4	1	15	24	9	15
$\widehat{8}_{27}$	8	5	2	2	5	4	1	14	20	6	14

この度は日本大学の茂手木公彦先生と市原一裕先生に大変お世話になりました。感謝申し上げます。

参考文献

- [1] V. I. Arnold, Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. With an appendix by F. Aicardi. Adv. Soviet Math., 21, *Singularities and bifurcations*, 33–91, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [2] V. I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics. University Lecture Series, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [3] A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, and M. Petrov, Enumerating the k -tangle projections, *J. Knot Theory Ramifications* **21**, 1250069, 17pp.
- [4] C. H. Dowker and M. B. Thistlewaite, On the classification knots, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **4** (1982), 129–131.
- [5] Y. Funakoshi, M. Hashizume, N. Ito, T. Kobayashi, and H. Murai, A distance on the equivalence classes generated by deformations of type RI, *J. Knot Theory Ramifications* **27** (2018), 1850066, 22pp.
- [6] R. Hanaki, Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs. *Osaka J. Math.* **47** (2010), no. 3, 863–883.
- [7] J. Hoste, M. B. Thistlewaite, J. Weeks, The first 1,701,936 knots, *Math. Intelligencer* **20** (1998), 33–48.
- [8] 伊藤昇, Construction of curves and fronts using word theory, Singularity Seminar, 北海道大学, 2008.10.31 (スライドは伊藤昇の researchmap, 講演リスト内).
- [9] N. Ito, Based chord diagrams of spherical curves, *Kodai Math. J.*, **41** (2018), 375–396.
- [10] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1,2) homotopies on knot projections and new invariants. *Kobe J. Math.* **33** (2016), no. 1-2, 13–30.
- [11] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41** (2015), no. 2, 701–725.
- [12] N. Ito and Y. Takimura, The tabulation of prime knot projections with their mirror images up to eight double points, *Topology Proc.* **53** (2019), 177–199.
- [13] T. Kanenobu, H. Saito, S. Satoh, Tangles with up to seven crossings. Proceedings of Winter Workshop of Topology/Workshop of Topology and Computer (Sendai, 2002/Nara, 2001). *Interdisip. Inform. Sci.* **9** (2003), 127–140.
- [14] W. Menasco and M. Thistlewaite, The classification of alternating links, *Ann. Math. (2)* **138**, 113–171.
- [15] M. Polyak, Invariants of curves and fronts via Gauss diagram, *Topology* **37** (1998) 989–1009.

- [16] D. Rolfsen, Knots and links, Mathematics Lecture Series, *Publish or Perish, Inc., Berkley, Calif.*, 1976.
- [17] A. Shimizu, The reductivity of spherical curves, *Topology Appl.* **196** (2015), 860–867.
- [18] P.G.Tait, On knots II. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* **32** (1883-4), 327–342.
- [19] P.G.Tait, On knots III. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* **32** (1884-5), 493–506.