

On crosscap numbers of alternating knots

伊藤 昇 (東京大学大学院数理科学研究科)

瀧村 祐介 (学習院中等科)

本稿は「結び目の数理 II」の報告集の一部として書かれたものです。本研究については既に出版論文 [7] があり、それについて報告しました¹。オーガナイザーである日本大学の茂手木公彦先生、市原一裕先生、開催スタッフの皆様に深く感謝致します。

1. 定義と主結果

定義 1 ($C(K)$, $B_l(K)$ [7]) $C(K)$, $B_l(K)$ を以下で定義する。

- $C(K)$. 結び目 K に対して crosscap number (または non-orientable genus と呼ばれる) $C(K)$ を次で定める. $C(K) := \min\{1 - \chi(\Sigma) \mid \Sigma : \text{non-orientable surface}, \partial(\Sigma) = K\}$, ただし unknot については例外的に $C(\text{unknot}) = 0$ と定める.
- $B_l(K)$. knot K の alternating knot diagram D に対して B_l, RI^- をそれぞれ何回か用いて交点のない knot diagram O に変形する列全ての中で, B_l の最小手数を $B_l(D)$ とする. このとき K の alternating knot diagrams 全体がなす集合を $Z(K)$ とし, $B_l(K)$ を次で定義する.

$$B_l(K) := \min_{D \in Z(K)} B_l(D).$$



図 1: B_l と RI^- , S^- . B_l は成分数を変え得る. 一方, S^- は成分数を変えない. 円盤は変形がおこる範囲を表し, 円盤外の点線は曲線のつながり方を示す. 尚, これらの図では交点の上下の情報は省略している.

定理 1 (今回の主結果) K を alternating knot とし, $g(K)$ を 3次元 knot genus, $C(K)$ と $B_l(K)$ を定義 1 で与えるものとする. $K \sharp K'$ を 2 つの結び目 K , K' の連結和とする. 次が成り立つ.

- (1) $C(K) = B_l(K) \Leftrightarrow C(K) \neq 2g(K) + 1$.
- (2) $C(K) = B_l(K) + 1 \Leftrightarrow C(K) = 2g(K) + 1$.
- (3) $B_l(K \sharp K') = B_l(K) + B_l(K')$.

¹したがってより詳しい内容についてはそちらに記載してあります.

2. モチベーション

knot genus は結び目の最も基本的な幾何的な不変量の一つです. しかし例えば alternating knot diagram に話を限っても n 交点の alternating knot diagram 1 つから Seifert surface が得る Kauffman state は 1 通りで, 他の $2^n - 1$ 通りの Kauffman states からは non-orientable surfaces を出します. この意味において non-orientable knot genus (crosscap number) の重要性が伺い知れます. また knot genus の場合は研究手法が確立されており, alternating knot に関しては Alexander 多項式 [10, 4], 一般には Heegaard Floer homology [11] で決まることも知られています. これらと比較すると crosscap number は手法がまだまだ限られており, orientable の時のような結果があるのか, あるとすれば一体どのように定式化されるのか, わからないままとなっています².

3. $C(K)$ の下からの評価

定義 2 (spanning surface, state surface [11]) を以下で定義する.

- 結び目 K を境界とする曲面を spanning surface という. 本研究では曲面は 3 次元空間内の曲面とする.
- 与えられた結び目図式の, ある Kauffman state から交点を回復するように半ひねり band を加えて Seifert algorithm の方法と同様に得られる spanning surface を state surface という (state surface というのは Seifert surface の自然な一般化であり, Ozawa [11] により本格的な研究が始まった [1, 6]).

Adams-Kindred [1] の結果により次が保証される.

Fact 1 (Adams-Kindred [1]) alternating knot K に対し, 任意の alternating knot diagram D から得られる state surface でオイラー数を最大にするものが取られる. ただし, ここでの「最大」の意味は state/non-state, orientable/non-orientable に関わらず全ての spanning surface の中で最大, という意味である.

補題 1 は直ちに気づく.

補題 1 1 回の平滑化 (i.e. Seifert, あるいは S^- 型の splice) は 1 回の band 手術 B_l と RI^- で得られる (図 2).

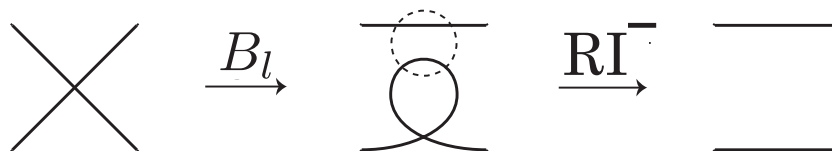


図 2: 1 回の平滑化と band 手術 B_l との関係.

Fact 1 から最大オイラー数の spanning surface が Kauffman state から得られることが保証され, かつ補題 1 が成り立つので, $B_l(K)$ の定義から

$$B_l(K) \leq \min\{C(K), 2g(K)\}. \quad (1)$$

²例えば orientable のときは種数はアレクサンダー多項式の径間の $\frac{1}{2}$ (村杉 [10], Crowell [4] のそれぞれ独立な結果) である.

4. $C(K)$ の上からの評価

4.1. $C(K) \leq 2g(K)$ の場合

$$C(K) = b_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram showing a sequence of surfaces connected by band surgeries, enclosed in large parentheses.} \end{array} \right) \quad (2)$$

= the number of band surgeries to obtain a disk by cutting b_1 generators (3)

= the number of necessary band surgeries to obtain a disk from Σ_{nonori} (4)

$\leq \min\{\# \text{ band surgeries to obtain a disk from a non-orientable state surface which is homeomorphic to } \Sigma_{\text{nonori}}\}$ (5)

= $B_l(K)$. (6)

式番号に対応したコメント

(2) $b_1(\text{surface})$ により surface の 1st Betti number を表すとする. $C(K)$ の定義から従う. 尚, 図は 1st Betti number 個の射影平面の連結和に穴をあけたもの (以降, これを Σ_{nonori} と書くことにする). 赤線は H_1 の generators を導く π_1 の generators を表す.

(3) (2) の数は disk を得るために H_1 の生成元を「カット」するのに必要な数.

(4) (3) の数を読み替えると, これは Σ_{nonori} から disk を与えるのに必要な band surgeries の数.

(5) (4) の数は, 任意の non-orientable state surface を disk にする band surgeries の個数以下であるので, (4) の数は, alternating knot diagram における state surface における最小値以下である.

(6) $B_l(K)$ の定義から (5) の数と $B_l(K)$ が等しいことがわかる.

4.2. $C(K) > 2g(K)$ の場合.

$$2g(K) = b_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram showing a sequence of surfaces connected by band surgeries, with red lines indicating generators.} \end{array} \right) \quad (7)$$

= the number of band surgeries to obtain a disk by cutting b_1 generators (8)

= the number of necessary band surgeries to obtain a disk from Σ_{ori} (9)

$\leq \min\{\#\text{band surgeries to obtain a disk from an orientable state surface which is homeomorphic to } \Sigma_{\text{ori}}\}$ (10)

= $B_l(K)$. (11)

式番号に対応したコメント

(7) $b_1(\text{surface})$ により surface の 1st Betti number を表すとする. $C(K)$ の定義から従う. 尚, 図は 1st Betti number $\times \frac{1}{2}$ 個のトーラスの連結和に穴をあけたもの (以降, これを Σ_{ori} と書くことにする). 赤線は H_1 の generators を導く π_1 の generators を表す.

(8) (7) の数は disk を得るために H_1 の生成元を「カット」するのに必要な数.

(9) (8) の数を読み替えると, これは Σ_{ori} から disk を与えるのに必要な band surgeries の数.

(10) (9) の数は, 任意の orientable state surface を disk にする band surgeries の個数以下であるので, (9) の数は, alternating knot diagram における state surface における最小値以下である.

(11) $B_l(K)$ の定義から (10) の数と $B_l(K)$ が等しいことがわかる.

以上により,

$$\min\{C(K), 2g(K)\} \leq B_l(K). \quad (12)$$

5. 定理1(主結果)の証明

Section 3の(1)とSection 4の(12)から, 任意の alternating knot K に対し,

$$B_l(K) = \min\{C(K), 2g(K)\}. \quad (13)$$

以下, 場合分けをして議論する.

(1) $C(K) \neq 2g(K) + 1$ の場合.

このとき, 任意の結び目 K において成り立つ Clark [3, Proposition 2.6] の不等式

$$C(K) \leq 2g(K) + 1$$

を思い出すと, $C(K) \leq 2g(K)$ が成り立つ. したがって (13) から $B_l(K) = C(K)$.

(2) $C(K) = 2g(K) + 1$ の場合.

このときは $C(K) > 2g(K)$. よって, $B_l(K) = 2g(K) = C(K) - 1$.

以上から定理 1 の主張 (1), (2) については示せた. 以下, 定理 1 の主張 (3) について示す.

まず, alternating knot に限らず Fact 2 が知られていることを思い出す (例えば Clark [3] では Fox [5] の証明を引用している).

Fact 2 結び目 $K \sharp K'$ を結び目 K, K' の連結和とする.

$$\min\{C(K \sharp K'), 2g(K \sharp K')\} = \min\{C(K), 2g(K)\} + \min\{C(K'), 2g(K')\}.$$

すると (13) より, 次を得る.

$$B_l(K \sharp K') = B_l(K) + B_l(K').$$

これで定理 1 の主張 (3) も示せた. □

6. 具体的な曲面の求め方について

• $C(K) \leq 2g(K)$ のとき.

このときは最大オイラー数を実現する splice を見つける方法が Adams-Kindred のアルゴリズムとして知られ, 2018 年「結び目の数理」報告集に記載した [1].

• $C(K) = 2g(K) + 1$ のとき.

上記の証明では $C(K) = 2g(K) + 1$ を具体的に non-orientable “state” surface として band surgeries で構成していないが, 本講演と論文 [7] では具体的な構成法を記述したので報告する.

(具体的な方法) Seifert surface にメビウスバンドを一つつけたものを state surface で実現してみせれば, 確かに $1 - 2g(K)$ と $B_l(K)$ を同時に実現する surface が確認できる.

Seifert のアルゴリズムを思い出せば, 向きに沿った splice は, disk を切り出す (split させるか, nest しているときは stack させる) 方向に splice している. したがって 1 つの交点を任意に選んでバンドを付け替えればよい (図 3). この「バンドの付け替え」はオイラー数を一つ下げる (alternating knot diagram 上で splice の方向を一つ変えることに対応する).

7. 具体的な $C(K)$ の計算について

• いくつかのよく知られた評価を使って Section 6 に記載した Adams-Kindred のアルゴリズムを効率化できる. 我々が (明示的あるいは非明示的に) 使った評価をリストは以下の通り. ただし $n(K)$ は結び目の minimum crossing number,

(1) $C(K) \leq 2g(K) + 1$ (Clark [3]).

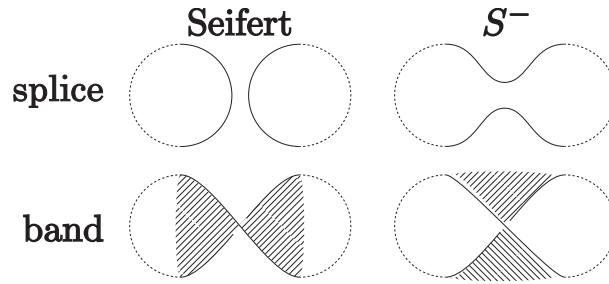


図 3: バンドの付け替え. 斜線部分 (band) に注目する. 左図では splice に対し 2 つの component を連結する half-twisted band をつけていて, 右図では紙面に対して手前か奥行きに向かって円環をなすように half-twisted band をつけている.

(2) $C(K) \leq \lfloor n(K)/2 \rfloor$ (H. Murakami-Yasuhara [9]).

(3) $\lceil T(K)/3 \rceil \leq C(K) \leq T(K) + 1$ (Kalfagianni-Lee [8]).

Remark 1 上記リストのうち講演, 講演スライドでは Kalfagianni-Lee (3) の上限についての改善について触れましたが, ここでは使わなくてもできるのでここでは省略します. この改善が役に立つ場合も口頭では触れましたが, 文章としては場を改めて紹介したいと思います.

Remark 2 2018 年「結び目の数理」報告集に次の誤植がありました. ここにお詫びし訂正をいたします. [訂正箇所] Definition 5: (誤) “全ての” \rightarrow (正) “alternating knot diagram の交点の上下の情報を無視して得られる全ての”.

8. 謝辞

本研究は, 2018 年「結び目の数理」における私達の講演に対する平澤美可三先生のコメントを中心に据えながら行われたものです. 深く感謝致します. また寺垣内政一先生は 1990 年代の別所氏による修士論文 [2] の入手についてご配慮くださいました. この他, crosscap の決定問題に取り組む過程で, 多くの先生方に email や研究集会等でアドバイスを頂きました. ありがとうございます.

参考文献

- [1] C. Adams and T. Kindred, A classification of spanning surfaces for alternating links, *Algebr. Geom. Topol.* **13** (2013), 2967–3007.
- [2] 別所克人, Incompressible surfaces bounded by links, 大阪大学修士論文, 平成 6 年 2 月.
- [3] B. E. Clark, Crosscaps and knots, *Internat. J. Math. Sci.* **1** (1978), 113–123.
- [4] R. Crowell, Genus of alternating link type, *Ann. of Math. (2)* **69** (1959), 258–275.
- [5] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, 1962 *Topology of 3-manifolds and related topics* pp.120–167.
- [6] D. Futer, E. Kalfagianni, and J. Purcell, Guts of surfaces and the colored Jones polynomial. *Springer, Heidelberg*, 2013. 170 pp.
- [7] N. Ito and Y. Takimura, A lower bound of crosscap numbers of alternating knots, *J. Knot Theory Ramifications*, accepted.
- [8] E. Kalfagianni and C. R. S. Lee, Crosscap numbers and the Jones polynomial. *Adv. Math.* **286** (2016), 308–337.

- [9] H. Murakami and A. Yasuhara, Crosscap number of a knot, *Pacific J. Math.* **171** (1995), 261–273.
- [10] K. Murasugi, On the Alexander polynomial of alternating algebraic knots. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **39** (1985), no. 3, 317–333.
- [11] M. Ozawa, Essential state surfaces for knots and links. *J. Aust. Math. Soc.* **91** (2011), no. 3, 391–404.