弦理論・ゲージ理論における戸田階層

高崎金久（近畿大学理工学部）
2020 年 11 月 21 日 Kanno 60

1990 年代から最近までの弦理論・ゲージ理論における戸田階層の役割を振り返る.

Refs: arXiv:1801.09924, 1812.11726, 1909.13095, 2002.00660

1. 2D 戸田階層

Lax 作用素

KP 階層の Lax 作用素は擬微分作用素だが，2 次元（2D）戸田階層では 2 種類の（擬）差分作用素 $L, \bar{L}$ を用いる：

$$L = \Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Lambda^{1-n},$$

$$\bar{L}^{-1} = \bar{u}_0 \Lambda^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \Lambda^{n-1},$$

$$\Lambda = e^{\partial_s}, \quad \partial_s = \partial/\partial s$$

係数 $u_n, \bar{u}_n$ は空間変数 s と時間変数 $t_1, t_2, \ldots, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots$ の函数，Λ はシフト演算子 $\Lambda^n f(s) = f(s+n)$ である．

Lax 方程式

2 系列の時間変数 $\mathbf{t} = (t_k)_{k=1}^{\infty}$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_k)_{k=1}^{\infty}$ に関する時間発展は次の Lax 方程式で定義される：

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = [B_k, L], \quad \frac{\partial L}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{B}_k, L],$$
$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial t_k} = [B_k, \bar{L}], \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{B}_k, \bar{L}],$$
$$B_k = (L^k)_{\geq 0}, \quad \bar{B}_k = (\bar{L}^{-k})_{<0}.$$

$(\quad)_{\geq 0}$ と $(\quad)_{<0}$ はそれぞれ Λ についての非負べき部分と負べき部分を表す．特に,

$$B_1 = \Lambda + u_1, \quad \bar{B}_1 = \bar{u}_0 \Lambda^{-1}$$

τ 函数

Schur 函数展開

$$\mathcal{T}(s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \sum_{\lambda,\bar{\lambda}\in\mathcal{P}} S_\lambda(\mathbf{t}) g_{\lambda\bar{\lambda}}(s) S_{\bar{\lambda}}(-\bar{\mathbf{t}}),$$

$$S_\lambda(\mathbf{t}) = \det(S_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}))_{i,j=1}^{\infty},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\mathbf{t}) z^n = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right)$$

フェルミオン表示

$$\mathcal{T}(s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \langle s|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k\right) g \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k}\right)|s\rangle,$$

$$g_{\lambda\bar{\lambda}}(s) = \langle \lambda, s|g|\bar{\lambda}, s\rangle, \quad g \in GL(\infty)\hat{}$$

1D（1 次元）戸田階層との関係

簡約条件

$$L = \bar{L}^{-1}$$

のもとで

$$\mathcal{T}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \mathcal{T}(s, \mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})$$

となり，1 系列の時間発展が残る．簡約された Lax 作用素

$$\mathfrak{L} := L = \bar{L}^{-1} = \Lambda + b + c\Lambda^{-1} \quad (b = u_1,\ c = \bar{u}_0)$$

は Lax 方程式

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t_k} = [(\mathfrak{L}^n)_{\geq 0}, \mathfrak{L}],\ k = 1, 2, \ldots$$

を満たす．

2. 非臨界弦と戸田階層

$c < 1$ 弦理論

$c < 1$ 弦理論のランダム行列模型における 1D 戸田階層

Gerasimov et al. 1991, Martinec 1991, Alvarez-Gaumé et al. 1991, Kharchev et al. 1993

$c = 1$ 弦理論

$c = 1$ 弦理論（at self-dual radius) における 2D 戸田階層

Dijkgraaf et al. 1993, Hanany et al. 1994, Eguchi and Kanno 1994, T. 1995, Nakatsu et al. 1995

超幾何型 τ 函数 (Orlov and Scherbin 2000-2001)

τ 函数の Schur 函数展開の係数が対角型 $g_{\lambda\bar{\lambda}}(s) = g_\lambda(s)\delta_{\lambda\bar{\lambda}}$ であるような τ 函数

$$\mathcal{T}(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} S_\lambda(\mathbf{t}) g_\lambda(s) S_\lambda(-\bar{\mathbf{t}})$$

を超幾何型 τ 函数という.

$c = 1$ 弦理論の散乱振幅の母函数はこの形の τ 函数になる (Dijkgraaf et al. 1993). その係数 $g_\lambda(s)$ は Γ 函数とべき函数で表される.

2. 非臨界弦と戸田階層

Orlov-Schulman 作用素 (Orlov and Schulman 1986)

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} k t_k L^k + s + \sum_{n=1}^{\infty} v_n L^{-n},$$

$$\bar{M} = -\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{t}_k \bar{L}^{-k} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{L}^n$$

正準交換関係 $[L, M] = L$, $[\bar{L}, \bar{M}] = \bar{L}$ と Lax 方程式

$$\frac{\partial M}{\partial t_k} = [B_k, M], \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{B}_k, M],$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t_k} = [B_k, \bar{M}], \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{t}_k} = [\bar{B}_k, \bar{M}]$$

を満たす.

2. 非臨界弦と戸田階層

一般化弦方程式

2 種類の Lax 作用素と Orlov-Schulman 作用素を結ぶ関係式

$$L = f(\bar{L}, \bar{M}), \quad M = g(\bar{L}, \bar{M})$$

を一般化弦方程式という．これは戸田階層の $W_{1+\infty}$ 対称性と関係し，解を Lax 形式の中で特徴付ける．

$c = 1$ 弦理論の場合には

$$L = \bar{M}\bar{L}, \quad \bar{L}^{-1} = ML^{-1}$$

という一般化弦方程式が成り立つ（Hanany et al. 1994, Eguchi and Kanno 1994, T. 1995）．これから $M = \bar{M}$ が従うので，それと 2 つの方程式の 1 つを組にしてもよい．

$\mathbb{CP}^1$ の Hurwitz 数と戸田方程式・戸田階層

- Okounkov 2000: $\mathbb{CP}^1$ の 2 重 Hurwitz 数の母函数から 2D 戸田階層の τ 函数が得られる.
- Okounkov and Pandparipande, 0101147: $\mathbb{CP}^1$ の Hurwitz 数の母函数は 2 次元戸田方程式の 1+1 次元簡約を満たす.

Okounkov が 2 重 Hurwitz 数から構成したのは

$$g_\lambda(s) = e^{\beta(\kappa(\lambda)+2s|\lambda|+(4s^3-s)/12)/2} Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}$$

という係数をもつ超幾何型 τ 函数である. ここで

$$\kappa(\lambda) = \sum_{i\geq 1} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$$

$\mathbb{CP}^1$ の 2 重 Hurwitz 数に対する一般化弦方程式

Okounkov の τ 函数から次の一般化弦方程式が導出できる（T., 2012)：

$$L = Qe^{\beta/2}e^{\beta\bar{M}}\bar{L}, \quad \bar{L}^{-1} = Qe^{-\beta/2}e^{\beta M}L^{-1}.$$

これは $c = 1$ 弦理論の一般化弦方程式

$$L = \bar{M}\bar{L}, \quad \bar{L}^{-1} = ML^{-1}$$

に似ている．どちらも τ 函数が超幾何型であることに注意.

3. $\mathbb{CP}^1$ と戸田階層

$\mathbb{CP}^1$ 上の位相弦（GW）理論と戸田階層

- Eguchi and Yang 1994: $\mathbb{CP}^1$ 上の位相弦理論のランダム行列による記述から拡張戸田階層（1D 戸田階層に新たな時間発展の系列を加えたもの）を導出.
- 戸田予想（Getzler 2000）とそれに関する諸々の研究（Pandharipande 1999, Zhang 2002, Okounkov and Pandharipande 2002×2, Dubrovin-Zhang 2004）.
- 同変コホモロジー版（Getzler 2002, Okounkov and Pandparipande 2002）の可積分構造としての同変戸田階層.
- Givental 理論からのアプローチ（Milanov 2005, 2006）.
- $\mathbb{CP}^1$ のオービフォルドへの一般化（Kanno and Ohta 1995, Carlet et al. 2004, Milanov and Tseng 2006, 2007, Johnson 2009）.

対数的 Lax 作用素の出現

拡張戸田階層，同変戸田階層のいずれにおいても，Lax 作用素の対数が重要な役割を演じる．

- 拡張戸田階層では新たな時間発展の系列を

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial s_k} = [C_k, \mathfrak{L}],\ k = 1, 2, \ldots,$$
$$C_k = (\mathfrak{L}^k \log \mathfrak{L})_{\geq 0} - (\mathfrak{L}^k \log \mathfrak{L})_{<0}$$

  というように導入する（$s_0 = s$）．

- 同変戸田階層は 2D 戸田階層から

$$L - \nu \log L = \bar{L}^{-1} - \nu \log \bar{L} - \nu \log Q$$

  という簡約条件によって得られる（ν は同変コホモロジーのパラメータ，$\nu \to 0$ は非同変極限）．

溶解結晶模型

- 3 次元 Young 図形（平面分割）の数え上げ母函数

$$Z = \sum_{\pi \in \mathcal{PP}} q^{|\pi|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho})^2 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n}$$

は $\mathbb{C}^3$ 上の位相弦理論や 5 次元 $U(1)$ 超対称ゲージ理論と関係する（Okounkov et al. 2003, Maeda et al. 2004）.

- 重み因子 $s_\lambda(q^{-\rho})$ の一方を $s_{{}^t\lambda}(q^{-\rho})$ に置き換えたもの

$$Z' = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^t\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + Qq^n)^n$$

は resolved conifold 上の位相的弦理論の分配函数の位相的頂点（Aganagic et al. 2003）による構成とみなせる.

溶解結晶模型と戸田階層

Z, Z' を外部ポテンシャルで変形したものは 1D 戸田階層，2D 戸田階層の τ 函数になる（Nakatsu and T. 2009, T. 2013）．これは量子トーラス代数と頂点作用素を利用して示される．

$$Z(s,\mathbf{t}) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho})^2 Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\phi(\lambda,s,\mathbf{t})},$$

$$Z'(s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda(q^{-\rho}) s_{{}^{\mathrm{t}}\lambda}(q^{-\rho}) Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\phi(\lambda,s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})},$$

$$\phi(\lambda,s,\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi_k(\lambda,s),$$

$$\phi(\lambda,s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi_k(\lambda,s) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \phi_{-k}(\lambda,s).$$

4. 位相的頂点と戸田階層

Ablowitz-Ladik（相対論的戸田）階層との関係

$Z'(s,\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$ は実際には Ablowitz-Ladik 階層（あるいは相対論的戸田階層）と関係する．この可積分階層は 2D 戸田階層において $L, \bar{L}$ が

$$L = BC^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = CB^{-1},$$
$$B = \Lambda - b, \quad C = 1 - c\Lambda^{-1}$$

（B^{-1}, C^{-1} の解釈から $L \neq \bar{L}$ となる）という形をもつ場合として特徴づけられる（Brini, Carlet and Rossi 2012）．

これに対して $Z(s,\mathbf{t})$ は 1D 戸田階層に対応する：

$$L = L^{-1} = \Lambda + b + c\Lambda^{-1}$$

ユニタリ行列模型とエルミート行列模型の関係に似ている．

4. 位相的頂点と戸田階層

3 次 Hodge 積分に由来する τ 函数

2 個の分割でラベル付けされた 3 次 Hodge 積分 $G_{\mu\bar{\mu}}$ の母函数は

$$R(\tau, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \sum_{\lambda, \bar{\lambda} \in \mathcal{P}} q^{\tau\kappa(\lambda)/2 + \tau^{-1}\kappa(\bar{\lambda})/2} \mathcal{W}_{\lambda\bar{\lambda}} S_{\lambda}(\mathbf{t}) S_{\bar{\lambda}}(\bar{\mathbf{t}})$$

という組合せ論的表示をもつ（Liu, Liu and Zhou 2003）．$\mathcal{W}_{\lambda\bar{\lambda}}$ は 2 個の分割でラベル付けされた位相的頂点，τ は Hodge 積分のパラメータである．$S_{\lambda}(\mathbf{t}) S_{\bar{\lambda}}(\bar{\mathbf{t}})$ の係数に

$$g_{\lambda\bar{\lambda}}(s) = q^{\tau(\kappa(\lambda)/2 + s|\lambda| + (4s^2-1)s/24)} \mathcal{W}_{\lambda\bar{\lambda}} q^{\tau^{-1}(\kappa(\bar{\lambda})/2 + s|\bar{\lambda}| + (4s^2-1)s/24)}$$

という s 依存性を入れたもの（$s = 0$ で上の母函数に戻る）は 2D 戸田階層の τ 函数になる（Zhou 2003）．

Volterra 型可積分階層との関係

このようにして 3 次 Hodge 積分から得られる 2D 戸田階層の解の Lax 作用素は

$$L^{1/(\tau+1)} = -\bar{L}^{-\tau/(\tau+1)}$$

という関係式を満たす．この等式の両辺は

$$\mathfrak{L} = \Lambda^{1/(\tau+1)} - u\Lambda^{-\tau/(\tau+1)}$$

という（分数階の）差分作用素になる．$\tau = 1, 2, \ldots$ の場合には，$\mathfrak{L}$ は Volterra 格子とその一般化（Bogoyavlensky-Itoh-Narita 格子）の Lax 作用素とみなせる．

これは Dubrovin らが別の方法で示した結果（Dubrovin et al. 2016×2, Dubrovin and Yang 2016）を戸田階層の観点から説明している．

まとめ

弦理論・ゲージ理論における戸田階層

出現箇所

$c < 1$ 弦理論，$c = 1$ 弦理論，$\mathbb{CP}^1$ の 2 重 Hurwitz 数，$\mathbb{CP}^1$ 上の位相弦（GW）理論，溶解結晶模型，位相的頂点，3 次 Hodge 積分，. . .

出現形態

2D 戸田階層，1D 戸田階層，拡張戸田階層，同変戸田階層，Ablowitz-Ladik（相対論的戸田）階層，Volterra 型可積分階層，. . .

菅野さん
還暦おめでとうございます！