

$\mathcal{N} = 2$ Landau–Ginzburg 模型における スケーリング次元の連続極限と精密測定

森川億人

九大理

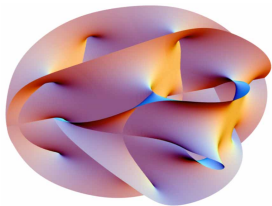
2019/9/18 物理学会 2019 年秋季大会@山形大学

- O.M., arXiv:1906.00653 [hep-lat], to appear in PTEP.

Motivation

- 超弦理論の特徴：

10D 時空 \rightarrow 4D 時空 + 6D 空間
(Calabi-Yau (CY) 多様体)



CY 多様体

\Rightarrow 弦のなす 2D 世界面上には
2D $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論 (SCFT) が実現

- 一般の CY 多様体に対応する SCFT?? \rightarrow 計算できない
- 2D 超対称 Landau-Ginzburg (LG) 模型 $\xrightarrow{\text{IR 極限}}$ SCFT
- LG 模型 \leftarrow (SCFT?) \rightarrow CY 多様体 [Greene-Vafa-Warner, Witten]
 - ▶ e.g., LG 模型: $W = \sum_{l=1}^5 \phi_l^5 \longleftrightarrow$ 6D CY: $\sum_{l=1}^5 z_l^5 = 0$
- 新しいアプローチ：LG 模型からの超弦理論の研究

LG model: 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino model

- 2D $\mathcal{N} = 2$ Wess–Zumino (WZ) 模型 ($\Phi_I, I = 1, 2, \dots$)

$$S = \int d^2x \left[4\partial_z A_I^* \partial_{\bar{z}} A_I + \frac{\partial W(\{A\})^*}{\partial A_I^*} \frac{\partial W(\{A\})}{\partial A_I} + (\bar{\psi}_i, \psi_2)_I \left(\begin{array}{cc} 2\delta_{IJ} \partial_z & \frac{\partial^2 W(\{A\})^*}{\partial A_I^* \partial A_J^*} \\ \frac{\partial^2 W(\{A\})}{\partial A_I \partial A_J} & 2\delta_{IJ} \partial_{\bar{z}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}_J \right]$$

$\Rightarrow \mathcal{N} = 2$ SCFT に対応していると考えられている

- ミニマル模型との対応の予想 (ADE 分類 [Vafa–Warner '89])

代数	超ポテンシャル W	中心電荷 c
A_n	$x^{n+1}, n \geq 1$	$3 - 6/(n+1)$
D_n	$x^{n-1} + xy^2, n \geq 3$	$3 - 6/2(n-1)$
E_7	$x^3 + xy^3$	$3 - 6/18$
$E_6 \cong A_2 \otimes A_3, E_8 \cong A_2 \otimes A_4$		

A lattice study of WZ model [Kawai–Kikukawa '10]

- IR での強結合・IR 発散 → 非摂動論的（数值的）研究
 - ▶ 格子正則化は SUSY を破る
- Nicolai 写像 $A \rightarrow N = 2\partial_z A + \partial W^*/\partial A^*$:

$$\mathcal{Z} = \int [dN dN^*] \exp\left(-\int d^2x |N(x)|^2\right) \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

- (A_2 模型) スケーリング次元の格子計算 [Kawai–Kikukawa 2010]
- スケーリング次元 $h + \bar{h}$: SCFT でのスカラー場の 2 点関数

$$\langle A(x)A^*(0) \rangle = 1/z^{2h}\bar{z}^{2\bar{h}}$$

- 様々な空間サイズ L についてスカラー場の感受率 $\chi(L)$ を測定

$$\chi(L) = \frac{1}{a^2} \int_{L^2} d^2x \langle A(x)A^*(0) \rangle \propto (L^2)^{1-h-\bar{h}}$$

→ L 依存性から $1 - h - \bar{h}$ を読み取る（有限体積スケーリング）

- A_2 ミニマル模型の対応関係の非摂動論的な証拠

Numerical approach based on [Kadoh–Suzuki '09]

- SUSY を厳密に保つ正則化 [Kadoh–Suzuki 2009] に基づく数値シミュレーション

▶ 大きさ $L \times L$ の連続空間 \rightarrow 離散的な運動量空間で定式化

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^2} \sum_p e^{ipx} \varphi(p), \quad p_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu. \quad (n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

▶ UV カットオフ: $-\pi/a \leq p_\mu \leq \pi/a$ (「格子間隔」 a)

- SUSY, 並進対称性等の保存 \rightarrow 超カレントや EMT の構成が容易

▶ 中心電荷 c の計算が straightforward ($\langle T_{zz} T_{zz} \rangle \propto c$)

- Kadoh–Suzuki の定式化を用いた様々なミニマル模型での検証

▶ Kamata–Suzuki '11: A_2 の $h + \bar{h}$, c

▶ O.M.–Suzuki '18: A_2, A_3 ($E_6 \cong A_2 \otimes A_3$) の $h + \bar{h}$, c

▶ O.M. '18: D_2, D_3, E_7 の c

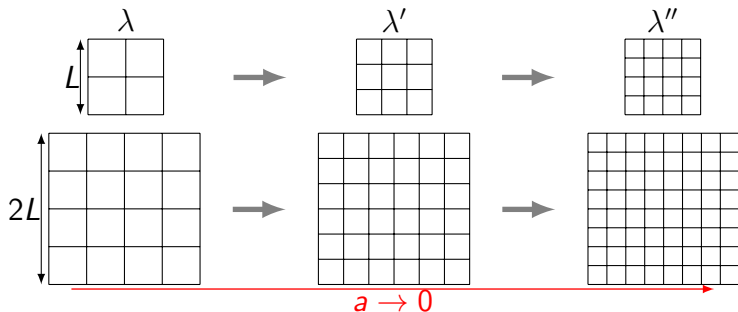
期待される $h + \bar{h}$, 中心電荷 c を良く再現している

Continuum limit and finite-size scaling

- これまでの計算は連続極限をとっていない (有限の L/a)
- Kadoh–Suzuki 定式化の**非局所性**
 - ▶ 摂動論的には $a \rightarrow 0$ で回復; 連続極限での局所性の回復???
- Kamata–Suzuki の $h + \bar{h}$ の結果は UV の不定性が問題
 - ▶ $\chi(L)$ が近距離の相関 $\langle A(x)A^*(0) \rangle$ at $x \sim 0$ に強く依存
 - ▶ cf. $\langle A(p)A^*(-p) \rangle$ at $p \sim 0$ から読み取る [O.M.–Suzuki]
- $\chi(L)$ の**連続極限**から (through 有限体積スケーリング)
スケーリング次元の精密で reliable な測定方法 [O.M. 2019]
 - ▶ A_2 模型での数値シミュレーション
- 定式化の有効性を支持
& WZ 模型 $\xrightarrow{\text{IR}}$ SCFT の非摂動論的証拠

Continuum limit extrapolation

- $\chi(L) \leftrightarrow$ running coupling $g^2(L)$ [Lüscher–Weisz–Wolff '91]
- 2種類の大きさ L と $2L$ の箱 (A_n : $W(A) = \lambda A^{n+1}/(n+1)$)



- $\forall a$ で $\ln \chi(L) = u$ を固定するようにパラメータ λ を調整
 $\rightarrow \Sigma(u, a/L) = \ln \chi(2L)$ for (a, λ)
- $\chi(L) \propto (L^2)^{1-h-\bar{h}}$ から、スケーリング次元:

$$1 - h - \bar{h} = \frac{1}{\ln 4} \left[\lim_{a \rightarrow 0} \Sigma(u, a/L) - u \right]$$

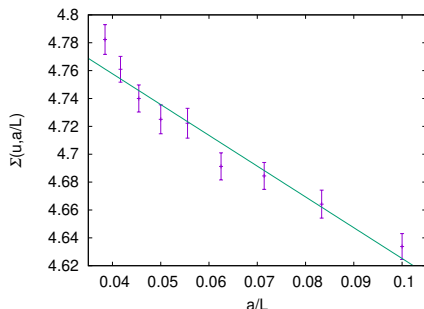
Numerical results of $\Sigma(u, a/L)$

- セットアップ
 - ▶ A_2 模型 $W = (\lambda/3)\Phi^3$
 - ▶ $L/a = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ ($2L/a = \dots$)
 - ▶ ~ 1400 から ~ 7700 配位 ($N(p)$)
 - ▶ Newton-Raphson 法で Nicolai 写像 $A \rightarrow N$ を逆解き
- $\Sigma(u, a/L)$ with $u = 3.9175$ の結果

L/a	$2L/a$	$a\lambda$	$\ln \chi(L)$	$\Sigma(u, a/L)$
10	20	0.1780	3.9174(59)	4.6338(93)
12	24	0.2135	3.9175(73)	4.6642(100)
14	28	0.2538	3.9193(70)	4.6844(97)
\vdots	\vdots			
24	48	0.5100	3.9186(60)	4.7610(93)
26	52	0.5705	3.9175(56)	4.7823(107)

Numerical result of $1 - h - \bar{h}$

- 線形フィット: $\lim_{a/L \rightarrow 0} \Sigma(3.9175, a/L) = 4.8461(107)$



- スケーリング次元 (A_2 模型)

$1 - h - \bar{h}$	期待される値
-------------------	--------

0.6699(77)(87)	0.6666...
----------------	-----------

- ▶ Kamata–Suzuki: $0.616(25)(13) \sim (1 - h - \bar{h})$ at $L/a = 24$
- ▶ (cf. Kawai–Kikukawa: $0.660(11)$, O.M.–Suzuki: $0.682(10)(7)$)

Summary

- 2D $\mathcal{N} = 2$ WZ 模型の数値シミュレーション
→ IR 極限 → 非摂動論的に現れる SCFT の数値的検証
- 有限体積効果に基づいた連続（無限体積）極限外挿
- スケーリング次元の解析

代数	W	$1 - h - \bar{h}$	期待される値
A_2	ϕ^3	0.6699(77)(87)	0.6666...

⇒ 精密で reliable な解析結果

- 定式化の有効性（局所性の回復）を示唆
- 今後の課題
 - ▶ $E_8(\cong A_2 \otimes A_4)$, A_4 : $W = \phi^5$
 - ▶ 中心電荷の連続極限解析
 - ▶ ミニマル模型以外の SCFT への適用、弦理論への応用

Backup: WZ model and Nicolai map [Nicolai 1980]

- WZ 作用 (複素スカラー A とフェルミオン ψ)

$$S = S_B + \frac{1}{L^2} \sum_p \left[(\bar{\psi}_1, \psi_2)(-p) \begin{pmatrix} 2ip_z & W''(A)^{**} \\ W''(A)^* & 2ip_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(p) \right],$$

ここで、 $p_z = \frac{1}{2}(p_0 - ip_1)$, $p_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(p_0 + ip_1)$, $*$ は畳み込み、

$$S_B = \frac{1}{L^2} \sum_p N(p)^* N(p), \quad N(p) \equiv 2ip_z A(p) + W'(A)^*(p).$$

- フェルミオンの積分、変数変換 $A(p), A^*(p) \rightarrow N(p), N^*(p)$.

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{|p_\mu| \leq \Lambda} [dN(p)dN^*(p)] e^{-S_B} \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}.$$

- $A_i(p)$ ($i = 1, 2, \dots$) は $N(p)$ に対する解
- 重みが **Gauss 関数** (Nicolai 写像)

Backup: Algorithm

- 1 Gauss 乱数 $(N(p), N^*(p))$ を生成
- 2 方程式

$$2ip_z A(p) + W'(A)^*(p) - N(p) = 0$$

の全ての解 $A(p)_i$ ($i = 1, 2, \dots$) を数値的に求める

- 3 次の和を計算

$$\sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i}, \quad \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i}$$

- 4 (1)~(3) を繰り返して平均をとる

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \mathcal{O}(A, A^*) \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

$$\Delta \equiv \left\langle \sum_i \text{sign det} \frac{\partial(N, N^*)}{\partial(A, A^*)} \Big|_{A=A_i} \right\rangle$$

Backup: Correlation function

- スケーリング次元や中心電荷の計算 [O.M.-Suzuki, O.M.]
 - ▶ Kamata-Suzuki の中心電荷の計算手法
- 2点関数

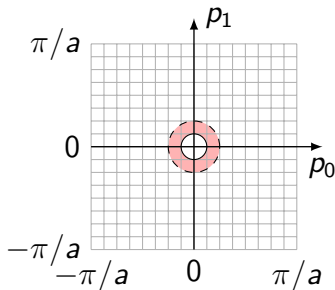
$$\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle = L^2 \int d^2x e^{-ipx} \langle \varphi_1(x) \varphi_2(0) \rangle$$

- 右辺 \rightarrow SCFT での 2点関数

$$\begin{aligned} \langle A(x) A^*(0) \rangle &\propto 1/z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}}, \\ \langle T_{zz}(x) T_{zz}(0) \rangle &= c/2z^4, \dots \end{aligned}$$

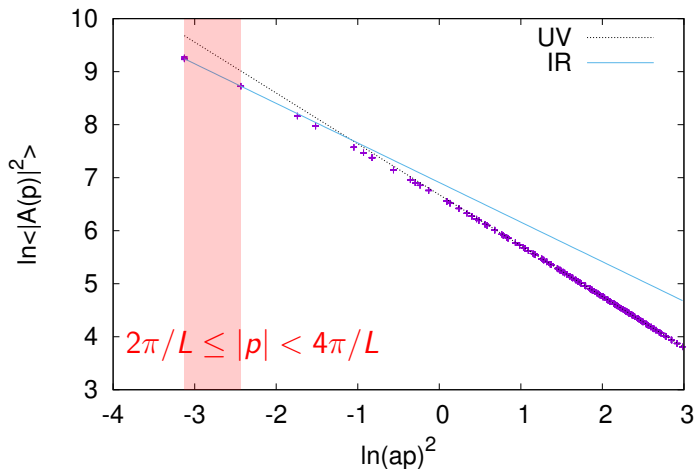
T_{zz} : EMT \leftarrow 並進対称性

- IR での $\langle \varphi_1(p) \varphi_2(-p) \rangle$ の振る舞い
 \implies スケーリング次元 $h + \bar{h}$
中心電荷 c



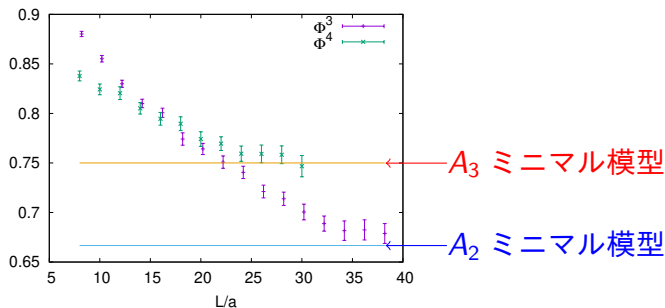
Backup: Scaling dimension

$$\langle A(p)A^*(-p) \rangle \sim 1/(p^2)^{1-h-\bar{h}}$$



$A_3: W = \lambda\Phi^4$ with $a\lambda = 0.3$.
 $L/a = 30$. 640 confs.

Backup: Scaling dimension, $h + \bar{h}$



● スケーリング次元

	L/a	$1 - h - \bar{h}$	
A_2	36	0.682(10)(7)	0.666...
A_3	30	0.747(11)(12)	0.75

- ▶ Kawai–Kikukawa (A_2): 0.660(11)
- ▶ Kamata–Suzuki (A_2): 0.616(25)(13)

Backup: Application to String theory

- LG/CY 対応 (例)

- ▶ 6D CY 多様体の定義式 (quintic in CP^4)

$$G(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5$$

- ▶ LG 模型の超ポテンシャル

$$W(\Phi) = \Phi_1^5 + \Phi_2^5 + \Phi_3^5 + \Phi_4^5 + \Phi_5^5$$

- ミニマル模型との対応表 (ADE 分類) に含まれない $W(\Phi)$
⇒ 対応する $G(z)$ コンパクト化を与える超弦理論が計算不可
- 簡単な例

$$W(\Phi) = \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 + \lambda\Phi_1\Phi_2\Phi_3$$