

# $\mathcal{N} = 2$ ランダウ・ギンツブルグ模型 の数値シミュレーション

森川億人

共同研究者：鈴木博

九州大学

2017/9/14 日本物理学会 2017 年秋季大会 @宇都宮大学

# Introduction

- CFT の Lagrangian による表現 : Landau–Ginzburg (LG) の記述
  - ▶ LG 模型のくりこみ群の固定点 → CFT
- 2D  $\mathcal{N} = (2, 2)$  Wess–Zumino ( $\mathcal{N} = 2$  WZ) 模型の IR 極限  
⇒  $\mathcal{N} = 2$  SCFT [Vafa–Warner 1988, Howe–West 1989, Witten 1993,...]
  - ▶ 弦の世界面上の  $\mathcal{N} = 2$  SCFT と Calabi–Yau (CY) コンパクト化
  - ▶ CY 上の  $\sigma$  模型と LG 模型 [Greene–Vafa–Warner 1989, Witten 1993]
- IR での強結合・IR 発散 → 非摂動論的研究
  
- SUSY を保つ数値計算手法 [Kadoh–Suzuki 2009]
- 超ポテンシャル  $\Phi^3$  でのスケーリング次元・中心電荷の計算 [Kamata–Suzuki 2010]
  - ▶ cf.  $\Phi^3$  に対する格子計算 [Kawai–Kikukawa 2009].
  
- $\Phi^3$ ,  $\Phi^4$  でスケーリング次元・中心電荷の計算

# Supersymmetric formulation [Kadoh–Suzuki 2009]

- 大きさ  $L \times L$  の連続空間  $\rightarrow$  離散的運動量

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2} \sum_p e^{ipx} \varphi(p),$$

$$p_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu \quad (n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

## 運動量空間で定式化

- カットオフ  $\Lambda = \pi/a$  ( $a$ : 「格子間隔」)

$$p^2 \leq \Lambda^2$$

▶  $L/a$ : 偶数

- 格子正則化ではない  $\rightarrow$  SUSY、並進対称性、R 対称性の保存
- 局所性の問題 (摂動論的には  $\Lambda \rightarrow \infty$  で回復する)

# WZ model and Nicolai map [Nicolai 1980]

- 補助場を積分し、複素スカラー場  $A$  とフェルミオン  $\psi$  の作用は

$$S = S_B + \frac{1}{L^2} \sum_p \left[ (\bar{\psi}_1, \psi_2)(-p) \begin{pmatrix} 2ip_z & W''(A)^{**} \\ W''(A)^* & 2ip_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(p) \right].$$

ここで、\* は畳み込み、

$$S_B = \frac{1}{L^2} \sum_p N(p)^* N(p), \quad N(p) \equiv 2ip_z A(p) + W'(A)^*(p).$$

- フェルミオンの積分、変数変換  $A(p), A^*(p) \rightarrow N(p), N^*(p)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \prod_{p^2 \leq \Lambda^2} [dA(p) dA^*(p)] e^{-S_B} \det \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \\ &= \int \prod_{p^2 \leq \Lambda^2} [dN(p) dN^*(p)] e^{-S_B} \sum_i \text{sign} \det \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}. \end{aligned}$$

- ▶  $A_i(p)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) は  $N(p)$  に対する解
- ▶ Gauss 関数 (Nicolai 写像)

# Algorithm

- 1 Gauss 乱数  $(N(p), N^*(p))$  を生成
- 2 方程式

$$2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p) = 0$$

の**全ての解**  $A(p)_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を数値的に求める

- 3 次の和を計算

$$\sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i}, \quad \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

- 4 1~3 のステップを繰り返して平均をとる  $\rightarrow \langle \mathcal{O} \rangle$

- 分配関数 (Witten 指数  $\Delta$ )

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

$\{A_i(p)\}_N$  に対する符号  $(+\dots+ - \dots -) \Rightarrow \Delta_N = n_+ - n_-$

# Classification of configurations

- $W(\Phi) = \lambda \Phi^k / k$ ,  $a\lambda = 0.3$  ( $\Delta = k - 1$ )
- Newton 法による数値解；収束する初期配位  $\times 100$   
 $[2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p)] / \sqrt{\sum |N(q)|^2} - (*)$

\*  $k = 3$  ( $\Delta = 2$ )  
 $L/a = 8-34$ : 640 confs.

\*  $k = 4$  ( $\Delta = 3$ )  
 $L/a = 8-22$ : 320 confs.

$L/a$	36
$(++)_2$	1248
$(+++-)_2$	32
$\Delta$	2.0
Max norm(*)	$1.3 \times 10^{-15}$

$L/a$	24
$(+++)_3$	1253
$(++++-)_3$	24
$(+++++--)_3$	2
$(++++)_4$	1
$\Delta$	3.001(1)
Max norm(*)	$1.4 \times 10^{-15}$

- $\Phi^4$  の方が解くことが難しく、 $\Delta$  が 3 からずれることがある

# Correlation function

- スケーリング次元や中心電荷の計算
- 2点関数

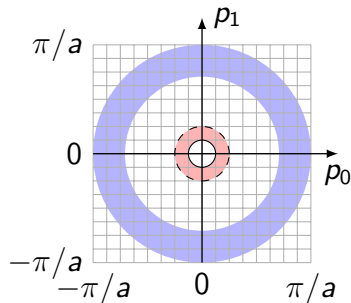
$$\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle = L^2 \int d^2x e^{-ipx} \langle \varphi_1(x) \varphi_2(0) \rangle$$

- SCFT: スカラー場  $A(x)$  や超カレント  $S_z^\pm(x)$  の2点関数

$$\langle A(x) A^*(0) \rangle \propto 1/z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}, \quad \langle S_z^+(x) S_z^-(0) \rangle = 2c/3z^3.$$

IR での  $\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle$  の振る舞い  
⇒ スケーリング次元  $h + \bar{h}$   
中心電荷  $c$

- $\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle$  のフィッティング
  - ▶ IR:  $2\pi/L \leq |p| < 2\pi/L \times 2$
  - (UV: 自由 SCFT)



# Scaling dimension

$$\langle A(p)A^*(-p) \rangle \sim 1/(p^2)^{1-h-\bar{h}}$$

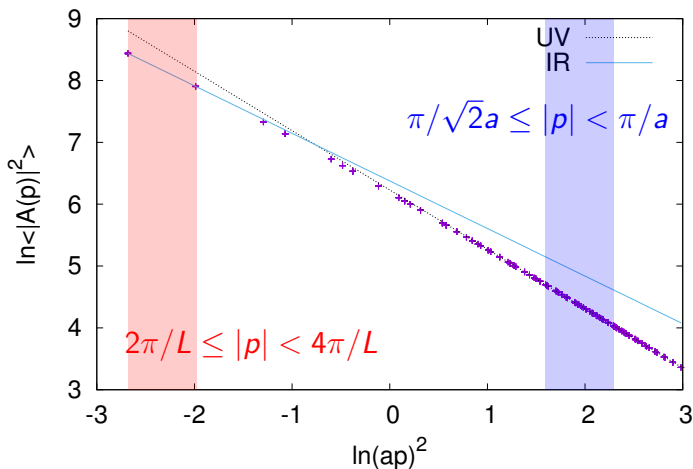


Figure:  $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$



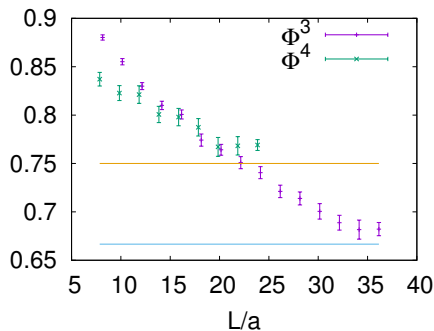
# Scaling dimension $h + \bar{h}$

- $\Phi^3$ ,  $L/a = 36$

	$1 - h - \bar{h}$
IR	0.6822(68)
UV	0.979650(11)

- $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$

	$1 - h - \bar{h}$
IR	0.7669(64)
UV	0.95930(13)



- $L \rightarrow$  大につれて、 $1 - h - \bar{h}$  は SCFT での値に “近づく”
  - ▶  $\Phi^3$ :  $2/3 = 0.666\dots$ ,  $\Phi^4$ :  $3/4 = 0.75$  (UV  $\rightarrow$  1)

# Central charge

$$\langle S_z^+(p) S_z^-(-p) \rangle = L^2 i \pi c p_z^2 / 3 p_z$$

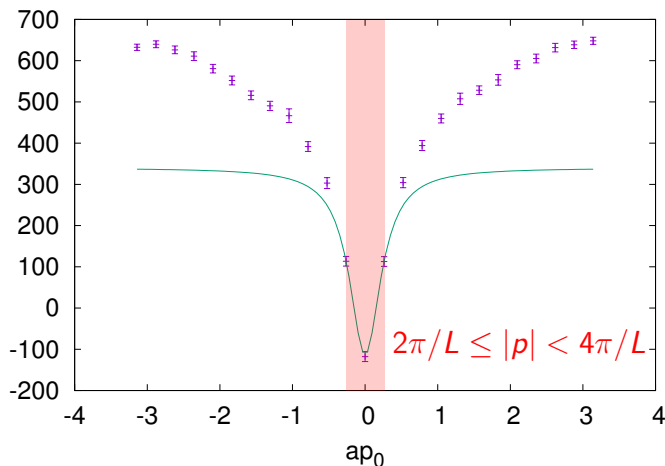


Figure:  $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$ ,  $ap_1 = \pi/12$ , Real part.

# Central charge

$$\langle S_z^+(p) S_z^-(-p) \rangle = L^2 i \pi c p_z^2 / 3 p_z$$

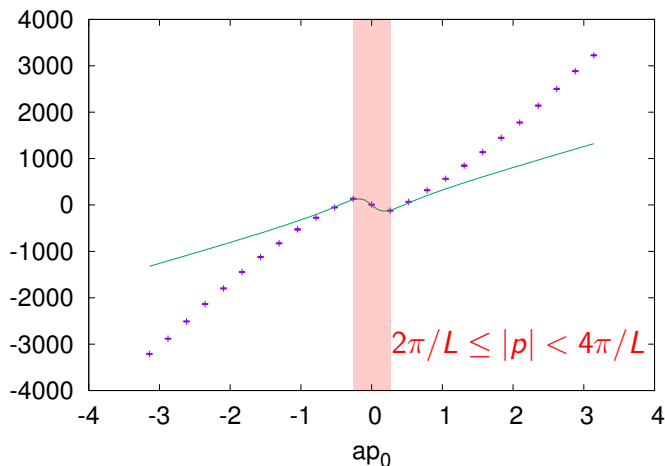


Figure:  $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$ ,  $ap_1 = \pi/12$ , Imaginary part.

# Central charge $c$

- $\Phi^3$ ,  $L/a = 36$

fitting region	$c$
IR	1.152(48)
$\frac{17\pi}{18} \leq a p  < \pi$	3.09901(73)

- $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$

fitting region	$c$
IR	1.435(44)
$\frac{11\pi}{12} \leq a p  < \pi$	2.9360(14)

- 中心電荷  $c$  は SCFT の値に “近い”
  - ▶  $\Phi^3$ : 1,  $\Phi^4$ : 1.5. (UV  $\rightarrow$  3)

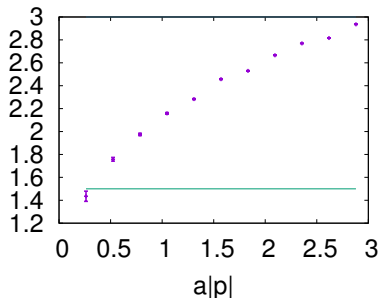


Figure:  $\Phi^4$ ,  $L/a = 24$ .

幅  $2\pi/L$  毎にフィット

# Summary

- 2D  $\mathcal{N} = 2$  WZ 模型の数値シミュレーション  
→ IR 極限 → 非摂動論的に現れる SCFT の検証
- $\Phi^k$  ( $k = 3, 4$ ) 理論でのスケーリング次元・中心電荷の数値計算

$k$	$1 - h - \bar{h}$		$c$	
3	0.6822(68)	[0.666...]	1.152(48)	[1]
4	0.7669(64)	[0.75]	1.435(44)	[1.5]

⇒ SCFT と “consistent” な結果

- Future work
  - ▶ 精度：より大きな空間、有限体積効果
  - ▶ エネルギー運動量テンソル、 $U(1)$  カレントの相関関数
  - ▶ 複数の超場 (ADE 分類)
  - ▶ Calabi–Yau 空間への応用

## Backup: Supercurrent

$$S_z^+(p) = \frac{4\pi}{L_0 L_1} \sum_q i(p-q)_z A(p-q) \bar{\psi}_2(q),$$

$$S_{\bar{z}}^+(p) = \frac{2\pi}{L_0 L_1} \sum_q W'(A)(p-q) \psi_1(q),$$

$$S_z^-(p) = -\frac{4\pi}{L_0 L_1} \sum_q i(p-q)_z A^*(p-q) \psi_2(q),$$

$$S_{\bar{z}}^-(p) = \frac{2\pi}{L_0 L_1} \sum_q W'(A)^*(p-q) \bar{\psi}_1(q).$$