Lorentz symmetry violation in the fermion number anomaly with the chiral overlap operator

森川億人 (M1)
共同研究者：牧野広樹

九州大学

2017/3/17 日本物理学会 第 72 回年次大会 @大阪大学

- H. Makino and O. Morikawa, PTEP **2016** (2016) no.12, 123B06 [arXiv:1609.08376 [hep-lat]].

Chiral gauge theory on the lattice

- QFT $\cdots$ 摂動論で定義されている
- Vectorlike なゲージ理論については、格子正則化は非摂動論的な定義を与える（格子 QCD）
- カイラルゲージ理論の非摂動論的定義は研究中...
- Grabowska–Kaplan [2015, 2016] の提案
  - 5D domain-wall(DW) 格子定式化
  - Chiral overlap operator に基づいた 4D 格子定式化（カイラル DW フェルミオンから導出される）
- Fermion number anomaly の現象論的示唆 [Okumura–Suzuki 2016]
- 本研究では、fermion number anomaly の連続極限を計算した

Chiral DW fermion [Grabowska–Kaplan 2015]

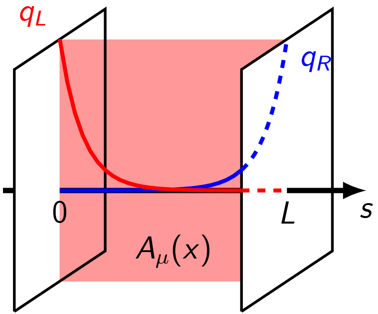
- DW フェルミオン + グラディエント・フロー
- 5D 格子空間 (x, s) with 4D DW [Callan–Harvey, Kaplan]
  - カイラルゼロモードが DW 上に局在化
- グラディエント・フロー [Narayanan–Neuberger, Lüscher]

$$\partial_\tau \mathcal{A}_\mu(x, s) = D_\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}$$

  - フロー時間 $\tau(s)$; 境界条件 $\mathcal{A}_\mu(x, s = 0) = A_\mu(x)$.
- Manifest にゲージ不変
- A_μ の物理的モードの指数関数的減衰 $(\tau(s = L) = \infty)$

$$A_{\star\mu}(x) \equiv \mathcal{A}_\mu(x, s = L)$$

- RH フェルミオンが A_μ から decouple する



Chiral DW fermion [Grabowska–Kaplan 2015]

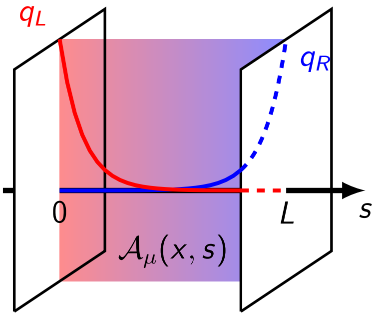
- DW フェルミオン + グラディエント・フロー
- 5D 格子空間 (x, s) with 4D DW [Callan–Harvey, Kaplan]
  - カイラルゼロモードが DW 上に局在化
- グラディエント・フロー [Narayanan–Neuberger, Lüscher]

$$\partial_\tau \mathcal{A}_\mu(x, s) = D_\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}$$

  - フロー時間 $\tau(s)$; 境界条件 $\mathcal{A}_\mu(x, s = 0) = A_\mu(x)$.
- Manifest にゲージ不変
- A_μ の物理的モードの指数関数的減衰 $(\tau(s = L) = \infty)$

$$A_{\star\mu}(x) \equiv \mathcal{A}_\mu(x, s = L)$$

- RH フェルミオンが A_μ から decouple する



Chiral overlap operator [Grabowska–Kaplan 2016]

- DW フェルミオン → 4D 有効理論
  (overlap fermion) [Neuberger, Vranas, Kikukawa–Noguchi]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\mathcal{D}_\chi\psi(x), \quad \text{where } a\mathcal{D}_\chi = \lim_{L\to\infty}\left[1 + \gamma_5 \frac{1 - \prod_{s=L}^{1} T(s)}{1 + \prod_{s=L}^{1} T(s)}\right].$$

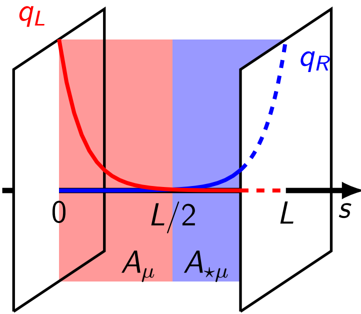
  $T(s)$: transfer matrix

- Abrupt transition (sudden flow) を仮定すると、
  chiral overlap operator は

$$a\mathcal{D}_\chi =$$

$$1 + \gamma_5\left[1 - (1-\epsilon_\star)\frac{1}{\epsilon\epsilon_\star + 1}(1-\epsilon)\right].$$

ϵ, $\epsilon_\star$: $H_w[A]$, $H_w[A_\star]$ の符号関数
(H_w: Hermitian Wilson–Dirac operator)



Properties of $\mathcal{D}_\chi$ [Grabowska–Kaplan 2016]

$$a\mathcal{D}_\chi = 1 + \gamma_5 \left[1 - (1 - \epsilon_\star) \frac{1}{\epsilon\epsilon_\star + 1} (1 - \epsilon) \right],$$

$$\gamma_5 H_w = \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu + \nabla^*_\mu) - \frac{1}{2} a \nabla_\mu \nabla^*_\mu - m.$$

- $\mathcal{D}_\chi$ の連続極限

$$a\mathcal{D}_\chi = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu D_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu D_{\star\mu} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(a),$$

ここで $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, $D_{\star\mu} = \partial_\mu + A_{\star\mu}$.
ツリーレベルでは ψ_R は A_μ と decouple する

- Ginsparg–Wilson 関係式

$$\gamma_5 \mathcal{D}_\chi + \mathcal{D}_\chi \gamma_5 = a\mathcal{D}_\chi \gamma_5 \mathcal{D}_\chi.$$

$$\because)\ \epsilon^2 = \epsilon_\star^2 = 1,\ \left[1 - (1 - \epsilon_\star) \tfrac{1}{\epsilon\epsilon_\star + 1} (1 - \epsilon) \right]^2 = 1.$$

この定式化は Ginsparg–Wilson 関係式から従う良い性質を持つ

Fermion number anomaly [Okumura–Suzuki 2016]

- Fermion number $U(1)$

$$\psi_{L} \to e^{i\theta}\,\psi_{L}, \quad \bar{\psi}_{L} \to e^{-i\theta}\,\bar{\psi}_{L}.$$

- ψ_L の fermion number anomaly

$$\mathcal{A}_L^{(a)}(x) \equiv \langle \partial_\mu j_{L\mu}(x) \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\gamma_5 a \mathcal{D}_\chi(x,x).$$

  - ψ_L, ψ_R を同時に回すと、$\mathcal{A}_L^{(a)} + \mathcal{A}_R^{(a)} = 0$.
- 現象論的示唆... strong CP, baryogenesis, dark matter

  (Talk by Okumura, 3/20 20pA22 14:45∼)
- Okumura–Suzuki の予想（トポロジカルチャージの議論より）

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{A}_L^{(a)}(x) = -\frac{1}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(x) + F_{\star\mu\nu}(x)F_{\star\rho\sigma}(x)\right].$$

- しかし、本当は非常に複雑 ⇒ abrupt transition の問題？

Calculation... (Mathematica, NCAlgebra)

次のように変形し、

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5\mathcal{D}_\chi(x,x) = \sum_y \mathrm{tr}\,\gamma_5\mathcal{D}_\chi(x,y)\delta_{y,x} = \sum_y \mathrm{tr}\,\gamma_5\mathcal{D}_\chi(x,y)\int_p e^{ip(y-x)/a},$$

平面波 $e^{ipy/a}$ を左側に移動する：

$$\sum_y aH_w(x,y)[A]e^{ipy/a}f(y) = e^{ipx/a}\gamma_5\sum_y\Big[i(\not{s}-ia\not{Q})-aR-c\Big](x,y)\,f(y),$$

where $\quad s_\mu = \sin p_\mu, \quad c_\mu = \cos p_\mu, \qquad c = \sum_\mu(c_\mu - 1) + ma, \quad t = \sum_\mu s_\mu^2 + c^2,$

$$Q_\mu = \tfrac{1}{2}(e^{ip_\mu}\nabla_\mu + e^{-ip_\mu}\nabla^*_\mu), \qquad R = \tfrac{1}{2}\sum_\mu(e^{ip_\mu}\nabla_\mu - e^{-ip_\mu}\nabla^*_\mu).$$

Q_μ, R で表現し、a で展開すると、 (途中計算 $\sim\mathcal{O}(10^3)$ 項)

$$\mathcal{A}_L^{(a)} = \underbrace{\frac{1}{a^2}\left[\int_p \frac{c^2-t}{t^2}\,\mathrm{tr}[R,R_\star] + (4\ \text{terms})\right]_{\text{parity-even}} + \frac{1}{a}\,[\mathcal{O}(a)]_{\text{parity-even}}}_{\to\mathcal{O}(a^2)\ \because)\ \mathrm{tr}\,T^a=0}$$

$$+\,a^0\left[\int_p \frac{c}{16t^{5/2}}\,\mathrm{tr}\,\gamma_5\not{Q}\not{Q}\not{Q}\not{Q}_\star + (\sim 30\ \text{terms})\right]_{\text{parity-odd}} + a^0\,[(\sim 30\ \text{terms})]_{\text{parity-even}} + \mathcal{O}(a)$$

$$= \underline{a^0\frac{1}{4}\int_p \frac{\prod_\tau c_\tau}{t^{5/2}}\left(c + \sum_\lambda s_\lambda^2/c_\lambda\right)}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left[D_\mu D_\nu D_\rho D_{\star\sigma} + D_{\star\mu}D_\nu D_\rho D_\sigma + (4\ \text{terms})\right]_{\text{odd}}$$

$$+\,a^0[f_1(ma)D_\mu D_\mu D_\nu D_{\star\nu} + f_2(ma)D_\mu D_\nu D_\mu D_{\star\nu} + f_3(ma)D_\mu D_\nu D_\nu D_{\star\mu}$$

$$+\,f_4(ma)D_\mu D_\mu D_\mu D_{\star\mu} + (4\times 5\ \text{terms})]_{\text{even}} + \mathcal{O}(a)$$

Continuum limit of the fermion number anomaly

- 連続極限 ($\mathcal{D}_\rho \equiv \partial_\rho + [A_\rho, \cdot]$, $\mathcal{D}_{\star\rho} \equiv \partial_\rho + [A_{\star\rho}, \cdot]$)

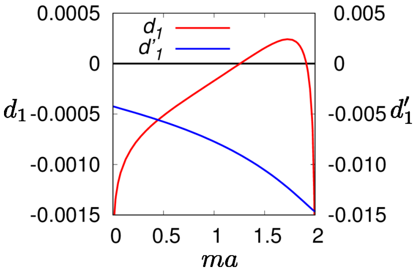
$$\lim_{a\to 0} \mathcal{A}_L^{(a)} = -\frac{1}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Big\{\mathrm{tr}\left[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + F_{\star\mu\nu}F_{\star\rho\sigma}\right] - \tfrac{2}{3}\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left[C_\nu\mathcal{D}_\rho C_\sigma + C_\nu\mathcal{D}_{\star\rho}C_\sigma\right]\Big\} + d_1\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left[C_\mu C_\nu^2\right] + \underbrace{d_1'\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left[C_\mu^3\right]}_{\text{Lorentz symmetry violating}}.$$

- ここで、

$$C_\mu \equiv A_{\star\mu} - A_\mu$$

はゲージ変換の下で adjoint 表現として変換する:

$$C_\mu \to \Omega C_\mu \Omega^\dagger.$$



- C_μ によりゲージ不変な様々な項が可能

Discussion

- Fermion number $U(1)$ に対して、d_1, d_1' 項はゲージアノマリー係数に比例する

$$\left.\begin{array}{c}\partial_\mu \operatorname{tr}[C_\mu C_\nu^2] = \frac{1}{2}\partial_\mu \operatorname{tr}[C_\mu\{C_\nu, C_\nu\}] \\ \partial_\mu \operatorname{tr}\left[C_\mu^3\right] = \frac{1}{2}\partial_\mu \operatorname{tr}[C_\mu\{C_\mu, C_\mu\}]\end{array}\right\} \propto \operatorname{tr} T^a\{T^b, T^c\}$$

アノマリーフリー $\to = 0$. ローレンツ対称性は回復する

$\Rightarrow$ ローレンツ対称性とゲージアノマリーが関係する

- より一般化した fermion number $U(1)$ では、
アノマリーフリー $\to \neq 0$ [Grabowska–Kaplan 2016].
    - e.g.) $SU(5)$ カイラルゲージ理論では $\bar{\mathbf{5}}$ は電荷 $Q = 3$、$\mathbf{10}$ は $Q = -1$ を運ぶ．このとき $\partial_\mu \operatorname{tr}\left[QC_\mu^3\right] \neq 0$.

$\Rightarrow$ Abruptness is pathological!?

Summary

- Grabowska–Kaplan の chiral overlap operator に基づき fermion number anomaly を計算した
  - 連続極限でローレンツ対称性が回復しない
  - C_μ により（ゲージ不変性を保ったまま)、非常に複雑な形になる

  これは abrupt transition の問題を示唆すると考えられている

- Gradual flow の場合に正しいと期待されている
  - Gradual flow での解析
  - ψ_R が A_μ に couple するのか、decouple するのか
  - ゲージアノマリーがあるときに、理論が正しく破綻するか
- まだ調べるべき課題も多い

Backup: DW fermion

- Action of DW fermion

$$S = a^4 \sum_{x,s} \bar{\psi}_s(x) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{5} \gamma_\mu (\nabla_{\mu,s} + \nabla^*_{\mu,s}) - \frac{a}{2} \sum_{\mu=1}^{5} \nabla_{\mu,s} \nabla^*_{\mu,s} - m \right\} \psi_s(x).$$

- Forward and backward gauge covariant lattice derivative

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu f(x) &= \frac{1}{a} \left[U(x,\mu) f(x + a\hat{\mu}) - f(x) \right] \\
&= \left[D_\mu + \frac{a}{2} D_\mu D_\mu + \frac{a^2}{6} D_\mu D_\mu D_\mu + \mathcal{O}(a^3) \right] f(x), \\
\nabla^*_\mu f(x) &= \frac{1}{a} \left[f(x) - U(x - a\hat{\mu}, \mu)^\dagger f(x - a\hat{\mu}) \right] \\
&= \left[D_\mu - \frac{a}{2} D_\mu D_\mu + \frac{a^2}{6} D_\mu D_\mu D_\mu + \mathcal{O}(a^3) \right] f(x).
\end{aligned}$$

- Link variable

$$U(x,\mu)[A] = P \exp \left[a \int_0^1 dt \, A_\mu(x + ta\hat{\mu}) \right].$$

Backup: Transfer matrix

- Transfer matrix

$$T(s) = \begin{pmatrix} B_s^{-1} & -B_s^{-1}C_s \\ -C_s^\dagger B_s^{-1} & B_s + C_s^\dagger B_s^{-1} C_s \end{pmatrix},$$

where

$$B_s = 1 + a_5\left(-\frac{a}{2}\nabla_{\mu,s}\nabla^*_{\mu,s} - m\right), \qquad C_s = a_5\sigma_\mu\frac{1}{2}(\nabla_{\mu,s} + \nabla^*_{\mu,s}).$$

Backup: Chiral overlap operator

- Chiral overlap operator

$$a\mathcal{D}_\chi = 1 + \gamma_5 \left[1 - (1 - \epsilon_\star) \frac{1}{\epsilon\epsilon_\star + 1} (1 - \epsilon) \right].$$

- Sign functions

$$\epsilon = \frac{H_w[A]}{\sqrt{H_w[A]^2}}, \quad \epsilon_\star = \frac{H_w[A_\star]}{\sqrt{H_w[A_\star]^2}}.$$

- Hermitian Wilson–Dirac operator

$$\gamma_5 H_w = \frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^*) - \frac{1}{2} a \nabla_\mu \nabla_\mu^* - m.$$

Backup: Lattice modifications

- Modified γ_5

$$\hat{\gamma}_5 \equiv \gamma_5(1 - a\mathcal{D}_\chi),$$

which satisfies

$$(\hat{\gamma}_5)^2 = 1, \quad \mathcal{D}_\chi \hat{\gamma}_5 = -\gamma_5 \mathcal{D}_\chi.$$

- Using modified chiral projection operators

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\gamma}_5),$$

the chiral components are defined as

$$\hat{P}_- \psi_L(x) = \psi_L(x), \qquad \bar{\psi}_L P_+ = \bar{\psi}_L(x),$$
$$\hat{P}_+ \psi_R(x) = \psi_R(x), \qquad \bar{\psi}_R P_- = \bar{\psi}_R(x).$$

Backup: Properties of fermion number anomaly

- Decompose $\mathcal{A}_L^{(a)}$ into parity-odd and parity-even parts: $\mathcal{A}_L^{(a)\text{odd}}$, $\mathcal{A}_L^{(a)\text{even}}$.

$$\mathcal{A}_L^{(a)\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{2}{\epsilon+\epsilon_\star}(x,x), \quad \mathcal{A}_L^{(a)\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\epsilon-\epsilon_\star)\frac{1}{\epsilon+\epsilon_\star}(x,x).$$

- Symmetry under the exchange of A and $A_\star$

$$\mathcal{A}_L^{(a)\text{odd}}[A_\star, A] = +\mathcal{A}_L^{(a)\text{odd}}[A, A_\star], \quad \mathcal{A}_L^{(a)\text{even}}[A_\star, A] = -\mathcal{A}_L^{(a)\text{even}}[A, A_\star].$$

- When $A_\star = A$, $\mathcal{A}_L^{(a)}[A,A] = \operatorname{tr}\epsilon(x,x)/2$.
- Its integral over spacetime is [Okumura–Suzuki]

$$a^4 \sum_x \mathcal{A}_L^{(a)}(x) = \frac{1}{2} a^4 \sum_x \operatorname{tr}\epsilon(x,x),$$

and [Kikukawa–Yamada, Fujikawa, Adams, Suzuki]

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}\epsilon(x,x) \xrightarrow{a\to 0} -\frac{1}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}.$$

Coefficients d_1, d_1'

$$d_1(ma) = \frac{1}{128}\int_p \frac{1}{t} c_\rho c_\sigma + \frac{1}{8}\int_p \frac{1}{t^2} - \frac{1}{32}\int_p \frac{1}{t^2} s_\rho^2 s_\rho^2 + \frac{3}{16}\int_p \frac{1}{t^2}(c - c_\rho)c_\rho + \frac{3}{64}\int_p \frac{1}{t^2}(c - c_\rho)(c - c_\sigma)c_\rho c_\sigma,$$

$$d_1'(ma) = -\frac{1}{12}\int_p \frac{1}{t} - \frac{1}{128}\int_p \frac{1}{t} c_\rho c_\sigma + \frac{1}{192}\int_p \frac{1}{t}(c - c_\rho)c_\rho + \frac{1}{32}\int_p \frac{1}{t^2} s_\rho^2 s_\sigma^2 + \frac{3}{64}\int_p \frac{1}{t^2}(c - c_\rho)^2 - \frac{3}{64}\int_p \frac{1}{t^2}(c - c_\rho)(c - c_\sigma)c_\rho c_\sigma,$$