

Numerical study of the $\mathcal{N} = 2$ Landau–Ginzburg model

森川億人

共同研究者：鈴木博

九大・素粒子理論

2018/11/21 理研—九大ワークショップ @理研 神戸キャンパス

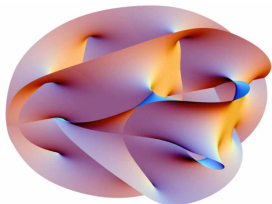
- O. M. and H. Suzuki, PTEP **2018** (2018) no. 8, 083B05 [arXiv:1806.10735 [hep-lat]].
- O. M., arXiv:1810.02519 [hep-lat].

Motivation

- 重力の量子化の問題 \Rightarrow 超弦理論

- 超弦理論の特徴：

4D 時空 + 観測できない程小さな 6D 空間
(Calabi-Yau (CY) 多様体)



CY 多様体

\Rightarrow 弦のなす 2D 世界面上には

2D $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論 (SCFT) が実現

- 一般の CY 多様体に対応する SCFT?? \rightarrow 計算できない

- 2D 超対称 Landau-Ginzburg (LG) 模型 $\xrightarrow{\text{低エネルギー (IR) 極限}}$ SCFT

- LG 模型 \leftarrow (SCFT?) \rightarrow CY 多様体 [Greene-Vafa-Warner, Witten]

- ▶ 新しいアプローチ：LG 模型からの超弦理論の研究

LG model: 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino model

- 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino (WZ) 模型 ($\Phi_I, I = 1, 2, \dots$)

$$S = \int d^2x \sum_I \left[4\partial_z A_I^* \partial_{\bar{z}} A_I + \frac{\partial W(\{A\})^*}{\partial A_I^*} \frac{\partial W(\{A\})}{\partial A_I} \right. \\ \left. + (\bar{\psi}_1, \psi_2)_I \sum_J \begin{pmatrix} 2\delta_{IJ}\partial_z & \frac{\partial^2 W(\{A\})^*}{\partial A_I^* \partial A_J^*} \\ \frac{\partial^2 W(\{A\})}{\partial A_I \partial A_J} & 2\delta_{IJ}\partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_J \right]$$

- $\mathcal{N} = 2$ SCFT のミニマル模型との対応 (ADE 分類 [Vafa–Warner])

代数	超ポテンシャル W	中心電荷 c
A_n	$\Phi_1^{n+1}, n \geq 1$	$3 - 6/(n+1)$
D_n	$\Phi_1^{n-1} + \Phi_1\Phi_2^2, n \geq 3$	$3 - 6/2(n-1)$
E_6	$\Phi_1^3 + \Phi_2^4$	$3 - 6/12$
E_7	$\Phi_1^3 + \Phi_1\Phi_2^3$	$3 - 6/18$
E_8	$\Phi_1^3 + \Phi_2^5$	$3 - 6/30$

Preceding numerical studies

- IR での強結合 → 非摂動論的 (数值的) 研究
 - SUSY の数値計算
 - ▶ 格子正則化は SUSY を破る
 - Nicolai 写像 : 経路積分の重みを Gauss 関数にする変数変換
 - A_2 模型 (Φ^3) について
 - ① スケーリング次元 $h + \bar{h}$ の格子計算 [Kawai–Kikukawa 2009]
 - ★ $1 - h - \bar{h} = 0.660(11)$ [exact value: 0.666... for SCFT]
 - ② SUSY を保つ数値計算手法 [Kadoh–Suzuki 2009] を用いて、 $h + \bar{h}$ と中心電荷 c の計算 [Kamata–Suzuki 2010]
 - ★ $1 - h - \bar{h} = 0.616(25)(13)$ [exact value: 0.666...]
 - ★ $c = 1.09(14)(31)$ [exact value: 1]
- A_2 (Φ^3) の対応関係の非摂動論的な証拠を与える

Today's talk...

- 本研究では、Kadoh-Suzuki の **SUSY を保つ** 手法をより高次の模型へ適用： A_2, A_3, D_3, D_4, E_7
 - ▶ スケーリング次元、中心電荷
- Kamata-Suzuki の数値計算の改良・拡張
 - ① スケーリング次元：高エネルギー (UV) での不定性の解消
 - ② 中心電荷：エネルギー運動量テンソル (EMT) の 2 点関数の計算
 - ★ 先行研究では超カレントの 2 点関数
- $A_2, A_3, D_3, D_4, E_6 (\cong A_2 \otimes A_3), E_7$ について、WZ 模型 \xrightarrow{IR} SCFT の非摂動的証拠

Supersymmetric formulation [Kadoh–Suzuki 2009]

- 大きさ $L \times L$ の連続空間 \rightarrow 離散運動量

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2} \sum_p e^{ipx} \varphi(p),$$

$$p_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu. \quad (n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

運動量空間で定式化

- UV カットオフ Λ

$$-\Lambda \leq p_\mu \leq \Lambda$$

▶ $\Lambda = \pi/a$ (単位長さ a)

- SUSY, 並進対称性, ... の保存

\rightarrow 超カレントやエネルギー運動量テンソルの構成が容易

WZ model and Nicolai map [Nicolai 1980]

- 複素スカラー A とフェルミオン ψ の作用

$$S = S_B + \frac{1}{L^2} \sum_p \left[(\bar{\psi}_1, \psi_2)(-p) \begin{pmatrix} 2ip_z & W''(A)^{**} \\ W''(A)^* & 2ip_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(p) \right],$$

ここで、 $p_z = \frac{1}{2}(p_0 - ip_1)$, $p_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(p_0 + ip_1)$, $*$ は畳み込み、

$$S_B = \frac{1}{L^2} \sum_p N(p)^* N(p), \quad N(p) \equiv 2ip_z A(p) + W'(A)^*(p).$$

- フェルミオンの積分、変数変換 $A(p), A^*(p) \rightarrow N(p), N^*(p)$.

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{|p_\mu| \leq \Lambda} [dN(p)dN^*(p)] e^{-S_B} \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}.$$

- $A_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) は $N(p)$ に対する解
- Gauss 関数** (Nicolai 写像) \Rightarrow Gauss 乱数を生成

Algorithm

- 1 Gauss 乱数 $(N(p), N^*(p))$ を生成
- 2 方程式

$$2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p) = 0$$

の全ての解 $A(p)_i$ ($i = 1, 2, \dots$) を数値的に求める

- 3 次の和を計算

$$\sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i}, \quad \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

- 4 (1)~(3) を繰り返して平均をとる

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

Correlation function

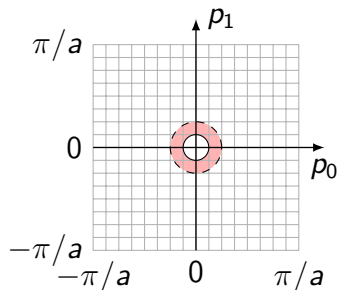
- スケーリング次元や中心電荷の計算
 - ▶ Kamata-Suzuki の中心電荷の計算手法
- 2 点関数

$$\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle = L^2 \int d^2x e^{-ipx} \langle \varphi_1(x) \varphi_2(0) \rangle$$

- 右辺 \rightarrow SCFT での 2 点関数

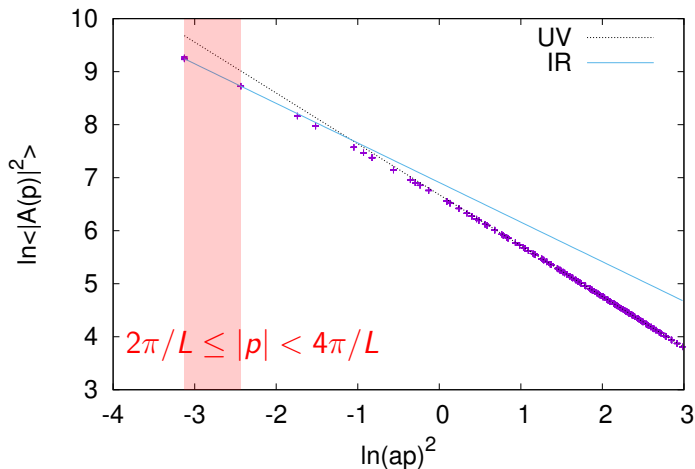
$$\begin{aligned} \langle A(x) A^*(0) \rangle &\propto 1/z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}, \\ \langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle &= c/2z^4, \dots \end{aligned}$$

- IR での $\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle$ の振る舞い
 \implies スケーリング次元 $h + \bar{h}$
中心電荷 c



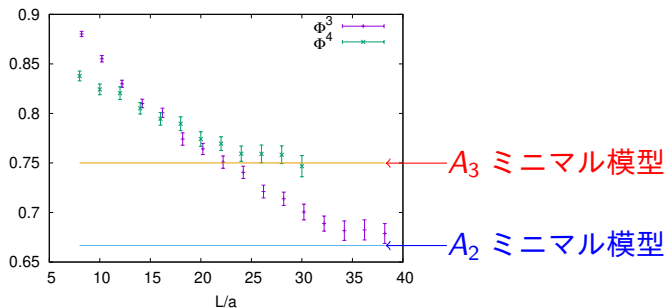
Scaling dimension

$$\langle A(p)A^*(-p) \rangle \sim 1/(p^2)^{1-h-\bar{h}}$$



$A_3: W = \lambda\Phi^4$ with $a\lambda = 0.3$.
 $L/a = 30$. 640 confs.

Scaling dimension, $h + \bar{h}$



● スケーリング次元

	L/a	$1 - h - \bar{h}$	
A_2	36	0.682(10)(7)	0.666...
A_3	30	0.747(11)(12)	0.75

- ▶ Kawai–Kikukawa (A_2): 0.660(11)
- ▶ Kamata–Suzuki (A_2): 0.616(25)(13)

Energy-momentum tensor

- エネルギー-運動量テンソル (EMT)

$$T_{zz}(x) = -4\pi\partial_z A^*(x)\partial_z A(x) \\ - \pi\psi_2(x)\partial_z\bar{\psi}_2(x) + \pi\partial_z\psi_2(x)\bar{\psi}_2(x)$$

with requirements: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, $\sum_\mu T_{\mu\mu} \rightarrow 0$ in the UV limit (free SCFT)

- EMT の 2 点関数

$$\langle T_{zz}(x)T_{zz}(0) \rangle = \frac{c}{2z^4} \quad \Rightarrow \quad \langle T_{zz}(p)T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \frac{\pi c}{12} \frac{p_z^3}{p_z^-}$$

- → 超カレントの 2 点関数の線形結合

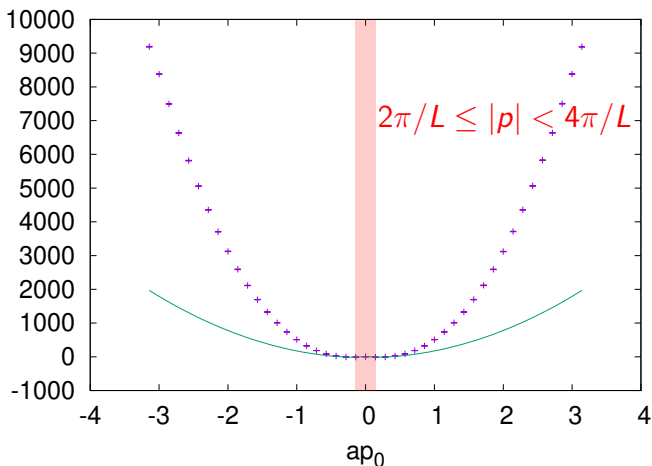
$$\langle T_{zz}(p)T_{zz}(-p) \rangle = -\frac{2ip_z}{16} \langle S_z^+(p)S_z^-(-p) + S_z^-(p)S_z^+(-p) \rangle$$

$$S_z^+(p) \equiv 4\pi\partial_z A(x)\bar{\psi}_2(x),$$

$$S_z^-(p) \equiv -4\pi\partial_z A^*(x)\psi_2(x)$$

Central charge from the EMT correlator

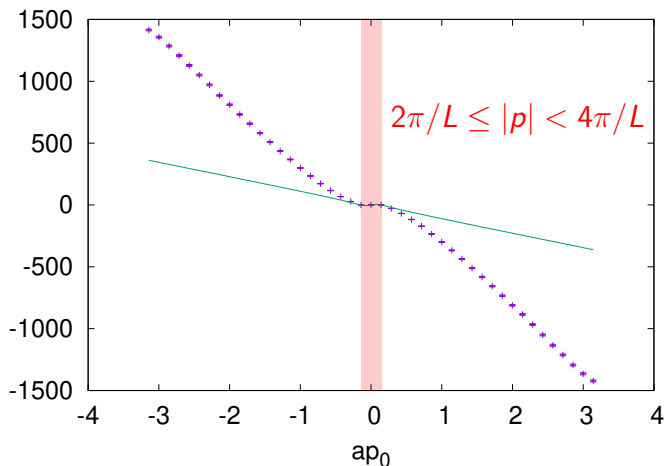
$$\text{Real part of } \langle T_{zz}(p) T_{zz}(-p) \rangle = L^2 \pi c p_z^3 / 12 p_{\bar{z}}$$



$$D_3: W = \frac{\lambda_1}{2} \Phi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \Phi_1 \Phi_2^2 \text{ with } a\lambda_1 = a\lambda_2 = 0.3.$$
$$L/a = 44, ap_1 = \pi/22, 640 \text{ confs.}$$

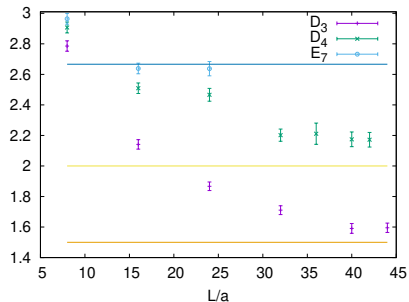
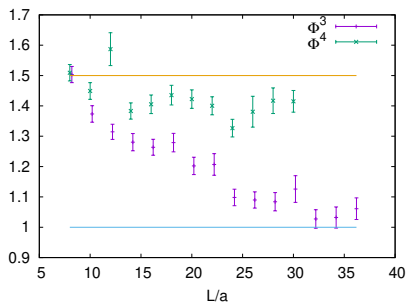
Central charge from the EMT correlator

Imaginary part of $\langle T_{zz}(p)T_{zz}(-p)\rangle = L^2\pi c p_z^3/12p_z$



$$D_3: W = \frac{\lambda_1}{2}\Phi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\Phi_1\Phi_2^2 \text{ with } a\lambda_1 = a\lambda_2 = 0.3.$$
$$L/a = 44, ap_1 = \pi/22, 640 \text{ confs.}$$

Central charge, c



● 中心電荷

	L/a	c	
A_2	36	1.061(36)(34)	1
A_3	30	1.415(36)(36)	1.5

	L/a	c	
D_3	44	1.595(31)(41)	1.5
D_4	42	2.172(48)(39)	2
E_7	24	2.638(47)(59)	2.66...

▶ Kamata–Suzuki (A_2): 1.09(14)(31)

“Effective central charge”

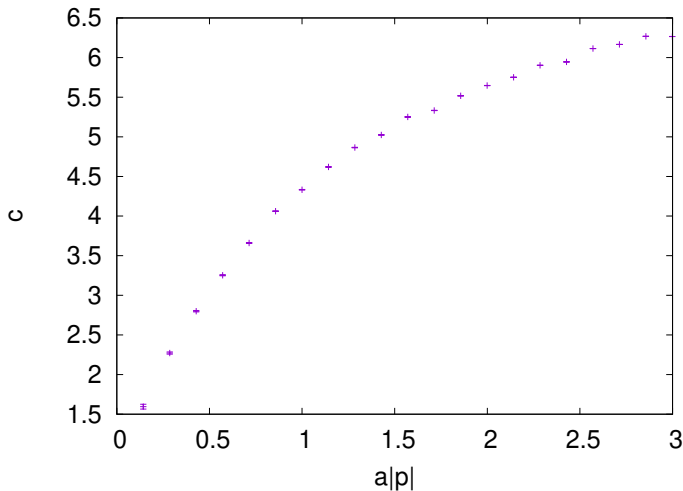


Figure: “Effective central charge” for D_3 , $L/a = 44$.
(Analogous to Zamolodchikov c -function)
UV: $c \approx 6$, N_Φ 個の超場 $\rightarrow c = 3N_\Phi$

Summary

- 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ 模型の数値シミュレーション
→ IR 極限 → 非摂動論的に現れる SCFT の数値的検証
- 中心電荷

	c	
A_2	1.061(36)(34)	1
A_3	1.415(36)(36)	1.5
D_3	1.595(31)(41)	1.5
D_4	2.172(48)(39)	2
E_7	2.638(47)(59)	2.666...

⇒ SCFT と consistent な結果

- 典型的な模型 ($A_2, A_3, D_3, D_4, E_6, E_7$) の検証
- 今後の課題
 - ▶ $E_8(\cong A_2 \otimes A_4)$, A_4 : $W = \Phi^5$
 - ▶ 有限体積効果
 - ▶ 弦理論への応用

Backup: C-function

- General forms ($\tau = \ln z\bar{z}$)

$$\begin{aligned}\langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle &= F(\tau)/z^4, \\ \langle T_{zz}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= G(\tau)/4z^3\bar{z}, \\ \langle T_{z\bar{z}}(x) T_{z\bar{z}}(0) \rangle &= H(\tau)/z^2\bar{z}^2.\end{aligned}$$

- Conservation laws and reflection positivity imply

$$\frac{d}{d\tau}(2F - G - 3H/8) \leq 0.$$

- Zamolodchikov's C-function:

$$C = 2F - G - \frac{3}{8}H.$$

Monotonically decreasing function along RG flow $\rightarrow c$.

Backup: Application to String theory

- LG/CY 対応 (例)

- ▶ 6D CY 多様体の定義式 (quintic in CP^4)

$$G(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5$$

- ▶ LG 模型の超ポテンシャル

$$W(\Phi) = \Phi_1^5 + \Phi_2^5 + \Phi_3^5 + \Phi_4^5 + \Phi_5^5$$

- ミニマル模型との対応表 (ADE 分類) に含まれない $W(\Phi)$
⇒ 対応する $G(z)$ コンパクト化を与える超弦理論が計算不可
- 簡単な例

$$W(\Phi) = \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 + \lambda\Phi_1\Phi_2\Phi_3$$