

Numerical study of $N = 2$ Landau–Ginzburg models

森川億人

共同研究者：鈴木博

九大理

2018/3/23 物理学会 第 72 回年次大会 @東京理科大学

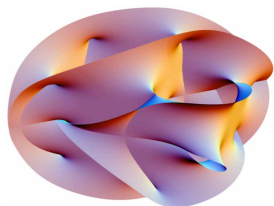
Motivation

- 重力の量子化の問題 \Rightarrow 超弦理論

- 超弦理論の特徴：

4D 時空 + 6D 空間

(Calabi–Yau (CY) 多様体)



CY 多様体

\Rightarrow 弦のなす 2D 世界面上には

2D $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論 (SCFT) が実現

- 一般の CY 多様体に対応する SCFT?? \rightarrow 計算できない

- 2D Landau–Ginzburg (LG) 模型 $\xrightarrow{\text{IR 極限}}$ SCFT

- LG 模型 \leftarrow (SCFT?) \rightarrow CY 多様体 [Greene–Vafa–Warner, Witten]

▶ 新しいアプローチ：LG 模型からの超弦理論の研究

LG model: 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ model

- 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino (WZ) 模型

$$(z, \bar{z} = x_0 \pm ix_1, \partial_z, \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 \mp i\partial_1))$$

$$S = \int d^2x \left[4\partial_z A^* \partial_{\bar{z}} A + W'(A)^* W'(A) \right. \\ \left. + (\bar{\psi}_1, \psi_2) \begin{pmatrix} 2\partial_z & W''(A)^* \\ W''(A) & 2\partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right]$$

- 超ポテンシャル $W(\Phi) = \frac{\lambda}{n} \Phi^n, \quad n \geq 3$

- $\mathcal{N} = 2$ SCFT のミニマル模型との対応 [Cappelli–Itzykson–Zuber '87...]

- ▶ 中心電荷 c とスケーリング次元 $h + \bar{h}$

$$c = \frac{3(n-2)}{n} = 1, 1.5, 1.8, \dots < 3,$$

$$h + \bar{h} = \frac{1}{n} \quad (1 - h - \bar{h} = 0.666\dots, 0.75, 0.8, \dots < 1)$$

Preceding numerical studies and today's talk

- IR での強結合・IR 発散 → 非摂動論的 (数值的) 研究
 - Nicolai 写像: 経路積分の重みを Gauss 関数にする変数変換
 - 超ポテンシャル $W(\Phi) = \Phi^3$ について
 - ① スケーリング次元 $h + \bar{h}$ の格子計算 [Kawai–Kikukawa 2009]
 - ② SUSY を保つ数値計算手法 [Kadoh–Suzuki 2009] を用いて、 $h + \bar{h}$ と中心電荷 c の計算 [Kamata–Suzuki 2010]
- ↓
- Kadoh–Suzuki の手法を $W = \Phi^3, \Phi^4$ へ適用 ($h + \bar{h}, c$)
 - 先行研究の改良・拡張
 - ① $h + \bar{h}$: UV での不定性の解消
 - ② c : エネルギー運動量テンソル (EMT) の 2 点関数の計算
-
- $W = \Phi^3, \Phi^4$ について、WZ 模型 \xrightarrow{IR} SCFT の証拠

Supersymmetric formulation [Kadoh–Suzuki 2009]

- 大きさ $L \times L$ の連続空間 \rightarrow 離散的な運動量空間で定式化

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2} \sum_p e^{ipx} \varphi(p), \quad p_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu. \quad (n_\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm L/2a)$$

- SUSY, 並進対称性等の保存、局所性の問題 ($a \rightarrow 0$ で回復)

- 2点関数

$$\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle = L^2 \int d^2x e^{-ipx} \langle \varphi_1(x) \varphi_2(0) \rangle$$

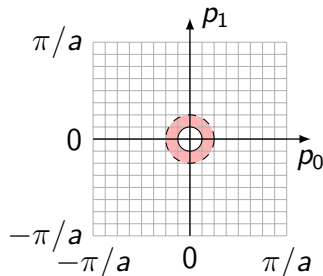
- 右辺 \rightarrow SCFT での 2点関数

$$\langle A(x) A^*(0) \rangle \propto 1/z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}},$$

$$\langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle = c/2z^4, \dots$$

- IR での $\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle$ の振る舞い

$$\Rightarrow h + \bar{h}, c$$



Scaling dimension

$$\langle A(p)A^*(-p) \rangle \sim 1/(p^2)^{1-h-\bar{h}}$$

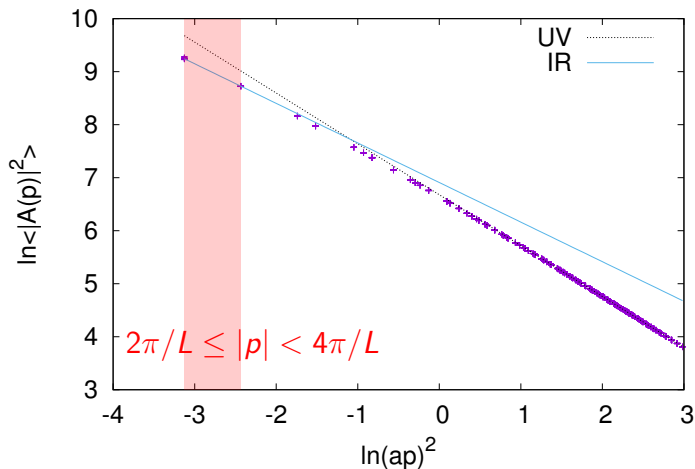


Figure: Φ^4 , $L/a = 30$, $a\lambda = 0.3$, 640 confs. (前回の発表: $L/a = 24$ まで)

Scaling dimension, $1 - h - \bar{h}$

- スケーリング次元

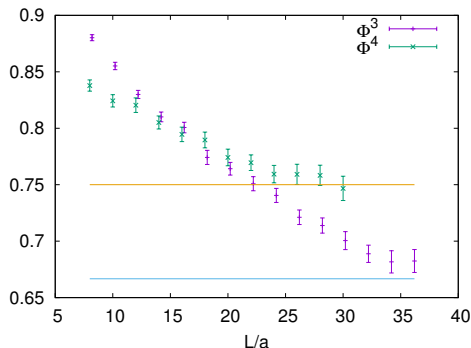
for $W = \Phi^n$ ($n = 3, 4$)

W	L/a	$1 - h - \bar{h}$
Φ^3	36	0.682(10)
Φ^4	30	0.747(11)

- ▶ Kawai–Kikukawa (Φ^3): 0.660(11)
- ▶ Kamata–Suzuki (Φ^3): 0.616(25)(13)

- $L \rightarrow$ 大につれて、 $1 - h - \bar{h}$ は SCFT での値に近づく

- ▶ $W = \Phi^3$: $1 - h - \bar{h} = 0.666 \dots$
- ▶ $W = \Phi^4$: $1 - h - \bar{h} = 0.75$



Central charge from a EMT correlator

$$\text{Real part of } \langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_z$$

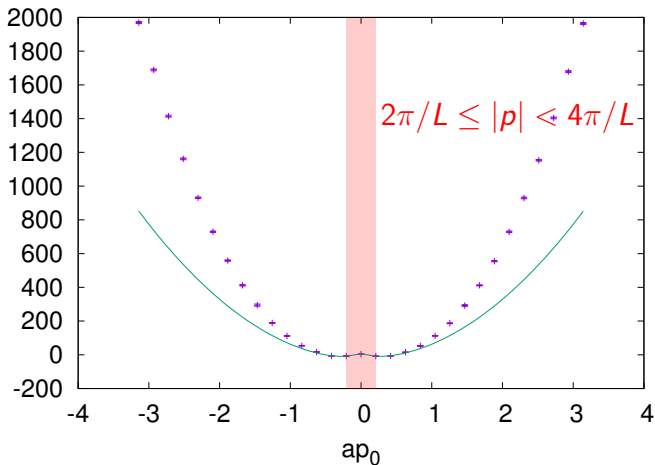


Figure: Φ^4 , $L/a = 30$, $ap_1 = \pi/15$, $a\lambda = 0.3$, 640 confs.

Central charge from a EMT correlator

$$\text{Imaginary part of } \langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_{\bar{z}}$$

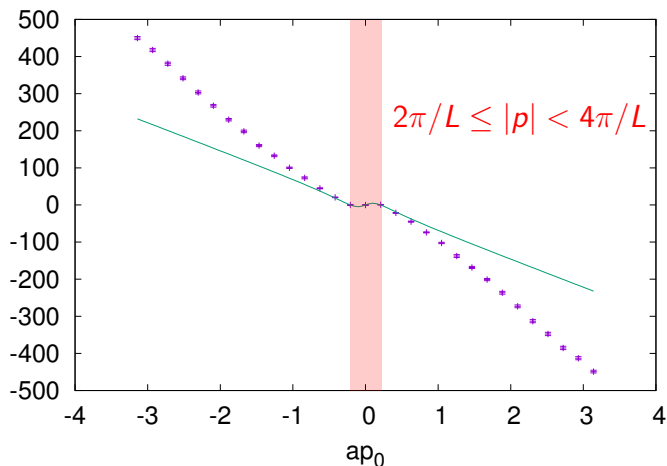


Figure: Φ^4 , $L/a = 30$, $ap_1 = \pi/15$, $a\lambda = 0.3$, 640 confs.

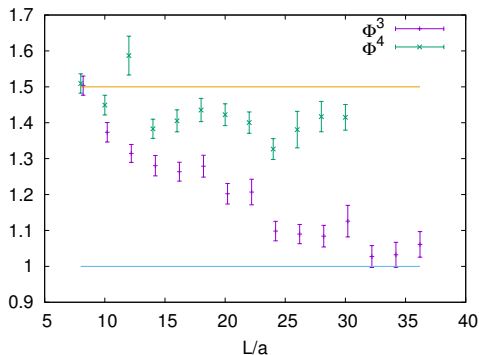
Central charge, c

- 中心電荷

for $W = \Phi^n$ ($n = 3, 4$)

W	L/a	c
Φ^3	36	1.061(36)
Φ^4	30	1.415(36)

- ▶ Kamata–Suzuki
(Φ^3): 1.09(14)(31)



- $L \rightarrow$ 大につれて、 c は SCFT での値に近づく

- ▶ $W = \Phi^3$: $c = 1$
- ▶ $W = \Phi^4$: $c = 1.5$

Summary

- 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ 模型の数値シミュレーション
IR 極限 \rightarrow 非摂動論的に現れる SCFT の検証
- スケーリング次元・中心電荷 (EMT)

W	$1 - h - \bar{h}$		c	
Φ^3	0.682(10)	0.666...	1.061(36)	1
Φ^4	0.747(11)	0.75	1.415(36)	1.5

\implies SCFT と consistent な結果

- 今後の課題
 - ▶ $W = \Phi^5$, 精度 ($L \rightarrow$ 大、有限体積効果)
 - ▶ 複数の超場 (ADE 分類)
 - ▶ 弦理論への応用 (北海道大学 鈴木久男氏との共同研究)

Backup: SUSY Ward–Takahashi identity

$$p_1 \langle A(p)A^*(-p) \rangle = \text{Re} \langle \psi_1(p)\bar{\psi}_1(-p) \rangle$$

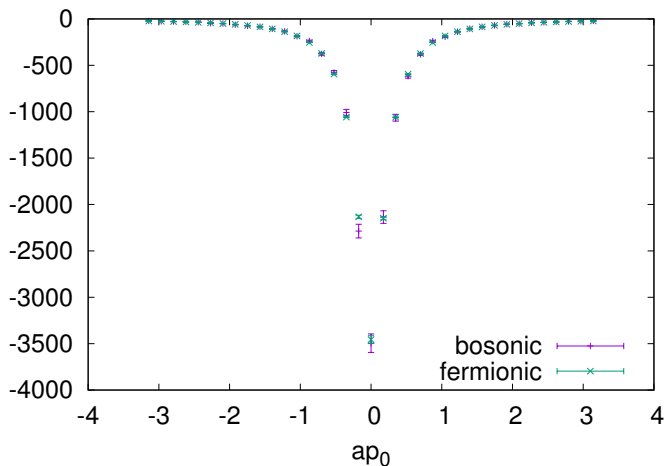


Figure: Φ^3 , $L/a = 36$, $ap_1 = 2\pi/L = \pi/18$

Backup: SUSY Ward–Takahashi identity

$$\rho_1 \langle A(p)A^*(-p) \rangle = \text{Re} \langle \psi_1(p)\bar{\psi}_1(-p) \rangle$$

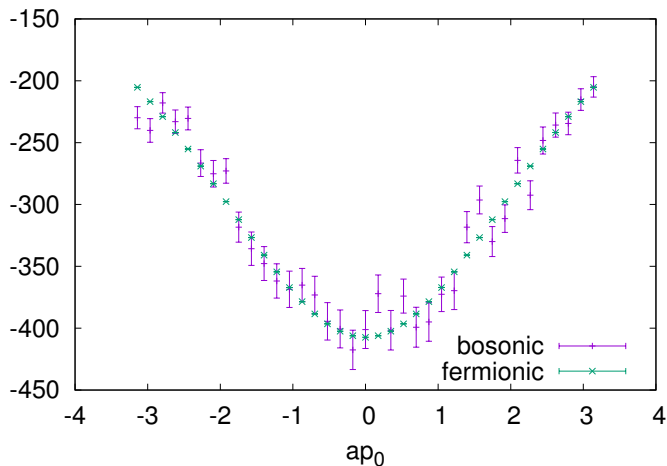


Figure: Φ^3 , $L/a = 36$, $ap_1 = \pi$

Backup: WZ model and Nicolai map [Nicolai 1980]

- 複素スカラー A とフェルミオン ψ の作用

$$S = S_B + \frac{1}{L^2} \sum_p \left[(\bar{\psi}_1, \psi_2)(-p) \begin{pmatrix} 2ip_z & W''(A)^{**} \\ W''(A)^* & 2ip_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(p) \right],$$

ここで、 $p_z = \frac{1}{2}(p_0 - ip_1)$, $*$ は畳み込み、

$$S_B = \frac{1}{L^2} \sum_p N(p)^* N(p), \quad N(p) \equiv 2ip_z A(p) + W'(A)^*(p).$$

- フェルミオンの積分、変数変換 $A(p), A^*(p) \rightarrow N(p), N^*(p)$.

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{|p_\mu| \leq \Lambda} [dN(p)dN^*(p)] e^{-S_B} \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}.$$

- ▶ $A_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) は $N(p)$ に対する解
- ▶ **Gauss 関数** (Nicolai 写像) \Rightarrow Gauss 乱数を生成

Backup: Algorithm

- 1 Gauss 乱数 $(N(p), N^*(p))$ を生成
- 2 方程式

$$2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p) = 0$$

の**全ての**解 $A(p)_i$ ($i = 1, 2, \dots$) を数値的に求める

- 3 次の和を計算

$$\sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i}, \quad \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

- 4 (1)~(3) を繰り返して平均をとる ($W(\Phi) = \Phi^n$)

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle = n - 1,$$
$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

Backup: Algorithm

(利点)

- 生成された配位 $N(p)$ に自己相関がない
- 「正しく規格化された」分配関数 Δ

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

$W = \Phi^n$ のときこれは Witten 指数 $n - 1$ に等しい

- 符号問題がない

(欠点)

- 幾つの解 $A(p)_i$ があるのか？
 $\{A(p)_i\}_N$ の符号： $(+\cdots+-\cdots-)$ $\Rightarrow \Delta_N = n_+ - n_-$
- 超対称な境界条件のみ

Backup: Classification of configurations

- $W(\Phi) = \lambda\Phi^n/n$ ($\Delta = n - 1$), $a\lambda = 0.3$
- Newton 法による数値解
- $W = \Phi^3$ ($\Delta = 2$): $L/a = 8-36$, 640 confs.

L/a	28	30	32	34	36
Δ	2	2	2	2	2
core-day	27	40	58	81	112

- $W = \Phi^4$ ($\Delta = 3$): $L/a = 8-30$, 640 confs.

L/a	24	26	28	30
Δ	3	3.002(2)	3.006(3)	3.002(3)
core-day	122	209	345	538

- Φ^4 の場合でも $\Delta \cong 3$

Backup: Susceptibility of scalar field

- 従来の $h + \bar{h}$ の計算方法：スカラー場の感受率

$$\chi_\phi = \frac{1}{a^2} \int d^2x \langle A(x)A^*(0) \rangle \propto (L^2)^{1-h-\bar{h}}$$

→ L 依存性（遠距離/IR の情報）から読み取る

- 計算の改善： $x \approx 0$ (UV 領域) の影響を取り除く

$$|x| \sim \lambda^{-1} \text{ [Kawai-Kikukawa (格子計算)]}$$

- χ_ϕ の L 依存性は取り除いた小領域の大きさに依らないはず...

$$\int_{|x| < \lambda^{-1}} d^2x \cdots \Rightarrow \sum_{p_\mu} \cdots$$

- UV カットオフにより運動量の和に L の値が寄与する

$h + \bar{h}$ は様々な値を取り得る

Energy-momentum tensor

- Kamata–Suzuki による中心電荷の計算：超カレントの 2 点関数

- ▶ EMT の計算：誤差（と具体形）の問題

- EMT の具体形

要請： $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $\sum_{\mu} T_{\mu\mu} \rightarrow 0$ for $W(\Phi) = 0$ (UV)

$$\begin{aligned} T_{zz}(x) &= -4\pi\partial_z A^*(x)\partial_z A(x) - \pi\psi_2(x)\partial_z\bar{\psi}_2(x) + \pi\partial_z\psi_2(x)\bar{\psi}_2(x) \\ &= [Q_2 S_z^+(x) - \bar{Q}_2 S_z^-(x)] / 4 \end{aligned}$$

- SUSY WT 恒等式より

$$\langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = \frac{ip_z}{8} \langle S_z^+(p) S_z^-(-p) + S_z^-(p) S_z^+(-p) \rangle$$

Backup: C-function

- General forms ($\tau = \ln z\bar{z}$)

$$\begin{aligned}\langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle &= F(\tau)/z^4, \\ \langle T_{zz}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= G(\tau)/4z^3\bar{z}, \\ \langle T_{z\bar{z}}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= H(\tau)/z^2\bar{z}^2.\end{aligned}$$

- Conservation laws and reflection positivity imply

$$\frac{d}{d\tau}(2F - G - 3H/8) \leq 0.$$

- Zamolodchikov's C-function:

$$C = 2F - G - \frac{3}{8}H.$$

Monotonically decreasing function along RG flow $\rightarrow c$.

Backup: C-function (EMT)

$$\langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_{\bar{z}}$$

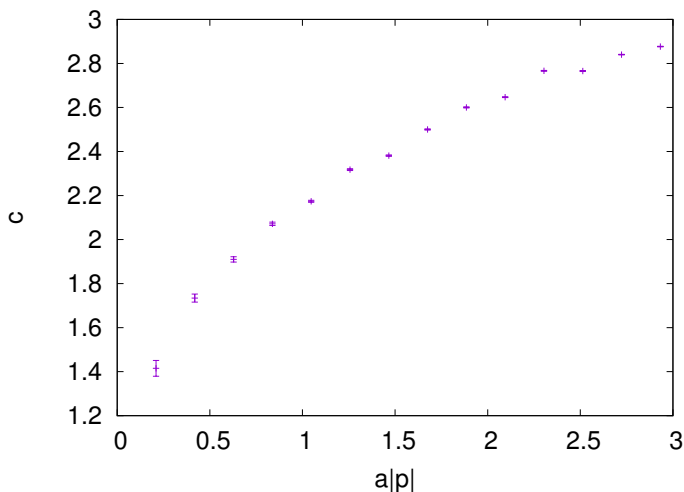


Figure: Φ^4 , $L/a = 30$. Main part of Zamolodchikov's C-function.

Backup: Supercurrent

- The supercurrent is given by

$$S_z^+(p) = \frac{4\pi}{L_0 L_1} \sum_q i(p-q)_z A(p-q) \bar{\psi}_2(q),$$

$$S_z^-(p) = -\frac{4\pi}{L_0 L_1} \sum_q i(p-q)_z A^*(p-q) \psi_2(q),$$

with a requirement

$$S_z^+(p), S_z^-(p) \rightarrow 0 \quad \text{in the UV limit (free SCFT).}$$

- Two-point function of supercurrent S^\pm in SCFT

$$\langle S_z^+(z) S_z^-(0) \rangle = \frac{2c}{3z^3} \quad \Rightarrow \quad \langle S_z^+(p) S_z^-(-p) \rangle = L^2 \frac{i\pi c}{3} \frac{p_z^2}{p_{\bar{z}}}$$

Backup: Central charge from a supercurrent correlator

$$\text{Real part of } \langle S_z^+(p) S_z^-(-p) \rangle = L^2 i \pi c p_z^2 / 3 p_z$$

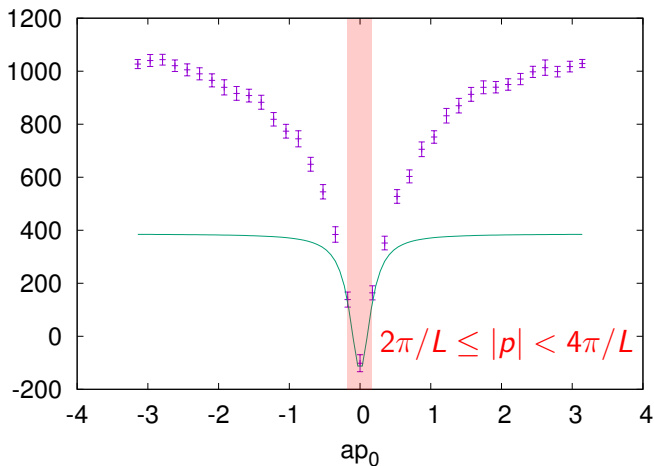


Figure: Φ^3 , $L/a = 36$, $ap_1 = \pi/18$

Backup: C -function (supercurrent)

$$\langle S_z^+(p) S_z^-(-p) \rangle = L^2 i\pi c p_z^2 / 3p_{\bar{z}}$$

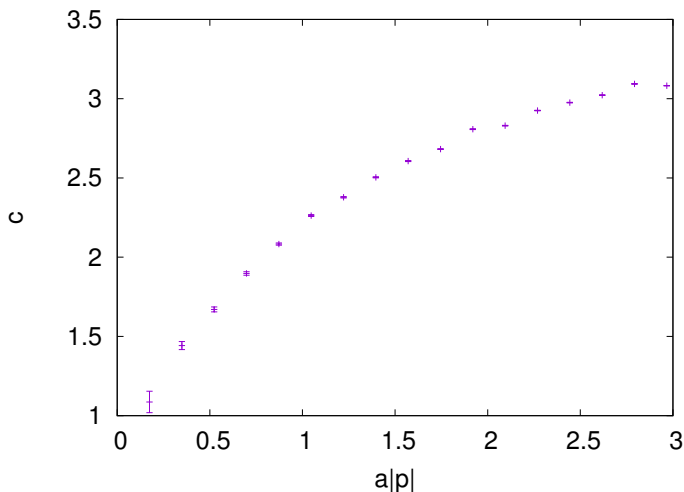
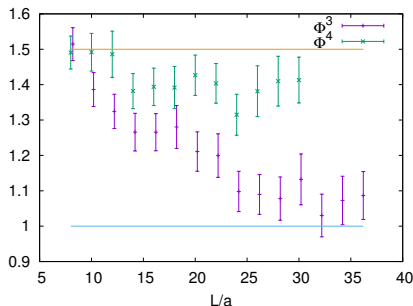


Figure: Φ^3 , $L/a = 36$. SUSY-analogue of Zamolodchikov's c -theorem.

Backup: Central charge, c

- Central charges for $W = \Phi^n$ ($n = 3, 4, 5$)

W	L/a	c
Φ^3	36	1.087(68)
Φ^4	30	1.413(65)



- ▶ Kamata–Suzuki (Φ^3): 1.09(14)(31)
- As $L \rightarrow$ large, c approaches expected values for SCFT
 - ▶ $W = \Phi^3$: $c = 1$
 - ▶ $W = \Phi^4$: $c = 1.5$
- Note: sometimes, $\chi^2/\text{d.o.f.}$ is quit different from unity.
 - ▶ Φ^4 : $\chi^2/\text{d.o.f.} = 4.606 \Rightarrow$ Energy-momentum tensor

Backup: Application to String theory

- LG/CY 対応 (例)

- ▶ 6D CY 多様体の定義式 (quintic in CP^4)

$$G(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5$$

- ▶ LG 模型の超ポテンシャル

$$W(\Phi) = \Phi_1^5 + \Phi_2^5 + \Phi_3^5 + \Phi_4^5 + \Phi_5^5$$

- ミニマル模型との対応表 (ADE 分類) に含まれない $W(\Phi)$
⇒ 対応する $G(z)$ コンパクト化を与える超弦理論が計算不可
- 簡単な例

$$W(\Phi) = \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 - \lambda\Phi_1\Phi_2\Phi_3$$