量子力学の公理化をめぐって

小澤正直　おざわ　まさなお　中部大学 AI 数理データサイエンスセンター，創発学術院

数学は「論理性」や「厳密性」を重要視する方法論によって抽象的な概念を研究し，物理学は実験や観測に基づいて自然界の法則や現象を研究する学問であると考えられている。しかし一方では「自然という書物は数学の言葉で書かれている」というガリレオの言葉のように，物理学の法則には異論の余地のない数学的表現が必要とされる。筆者はこれまで，量子力学の「測定公理」や「不確定性原理」の研究に携わり，数学と物理学の「近くて遠い関係」については大きな関心を寄せてきた。折に触れて考えてきたいくつかのテーマについて，この機会に論考をまとめてみたい。

公理主義と物理学

数学と物理学の関係が現代のような明確な目標をもつに至ったのは，ヒルベルトの功績が大きい。ヒルベルトは 20 世紀に数学者が目標とすべき 23 の未解決問題を提案したが，「物理理論の公理化」をその第 6 問題として提唱した。

数学の「論理性」については，ギリシャ時代にすでに，ユークリッドの『原論』において数学が公理，定義，定理，証明という演繹的方法で展開されるという規範が確立していた。ブルバキは 20 世紀の『数学原論』[1] で「ギリシャ時代以来，数学者は証明について語る」と述べている。

とはいえ，記号言語に還元可能なまでの「厳密性」を数学が獲得するのは，近代になってからであった。18 世紀にカントは「論理学はアリストテレスの時代に完成された」と書いたが，それを覆す動きはすでに始まっていた。17 世紀にライプニッツが形式言語による科学の普遍記述という構想を明らかにし，19 世紀にブールによって記号論理学が生まれた。これは，命題論理と呼ばれ，アリストテレスの論理学を大いに一般化したが，ユークリッド『原論』の証明を分析するのにも不十分であった。19 世紀末にフレーゲは述語論理を発見し，数学が記号言語に還元できることを示した。しかし，集合の生成に関して「すべての述語の外延が集合をなす」という内包公理を要請したため，ラッセルはそこから矛盾が導かれることを発見し，「19 世紀末の数学の危機」が生まれた。

この危機を救うために，ヒルベルトは，数学を述語論理で公理化し，公理系の無矛盾性を数学的に証明するという公理主義のプログラムを提唱した。当時，他にブラウアーの直観主義，ラッセルの論理主義が唱えられたが，現代の数学は，公理主義に基づいて基礎が整備されてきた。事実，多くの数学者は，現代数学は公理的集合論 ZFC（ツェルメロ-フレンケルの公理系に選択公理を付加した集合論の公理系）という単一の公理系で基礎づけられているという

Masanao Ozawa, On Axiomatization of Quantum Mechanics

考えを受け入れている*1。

数学的構造

ただし，ZFC に基づく数学の公理主義的基礎には，「形式的側面」と「構造的側面」という二面性がある[3]。形式的側面では，全数学は ZFC という単一の公理系によって公理化され，その未定義用語は集合概念のみである。関数や関係から始まり，自然数，実数などの数体系，順序数，基数の超限的数体系，ユークリッド空間などの幾何学的空間，その上の 2 乗ルベーグ可積分関数からなる関数空間など，数学に必要なすべての概念は ZFC の内部で集合概念から定義される。一方，構造的側面では，実際に数学者が研究する対象は，このような具体的な数体系や空間に限らず，一般に「数学的構造」と呼ばれる抽象的な構成物と考えられる。ブルバキ[1]は，数学の各分野がその分野に特有な数学的構造の研究に還元されること，それらの数学的構造は，線形空間の公理や位相空間の公理のような，その構造を特徴付ける公理系をみたす演算や関係などをもった集合として ZFC の内部で定義され，ZFC の公理に基づいて研究されることを明らかにした。

数学の各分野は，その分野が研究する数学的構造の例が存在すれば，ZFC と相対的に整合的だと考えられる。ただし，ZFC 自身の無矛盾性を ZFC で証明することは「ゲーデルの不完全性定理」から不可能である*2。

このように，数学における「公理系」という言葉には，ZFC の「公理系」と，それぞれの数学的構造の定義に含まれ，その数学的構造を特徴付ける「公理系」を意味する二面性がある*3。「数学的構造」という概念は，ヒルベルトが提唱した公理的方法を数学の各分野に適用することにより次第に明らかになり，ブルバキの『数学原論』[1]に結実した。ヒルベルトの第 6 問題とは，数学の各分野が各々の数学的構造の研究に還元されたように，物理学の主な分野を特徴的な数学的構造の研究に還元することを意味する。

ただし，数学と異なり，物理学には「反証可能性」と呼ばれるような経験との対応が要求される。数学の研究では，「数学的構造」は経験的意味をもたないが*4，物理学の研究では，経験的意味が付加される。その意味で，物理学の分野がある数学的構造の研究に還元されたとしても，同じ数学的構造の数学的研究に還元されるわけではない。数学と物理学は近くて遠いものである。

---

*1—前原昭二・竹内外史著『数学基礎論』(文献 2，171 ページ)では次のように述べられている。「ZFC は安定した強力な公理系で，矛盾が出る心配はまずなく，現代数学はすべてその内部で展開することができる。現在では，現代数学イコール ZFC ともいえる。」

*2—しかし，ゲンツェンは，順序数 ω までの帰納法を含むペアノ算術の無矛盾性が，それより上位の順序数 ε_0 までの超限帰納法により証明可能であることを示した。同様に，数学全体の主要部を ZFC の巨大な部分系として形式化して，その無矛盾性を ZFC で証明することはゲーデルの不完全性定理によっては排除されない。そのような部分系を増大させることにより，数学全体の無矛盾性に対する信頼を高めていくことができる(この数学的営為に限りがないとしても)[4]。

*3—一般に，1 階の述語論理で形式化された理論を 1 階理論と呼ぶ。ZFC は 1 階理論である。群，環，体という数学的構造は，群論，環論，体論という 1 階理論のモデルと考えられるが，線形空間や位相空間など多くの数学的構造は，その構造を特徴付ける公理系を 1 階理論として形式化して，その理論のモデルであると考えることはできない。その意味で，数学的構造を特徴付ける「公理系」というのは，ZFC 内部の定義の一部として形式化されるが，一般に独立した理論として形式化することはできない。数学者が主に研究するのは，数学的構造を特徴付ける「公理系」というよりは，ZFC の内部で定義された「数学的構造」がもつ，ZFC の言語で表現可能な性質であると言える。

*4—しばしば，数学の公理は無意味だと表現される。

量子力学の公理化

ヒルベルトの第6問題の代表的成果の一つに挙げられるのが，1932年に発表されたフォン・ノイマンによる量子力学の公理化である。これは，量子力学が「ヒルベルト空間」という数学的構造の研究に還元されることを明らかにした。1925年以来，ハイゼンベルク，ボルン，ヨルダン，シュレーディンガー，ディラックらによって体系化された量子力学に厳密な数学的定式化を与えたこの公理系に対して長らく異論はなかったものの，1980年代の重力波検出限界を巡る論争[5]において，この公理系がまだ十分でなかったことが明らかになった。量子力学では「測定」という概念が重要な役割を果たしているにもかかわらず，1980年代まで「測定とは何か？」を規定する「測定公理」が未完のまま残されていたのである。

フォン・ノイマンは，1925年に集合論の公理系に関する学位論文を発表した。この成果が高く評価されて，1926〜27年にゲッチンゲンでヒルベルトの助手に就任し，それまでヒルベルト自身が助手のノルドハイムと進めていた量子力学の公理化の研究を引き継ぎ，精力的に研究を進めた。その成果は，1932年に出版された『量子力学の数学的基礎』[6]にまとめられた。前述のように，この公理系は「測定公理」を除いて，現在も，超選択則のない非相対論的量子力学の標準的定式化となっている。

測定公理と重力波検出限界

フォン・ノイマンが公理化した量子力学は，対象を既知の状態に準備し，既知のシュレーディンガー方程式に従う時間発展をした後，一度だけ特定の物理量を測定するという実験においては，その正しさが十分に検証されるものであったが，時間的な経過にそって次々に測定を繰り返す場合には，つまり，逐次測定における測定値の確率を正しく予測することに関しては，不十分であった。フォン・ノイマンの公理系では，逐次測定については，いわゆる「射影測定」*5 についてしか，測定値の確率を計算する方法が与えられていなかった。しかし，制御の難しい逐次測定を理論と比較できるほど精密に行う実験技術がなかったため，長い間，一般の逐次測定が問題とされることはなかった。

ところが，1960年のレーザーの実現以後，量子状態に対する制御技術が飛躍的に進歩し，それを測定技術に応用する試みとして重力波検出プロジェクトが生まれた。これは，重力波を重力波アンテナと呼ばれる巨視的な物体の運動に変換して，それを継時的にモニターする実験である。重力波の影響は極めて弱く，その測定は非常に高い精度を必要とするため，量子力学的物理量の逐次測定と見なされる。

当時，重力波の検出には共振器型と干渉計型の2つの方式が提案されていた。1980年には，ブラジンスキー[8]やケーブス[9]らの理論家は，(自由質点の位置を逐次測定する)干渉計型検出器には「不確定性原理」*6 に由来する「標準量子限界(SQL)」と呼ばれる感度の限界が存

＊5—フォン・ノイマンの「測定公理」は「測定によって被測定系の状態は，測定値を固有値とする被測定物理量の固有状態に変化する」という内容であり，この条件を満たす測定を「反復可能測定」と呼ぶ。「射影測定」は，反復可能測定のうち，測定による状態変化が固有空間への射影として一意に定まるものである。これは，リューダーズ[7]によって導入された。固有空間が1次元であれば，両者は一致する。

＊6—位置と運動量のような正準共役な物理量 Q, P を同時に測定すると，それらの測定誤差 $\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ の間に $\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \hbar/2$ という関係(ハイゼンベルクの不等式)が成り立つこと[10]。ここで，$\hbar$ は，プランク定数を 2π で割った値。「ハイゼンベルクの不等式」は後に，任意の物理量 A, B に対して，$\varepsilon(A)\varepsilon(B) \geq (1/2)|\langle [A, B] \rangle|$ の形に一般化され，A,

在するが，(調和振動子の位置を逐次測定する)共振器型検出器は，量子非破壊測定と呼ばれる逐次測定法によってSQLを免れると主張して，共振器型検出器の優位性が半ば定説となっていた。

ところが，1983年にユエン[15]は「収縮状態測定」という新しい逐次測定法を提案して，干渉計型検出器に対する標準量子限界が打破できると主張した。だが，当時，どういう測定が物理的に実現可能でどういう測定が不可能かという判定基準がなかったため，この主張は受け入れられなかった。そこで，ユエン[16]は，1986年に日本で行われた量子力学の基礎に関する国際会議ISQM-Tokyo '86において，「物理的に実現可能なすべての量子測定を数学的に特徴付けよ」という問題を提起した。

新しい測定公理

一方，フォン・ノイマンの「測定公理」を一般化するための研究は，主に数学者の手によって行われた。当初の問題は，フォン・ノイマンの測定公理が離散的物理量の測定に限られていたことで，位置や運動量などの連続的物理量の測定で状態がどう変化するか，いわゆる「波束の収縮」に対応する数学的記述が知られていなかったことである。1950年代に梅垣壽春は，作用素環論に基づいて非可換確率論の研究を開始し，「梅垣の条件付き期待値」と呼ばれる概念を導入した。1962年に中村正弘とともに，フォン・ノイマンの測定公理から導かれる離散的物理量の測定における状態変化が，「梅垣の条件付き期待値」の例になっていることを指摘し，フォン・ノイマンの「測定公理」を「梅垣の条件付き期待値」によって連続的物理量の測定に一般化することを提案した[17]。しかし，その提案は1967年に連続的物理量に対する「梅垣の条件付き期待値」の非存在を証明したアーヴソン[18]によって退けられた。1970年になるとデーヴィスとルイス[19]は，フォン・ノイマンの「測定公理」を廃棄することを提唱し，さらに，梅垣の条件付き期待値に替わる新しい「インストルメント理論」と呼ばれる数学的フレームワークを提案した。

筆者は，大学院で指導教官であった梅垣教授から「インストルメント理論」の研究を勧められた。当時，ほとんど研究されていない難解な理論であったため，教授に紹介状を書いてもらい，1979年にオックスフォード大学数学研究所にデーヴィスを訪問する機会を得た。「インストルメント理論」の背後にあるフィルター理論的描像を伝授してもらうことができたが，その物理的描像は，測定装置のダイナミックスが関わるいわゆる観測理論的な描像とは，乖離している印象があった。

帰国すると，「インストルメント理論」に作用素環論の手法を取り入れることで，物理的に実現可能なインストルメントとそうでないものがあることに気がついた。フォン・ノイマンが「測定公理」と他の公理との整合性を示すために導入した，対象と装置の相互作用によって測定過程を記述するアイディアを「測定過程」という名前の「数学的構造」として一般的に定義すると，すべての「測定過程」がその統計的性質として，ある「インストルメント」をもつことがわかった。インストルメント理論の簡潔な定義の背後にこれほど豊かな数学的構造が隠されていたことには，驚くばかりであった。そして，その様な物

Bの平均値を共に正しく再現する測定(不偏測定)については，成立が数学的に示された[11~13]。ここで，$\langle[A, B]\rangle$は，A, Bの交換子$[A, B]=AB-BA$の平均値を表す。また，$\varepsilon(B)$は，Aを測定誤差$\varepsilon(A)$で測定した時に受けるBの擾乱$\eta(B)$と解釈することもできる。詳しくは，文献14参照。

理的に意味のあるインストルメントは「完全正値性」という新たな性質をもつが，そのような性質をもたないインストルメントが「インストルメント理論」には含まれていた。そこで，ナイマルクの定理およびスタインスプリングの定理の手法とI型因子環の正規既約表現の一意性定理を利用して，すべての完全正値性をもつインストルメント（今日では，「量子インストルメント」と呼ばれている）に対して，それに対応する「測定過程」が再構成できることを証明した。これは，1982年にトビリシで開かれた日ソ確率論シンポジウムで発表し，1984年に数理物理学の専門誌に掲載された[20]。

この1984年の論文は，1986年にユエンによって提起された「物理的に実現可能なすべての量子測定を数学的に特徴付けよ」という問題を先取りして解決していた。とともに，これで，量子力学の公理化に関するヒルベルト第6問題の懸案が解決したことになった。その内容は，「物理量には自己共役作用素が，状態には密度作用素が，時間発展にはユニタリ作用素が対応する」という公理と並んで，「測定には量子インストルメントが対応する」というものである。これにより，あらゆる逐次測定の確率分布を定めることが可能になった。この公理は，その後，発展した量子情報科学の基礎として揺るぎのないものになった。

標準量子限界説の打破

数学の進歩が物理学の問題解決を導いてきた例は多い。新しい数学理論である「量子インストルメント理論」も直ちに物理学で懸案となっていた論争解決に役立った。つまり，この理論から，ユエンの「収縮状態測定」が，物理的に実現可能であることが容易に導かれた。筆者は，この数学的知見に基づいて，「収縮状態測定」を実現する測定過程のシュレーディンガー方程式を見出し，「不確定性原理」から導かれるとされた「標準量子限界」が打破されることを実際の可解モデルに即した計算で示すことができた[21]。よって，量子力学と整合的などんな理論も「標準量子限界」の存在を導くことはできないことが，つまり，「標準量子限界」と呼ばれる感度の限界は存在しないことが結論された。「論より証拠」という言葉があるが，その逆にこの場合は，数学的議論だけで「標準量子限界説」を打破することができた。

干渉計型重力波検出器は，共振器型に比べて感度の改良が容易であるという利点があったが，当時は，いずれ標準量子限界で感度が制約されるとされていた。この成果によって干渉計型検出器の優位性が明らかとなり，共振器型を推進してきた研究グループは解散した。1994年には大型干渉計型重力波検出装置によるLIGOプロジェクトが本格的に始動し，2015年の重力波の直接観測の成功に結びついた。

数学的真理と物理的反証可能性

ところで，不確定性原理に由来するとされた限界が実は存在しなかったということから，その限界の根拠になった「ハイゼンベルクの不等式」の妥当性が疑われた。実際に，ユエンの「収縮状態測定」は，新しい「測定公理」を満たすが，「ハイゼンベルクの不等式」を満たさないので，新しい「測定公理」を含む量子力学の新しい公理系のもとでは，「ハイゼンベルクの不等式」が正しくなかったことになる[22]。そこで，測定誤差に関する正しい不等式を新しい「測定公理」から導く必要性が生まれた。筆者は，2003年にそのよう

な不等式の最初のものを発表し，「小澤の不等式」と呼ばれるようになった[23]。

科学理論には「反証可能性」がなければならないとよく言われる[24]。「実証可能性」と「反証可能性」は異なる概念である。科学理論の中心命題は $(\forall x\in X)P(x)$（すべてのサンプル $x\in X$ について，命題 $P(x)$ が成り立つ）という形をしているが，サンプルの数に限りがないので，このような命題を実証することはできない。しかし，1つでも命題 $P(x)$ が成り立たないサンプル $x\in X$ を見つければ，この命題を反証したことになる。従って，理論の帰結として，我々の経験，つまり実験や観察でテスト可能な命題 $P(x)$ が含まれていれば，その理論は反証可能であり，経験と関わりのない命題しか含まれていなければ，反証不可能である。反証可能な理論は，経験によるテストをパスすれば，信頼性が高くなり，反証されれば，部分的な改良を行うか，別な理論に置き換えることで，科学理論として進歩することができる。数学的真理は証明によって直ちに確認できるが，物理学的真理は反証可能性のあるテストをパスし続けることで信頼性を高めていくので，一定の信頼を得るには時間がかかる。

「ハイゼンベルクの不等式」は，新しい測定公理を含む最新の量子力学と矛盾することが数学的に証明されたが，「ハイゼンベルクの不等式」の不成立を物理学的真理とするためには，「ハイゼンベルクの不等式」を実験によって反証する必要がある。「ハイゼンベルクの不等式」をテストするためには，不等式に現れる誤差や擾乱の計測方法が明らかでなければならない。そのために「3状態法」という計測方法を2004年に発表した[25]。この方法によって「ハイゼンベルクの不等式」をテストすることが可能になった。つまり，このとき初めて「ハイゼンベルクの不等式」が反証可能になったと言える。同様に「小澤の不等式」も「3状態法」でテストすることができる。そこで，「小澤の不等式」は成立するが，「ハイゼンベルクの不等式」は反証されるような実験状況を作り出して，実際に実験データからそのような結論を導くことが望まれた。問題は，実験データから理論的不等式が反証されたか，成立したかを判定するのに十分な計測精度が実現されるかということにあった。いくつかの候補を検討した結果，ウィーン工科大学の長谷川祐司氏との共同研究で，原子炉から導かれる中性子のスピンの測定における誤差と擾乱を計測することで，「小澤の不等式」は成立するが，「ハイゼンベルクの不等式」は反証されるような実験状況を作り出せることが明らかになった。実験は，予想通りの成果を導いた[26]。詳細については，本誌2012年7月号掲載の拙稿[14]に譲りたい。

ハイゼンベルクの不等式による不確定性原理の定式化には，不等式に現れる誤差や擾乱の定義やその計測方法に曖昧な点が多く，量子測定理論や誤差の理論が整備された最近まで，その検証を行うための理論的基盤が十分でなかったと言える。その意味では，これまで反証可能性がなかったと言える。科学理論の検証は理論負荷的であると言われるが[27]，これらの経緯から，反証や検証というものが，対象となる理論から全く独立に行われるのではなく，それらが一体となった理論体系の中ではじめて機能するということも明らかであろう。

ハイゼンベルクの不等式は，2012年の実験で反証され，新しい不等式に置き換わることになった。新しい測定公理もまた，小澤の不等式という理論的帰結がこの実験によるテストを通過したことで，信頼性が高まったと言える。「量子測定の誤差とは何か？」という問題[28]の解明を目指して，新しい量子力学の公理のもとで量子測定理論や量子測定誤差

論の整備は今後も続けられていくであろう[29, 30]。このような形で数学の進歩が物理学の進歩に貢献できることも，数学と物理学の間の密接な関係の賜物である。

文献

1—N. Bourbaki：Éléments de Mathématique, Springer（1939-）［N. ブルバキ：ブルバキ数学原論．前原昭二・他訳，東京図書（1968-）］

2—前原昭二・竹内外史：数学基礎論．ちくま学芸文庫（2017）

3—D. Ruelle：*The Mathematician's Brain*. Princeton Univ. Press（2007）［D. ルエール：数学者のアタマの中．冨永星訳，岩波書店（2009）］

4—新井敏康：科学基礎論研究，**34**, 91（2007）

5—J. Maddox：Nature, **331**, 559（1988）

6—J. von Neumann：*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer（1932）［J. フォン・ノイマン：量子力学の数学的基礎．井上健・広重徹・恒藤敏彦訳，みすず書房（1957）］

7—G. Lüders：Ann. Phys.（Leipzig），**443**, 322（1950）

8—V. B. Braginsky et al.：Science, **209**, 547（1980）

9—C. M. Caves et al.：Rev. Mod. Phys., **52**, 341（1980）

10—W. Heisenberg：Z. Phys., **43**, 172（1927）

11—E. Arthurs & M. S. Goodman：Phys. Rev. Lett., **60**, 2447（1988）

12—S. Ishikawa：Rep. Math. Phys., **29**, 257（1991）

13—M. Ozawa：in *Quantum Aspects of Optical Communications*. C. Bendjaballah et al. eds., Springer（1991）pp. 1-17

14—小澤正直：科学，**82**, 778（2012）

15—H. P. Yuen：Phys. Rev. Lett., **51**, 719（1983）

16—H. P. Yuen：in *Proc. 2nd Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics*. M. Namiki et al. eds., Phys. Soc. Japan（1987）pp. 360-363

17—M. Nakamura & H. Umegaki：Math. Japon., **7**, 151（1962）

18—W. Arveson：Amer. J. Math., **89**, 578（1967）

19—E. B. Davies & J. T. Lewis：Commun. Math. Phys., **17**, 239（1970）

20—M. Ozawa：J. Math. Phys., **25**, 79（1984）

21—M. Ozawa：Phys. Rev. Lett., **60**, 385（1988）

22—M. Ozawa：Phys. Lett. A, **299**, 1（2002）

23—M. Ozawa：Phys. Rev. A, **67**, 042105（2003）

24—K. R. Popper：*The Logic of Scientific Discovery*. Hutchinson（1959）［K. R. ポパー：科学的発見の論理（上，下）．大内義一・森博訳，恒星社厚生閣（1971, 1972）］

25—M. Ozawa：Ann. Phys.（N.Y.），**311**, 350（2004）

26—J. Erhart et al.：Nat. Phys., **8**, 185（2012）

27—N. R. Hanson：*Patterns of Discovery*. Cambridge University Press（1958）［N. R. ハンソン：科学的発見のパターン．村上陽一郎訳，講談社学術文庫（1986）］

28—日経サイエンス，**42**（2）, 16（2012）．http://www.nikkei-science.com/?p=23015（2023 年 11 月 1 日閲覧）

29—M. Ozawa: npj Quantum Inf., **5**, 1（2019）

30—S. Sponar et al.：npj Quantum Inf., **7**, 106（2021）