

複数超場を含む $\mathcal{N} = 2$ Landau–Ginzburg 模型 の数値的研究

森川億人

共同研究者：鈴木博

九大理

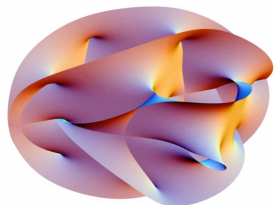
2018/9/15 物理学会 2018 年秋季大会@信州大学

Motivation

- 超弦理論 :

4D 時空 + 6D 空間

(Calabi–Yau (CY) 多様体)



CY 多様体

⇒ 弦のなす 2D 世界面上には

2D $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論 (SCFT) が実現

- 一般の CY 多様体に対応する SCFT?? → 計算できない
- 2D Landau–Ginzburg (LG) 模型 $\xrightarrow{\text{IR 極限}}$ SCFT
- LG 模型 \leftarrow (SCFT?) \rightarrow CY 多様体 [Greene–Vafa–Warner, Witten]
 - ▶ 新しいアプローチ : LG 模型からの超弦理論の研究

LG model: 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ model

- 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino (WZ) 模型 ($\Phi_I, I = 1, 2, \dots$)

$$S = \int d^2x \sum_I \left[4\partial_z A_I^* \partial_{\bar{z}} A_I + \frac{\partial W(\{A\})^*}{\partial A_I^*} \frac{\partial W(\{A\})}{\partial A_I} \right. \\ \left. + (\bar{\psi}_1, \psi_2)_I \sum_J \begin{pmatrix} 2\delta_{IJ}\partial_z & \frac{\partial^2 W(\{A\})^*}{\partial A_I^* \partial A_J^*} \\ \frac{\partial^2 W(\{A\})}{\partial A_I \partial A_J} & 2\delta_{IJ}\partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_J \right]$$

- $\mathcal{N} = 2$ SCFT のミニマル模型との対応 (ADE 分類 [Vafa–Warner])

代数	超ポテンシャル W	中心電荷 c
A_n	$\Phi_1^{n+1}, n \geq 1$	$3 - 6/(n+1)$
D_n	$\Phi_1^{n-1} + \Phi_1\Phi_2^2, n \geq 3$	$3 - 6/2(n-1)$
E_6	$\Phi_1^3 + \Phi_2^4$	$3 - 6/12$
E_7	$\Phi_1^3 + \Phi_1\Phi_2^3$	$3 - 6/18$
E_8	$\Phi_1^3 + \Phi_2^5$	$3 - 6/30$

Preceding numerical studies and today's talk

- IR での強結合・IR 発散 → 非摂動論的（数值的）研究
- A_2 ミニマル模型 ($W = \Phi^3$) について
 - ① スケーリング次元 $h + \bar{h}$ の格子計算 [Kawai–Kikukawa 2010]
 - ② SUSY を保つ数値計算手法 [Kadoh–Suzuki 2009] を用いて、 $h + \bar{h}$ と中心電荷 c の計算 [Kamata–Suzuki 2011]
- A_3 ミニマル模型 ($W = \Phi^4$) について
 - ① Kadoh–Suzuki に基づいて $h + \bar{h}$ と c の計算 [O.M.–Suzuki 2018]



- Kadoh–Suzuki の手法を（2つの超場で記述される） D_3 ($\Phi_1^2 + \Phi_1\Phi_2^2$), D_4 ($\Phi_1^3 + \Phi_1\Phi_2^2$), E_7 ($\Phi_1^3 + \Phi_1\Phi_2^3$) 模型へ適用し、中心電荷を決定する
- $A_2, A_3, D_3, D_4, E_6(\cong A_2 \otimes A_3), E_7$ について、WZ 模型 \xrightarrow{IR} SCFT の証拠

Supersymmetric formulation [Kadoh–Suzuki 2009]

- 大きさ $L \times L$ の連続空間 \rightarrow 離散的な運動量空間で定式化

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2} \sum_p e^{ipx} \varphi(p), \quad p_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu. \quad (n_\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm L/2a)$$

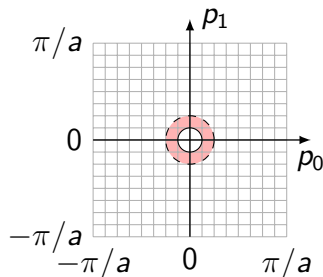
- SUSY, 並進対称性等の保存
 \rightarrow 超カレントやエネルギー運動量テンソルの構成が容易
- 2点関数

$$\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle = L^2 \int d^2x e^{-ipx} \langle \varphi_1(x) \varphi_2(0) \rangle$$

- 右辺 \rightarrow SCFT での 2点関数

$$\langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle = c/2z^4, \dots$$

- IR での $\langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle$ の振舞い
 $\implies c$



WZ model and Nicolai map [Nicolai 1980]

- 複素スカラー A とフェルミオン ψ の作用

$$S = S_B + \frac{1}{L^2} \sum_p \left[(\bar{\psi}_1, \psi_2)(-p) \begin{pmatrix} 2ip_z & W''(A)^{**} \\ W''(A)^* & 2ip_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(p) \right],$$

ここで、 $p_z = \frac{1}{2}(p_0 - ip_1)$, $*$ は畳み込み、

$$S_B = \frac{1}{L^2} \sum_p N(p)^* N(p), \quad N(p) \equiv 2ip_z A(p) + W'(A)^*(p).$$

- フェルミオンの積分、変数変換 $A(p), A^*(p) \rightarrow N(p), N^*(p)$.

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{|p_\mu| \leq \Lambda} [dN(p)dN^*(p)] e^{-S_B} \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}.$$

- ▶ $A_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) は $N(p)$ に対する解
- ▶ **Gauss 関数** (Nicolai 写像) \Rightarrow Gauss 乱数を生成

Algorithm

- 1 Gauss 乱数 $(N(p), N^*(p))$ を生成
- 2 方程式

$$2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p) = 0$$

の全ての解 $A(p)_i$ ($i = 1, 2, \dots$) を数値的に求める

- 3 次の和を計算

$$\sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i}, \quad \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

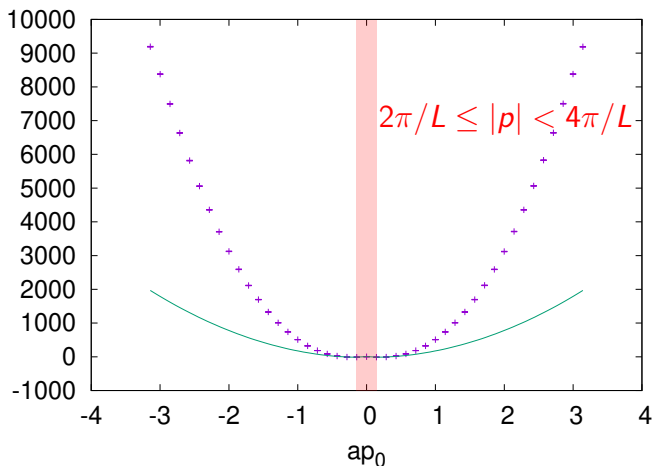
- 4 (1)~(3) を繰り返して平均をとる (A_n, D_n, E_n)

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle = n,$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

Central charge from a EMT correlator

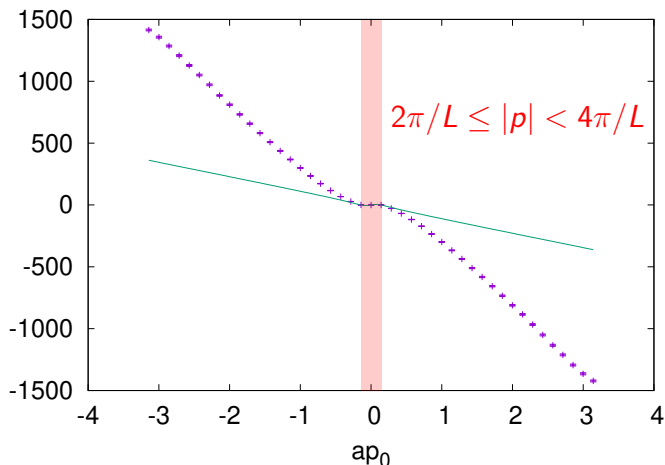
$$\text{Real part of } \langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_{\bar{z}}$$



$$D_3: W = \frac{\lambda_1}{2} \Phi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \Phi_1 \Phi_2^2 \text{ with } a\lambda_1 = a\lambda_2 = 0.3.$$
$$L/a = 44, ap_1 = \pi/22, 640 \text{ confs.}$$

Central charge from a EMT correlator

$$\text{Imaginary part of } \langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_{\bar{z}}$$



$$D_3: W = \frac{\lambda_1}{2} \Phi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \Phi_1 \Phi_2^2 \text{ with } a\lambda_1 = a\lambda_2 = 0.3.$$
$$L/a = 44, ap_1 = \pi/22, 640 \text{ confs.}$$

Central charge, c

- Parameters

$$D_3: \frac{\lambda_1}{2} \Phi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \Phi_1 \Phi_2^2$$

$$D_4: \frac{\lambda_1}{3} \Phi_1^3 + \frac{\lambda_2}{2} \Phi_1 \Phi_2^2$$

$$E_7: \frac{\lambda_1}{3} \Phi_1^3 + \frac{\lambda_2}{3} \Phi_1 \Phi_2^3$$

with $a\lambda_{1,2} = 0.3$.

640 confs.

- 中心電荷
(preliminary)

$$D_3 : c = 1.595(31)$$

$$D_4 : c = 2.211(70)$$

$$E_7 : c = 2.638(47)$$

	L/a	c	Expected value
D_3	16	2.141(31)	1.5
	24	1.867(28)	
	32	1.711(29)	
	40	1.591(32)	
	44	1.595(31)	
D_4	16	2.509(34)	2
	24	2.466(42)	
	32	2.202(40)	
	36	2.211(70)	
	\vdots		
E_7	8	2.964(36)	2.666...
	16	2.639(35)	
	24	2.638(47)	

“Effective central charge”

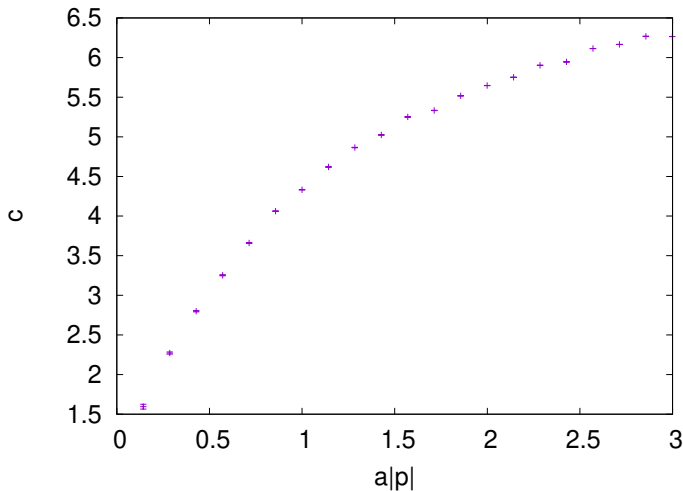


Figure: “Effective central charge” for D_3 , $L/a = 44$.
(Analogous to Zamolodchikov c -function)
UV: $c \approx 6$, N_Φ 個の超場 $\rightarrow c = 3N_\Phi$

Summary

- 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ 模型の数値シミュレーション
→ IR 極限 → 非摂動論的に現れる SCFT の数値的検証
- 中心電荷

	c	
D_3	1.595(31)	1.5
D_4	2.211(70)	2
E_7	2.638(47)	2.666...

⇒ SCFT と consistent な結果

- 典型的な模型 ($A_2, A_3, D_3, D_4, E_6, E_7$) の検証
- 今後の課題
 - ▶ $E_8(\cong A_2 \otimes A_4)$, A_4 : $W = \Phi^5$
 - ▶ 有限体積効果、局所性の回復
 - ▶ 弦理論への応用

Backup: Noether currents

- Energy-momentum tensor

$$T_{zz}(x) = -4\pi\partial_z A^*(x)\partial_z A(x) - \pi\psi_2(x)\partial_z\bar{\psi}_2(x) + \pi\partial_z\psi_2(x)\bar{\psi}_2(x)$$

with requirements: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $\sum_\mu T_{\mu\mu} \rightarrow 0$ in the UV limit (free SCFT)

- Supercurrent

$$S_z^+(p) = 4\pi\partial_z A(x)\bar{\psi}_2(x),$$

$$S_z^-(p) = -4\pi\partial_z A^*(x)\psi_2(x),$$

with requirements: $S_z^+(p), S_z^-(p) \rightarrow 0$ in the UV limit (free SCFT)

Backup: C-function

- General forms ($\tau = \ln z\bar{z}$)

$$\begin{aligned}\langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle &= F(\tau)/z^4, \\ \langle T_{zz}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= G(\tau)/4z^3\bar{z}, \\ \langle T_{z\bar{z}}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= H(\tau)/z^2\bar{z}^2.\end{aligned}$$

- Conservation laws and reflection positivity imply

$$\frac{d}{d\tau}(2F - G - 3H/8) \leq 0.$$

- Zamolodchikov's C-function:

$$C = 2F - G - \frac{3}{8}H.$$

Monotonically decreasing function along RG flow $\rightarrow c$.

Backup: Application to String theory

- LG/CY 対応 (例)

- ▶ 6D CY 多様体の定義式 (quintic in CP^4)

$$G(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5$$

- ▶ LG 模型の超ポテンシャル

$$W(\Phi) = \Phi_1^5 + \Phi_2^5 + \Phi_3^5 + \Phi_4^5 + \Phi_5^5$$

- ミニマル模型との対応表 (ADE 分類) に含まれない $W(\Phi)$
⇒ 対応する $G(z)$ コンパクト化を与える超弦理論が計算不可
- 簡単な例

$$W(\Phi) = \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 + \lambda\Phi_1\Phi_2\Phi_3$$