On Horrocks-type Criteria for Vector Bundles

宮崎　誓 (Chikashi Miyazaki)

熊本大学大学院先端科学研究部（理学系）
cmiyazak@educ.kumamoto-u.ac.jp

1 Introduction

射影空間上の ACM ベクトル束が直線束の直和になる、という Horrocks 判定法 (1964) はよく知られているが、Horrocks のオリジナルの証明でなく、Okonek-Schneider-Spindler の教科書に書かれている帰納法による証明が広く知られている。一方、可換環論においては、Auslander-Buchsbaum の定理 (1958) があり、これを用いても Horrocks 判定法は導かれる。この概説では、Horrocks のオリジナルな証明に立ち返り、Walter(1996), Malaspina-Rao(2015) のよる温故知新の証明を紹介する。さらに、射影空間上の Buchsbaum ベクトル束の Chang(1990), Goto(1987) の構造定理についても、Yoshino の別証 (1993) とともに、私自身の解釈も紹介する。これらの考察をもとに、多重射影空間上のベクトル束についての研究の方向を述べる。

2 Horrocks 判定法と Castelnuovo-Mumford 正則量

「$\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束が直線束の直和に同型になる」という Grothendieck の定理を拡張したものが次の Horrocks の定理である。

Definition 2.1. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が

$$\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}) = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(\ell)) = 0, \quad 1 \le i \le n-1$$

を満たすとき、ACM 束 (arithmetically Cohen-Macaulay) という。

Theorem 2.2. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が ACM 束であれば、$\mathcal{E}$ は直線束の直和に同型になる。つまり、$\mathcal{E} \cong \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$ となる。

さて、上記の Horrocks 判定法に対して、いくつかの証明法がある。よく知られているのは、次元に関する帰納法を用いる方法で、Okonek-Schneider-Spindler [24] などにも書かれている。また、次の Auslander-Buchsbaum [1] の定理からも容易に得られる（cf. Matsumura [15, (19.1)]）。

Theorem 2.3. ネーター局所環 R 上の有限生成加群 M が $\operatorname{proj}\dim M < \infty$ であれば、$\operatorname{depth} M + \operatorname{proj}\dim M = \operatorname{depth} R$ が成り立つ。

実際に、上記の定理を多項式環 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 $E = \Gamma_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ に適用する。ACM 束の条件は、$\operatorname{depth} E = \operatorname{depth} S$ に対応し、Hilbert シジジー定理により、$\operatorname{proj}\dim E < \infty$ が成り立つので、$\operatorname{proj}\dim E = 0$、つまり、$E$ が自由加群であることが示される。

ここで、Castelnuovo-Mumford 正則量の定義を与えよう (cf. [3, 7, 21])。

Definition 2.4. $\mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$, 整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0, \quad i \geq 1$$

が成り立つとき、$\mathcal{F}$ が m-regular であるという。このような最小の m を $\mathcal{F}$ の Castelnuovo-Mumford 正則量といい、$\operatorname{reg} \mathcal{F}$ と書く。

Proposition 2.5. $\mathcal{F}$ が m-regular であれば、$(m+1)$-regular である。さらに、$\mathcal{F}(m)$ は大域生成である。

Castelnuovo-Mumford 正則量を用いた Horrocks 判定法の明解な証明を紹介する。(cf. [12])。

Horrocks 判定法の Castelnuovo-Mumford 正則量による証明

$\operatorname{reg} \mathcal{E} = m$ とおくと、$\mathcal{E}(m)$ は大域生成なので $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus} \to \mathcal{E}(m)$ を得る。また、$\mathcal{E}$ は $(m-1)$-regular でなく、中間次元のコホモロジーは消滅するので、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(m-n-1)) \neq 0$ となり、Serre の双対性より、$\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee(-m)) \neq 0$ となる。よって $\psi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ を得る。すると、合成写像 $\psi \circ \varphi$ は零写像ではないので、分裂する。したがって、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$ を直和因子に持つ。この操作を繰り返す。 $\square$

3 射影空間上の Buchsbaum 束

Definition 3.1. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が任意の r 平面 $L(\subseteq \mathbb{P}^n)$, $r = 1, \cdots, n$ に対して

$$(x_0, \ldots, x_n)\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}|_L) = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

を満たすとき、Buchsbaum 束という。

Definition 3.2. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が $(x_0, \ldots, x_n)\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ を満たすとき、quasi-Buchsbaum 束という。

Theorem 3.3. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbuam 束であれば、$\mathcal{E}$ は微分形式の層の直和に同型になる。つまり、$\mathcal{E} \cong \oplus \Omega^{k_i}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$ となる。

この定理は Goto [8], Chang [5] により、独立に証明がなされた。Goto は Buchsbaum 加群の構造定理そのものを研究しており、論文 [8] には明解な証明が与えられている。Chang は Hartshorne 予想へのステップとして射影空間上の余次元 2 の Buchsbaum 多様体に対応するベクトル束の分類を行った。本概説では、さらなる別証明を述べる。

Buchsbaum 判定法（十分条件）を挙げる [16, (2.6)][30, (I.3.10)]。

Proposition 3.4. $\mathfrak{S} = \{(i,\ell) \in \mathbb{Z}^2 | \mathrm{H}^i(\mathcal{E}(\ell)) \neq 0, 1 \leq i \leq n-1\}$ とおく。

$$\text{“}(i,\ell),(j,k) \in \mathfrak{S} \Rightarrow i+\ell+1 \neq j+k\text{''}$$

が成り立てば、$\mathcal{E}$ は Buchsbaum 束である。

次の Corollary 3.5 は Theorem 3.3 および Proposition 3.4 を用いるとすぐにわかるが、ここではシジジーを用いた証明を紹介する。

Corollary 3.5 ([12])**.** $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が, ある整数 p *(*$1 \leq p \leq n$*)* に対して次を満たすとする。

1. $\mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \neq 0$
2. $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i+1)) = 0, \quad 1 \leq i \leq p$
3. $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i-1)) = 0, \quad p \leq i \leq n-1$

このとき、$\mathcal{E}$ は $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ を直和因子として持つ。

Proof. Koszul 複体から完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(p) \to \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-n) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-p-1) \to \Omega^{p}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

を考えよう。そこで、完全列

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\oplus}(1) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\oplus}(p) \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

を分解すると、短完全列

$$0 \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{s-1\vee}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{E}^{\oplus}(s) \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{s\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0, \quad s = 1, \cdots, p$$

が得られる。ここで $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(p)) = \cdots = \mathrm{H}^p(\mathcal{E}(1)) = 0$ を用いると、全射

$$\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$$

が構成される。

一方、完全列

$$0 \to \mathcal{E}^\vee(-n-1) \to \mathcal{E}^{\vee\oplus}(-n) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\vee\oplus}(-p-1) \to \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

を考える。仮定より $\mathrm{H}^p(\mathcal{E}(-1)) = \cdots = \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{E}(p-n)) = 0$ であり、Serre 双対性より $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}^\vee(-p-1)) = \cdots = \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n)) = 0$ なので、同様に、全射

$$\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$$

を得る。

そこで、$s(\neq 0) \in \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$ に対して、$\varphi(f) = s(\neq 0) \in \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$ を満たす $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n})$ をとる。ここで、$s \in \mathrm{H}^m(\mathcal{E})$ に対応する元 $s^* \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ をとる。同様に、$\psi(g) = s^*(\neq 0) \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ を満たす元 $g \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n})$ をとる。すると、f と g はそれぞれ $\mathrm{Hom}(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{E})$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Omega^p_{\mathbb{P}^n})$ の元とみなせる。そこで、可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) & \to & \mathrm{H}^0(\Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) & \cong & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \otimes \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1)) & \to & & & \mathrm{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)),
\end{array}$$

を考えると、自然な写像 $\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ は同型 $g \circ f$ を与えることがわかる。よって、写像 f により、$\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ は $\mathcal{E}$ の直和因子となる。
□

4　Horrocks の証明とその応用

Horrocks のオリジナルな証明の概略を Walter[31], Malaspina-Rao[13] に沿って紹介することから始める。

$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, S = \mathrm{Proj}\, k[x_0, \cdots, x_n]$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、$E = \Gamma_* \mathcal{E}$ とおく。ここで、S についての双対をとり、$S^\vee$-加群 $E^\vee$ を考えると、次数付けは負の方向であるが、$E^\vee$ は有限生成であり、射影次元有限である。$E^{\vee\vee\vee} = E^\vee$ であるから、$\mathrm{depth}\, E^\vee \geq 2$ となる。Theorem 2.3 より、完全列

$$0 \to P^{n-1\vee} \to \cdots \to P^{0\vee} \to E^\vee \to 0$$

がとれる。ただし、$P^{i\vee}$ は次数自由 S 加群の双対である。ここで、双対をとると次数付き S 加群の複体

$$0 \to E \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$$

であり、層化すると、$\mathbb{P}^n$ 上の層としての完全列

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{P}^0 \to \cdots \to \mathcal{P}^{n-1} \to 0$$

を得る。複体 $P^\bullet : 0 \to P^0 \to \cdots P^{n-1} \to 0$ 対して、$\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^i(P^\bullet), 1 \leq i \leq n-1$ となる。正確に言うと $\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*\mathcal{E} \cong P^\bullet$ である。

ところで、$0 \to E \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$ は極小にとることができ、E の極小自由分解を $0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^{-1} \to E \to 0$ とすると、これらをつないで複体

$$P^\bullet : 0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$$

が得られる。このとき、$\mathrm{H}^i(P^\bullet)$ は長さ有限の S 加群であり、特に $\mathrm{H}^i(P^\bullet) = 0,\ i \notin \{1, \cdots, n-1\}$ である。ただし、ここで得られた $P^\bullet$ は極小とは限らないので、若干の注意が必要である。(極小の複体をつないでも極小とは限らない。)

これまでの議論をまとめると、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、次数付き S 加群の有界な複体のなす導来圏 $D^\flat(\mathrm{S}-\mathbf{Mod})$ "the derived category of bounded complexes of graded free S-modules" の対象 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})$ への対応が定まることになる。さらに、$P^\bullet$ から、自由加群 $\cdots \to \cdots \to 0 \to L^{-1} \to 0 \to \cdots$ を取り出して、極小な複体 $P^\bullet_{\min}$ をつくると、

$$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) \cong P^\bullet_{\min}$$

となる。さて、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束の安定同値 "stable equivalence" なカテゴリーを $\underline{\mathbb{VB}}$ とおく。ここで、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ に対して、ある直線束の直和 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ があり、$\mathcal{E}\oplus\mathcal{L} \cong \mathcal{F}\oplus\mathcal{M}$ を満たすとき、安定同値という。もちろん、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) \cong \tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{F})$ を満たしている。ここで、$C^\bullet \in Ob(D^\flat(\mathrm{S}-\mathbf{Mod}))$ が $\mathrm{H}^i(C^\bullet)$ がすべて S 上有限加群であり、$\mathrm{H}^i(C^\bullet) = 0,\ 0 < i < n$ となる充満部分圏を **FinL** と書くことにする。すると、Horrocks の定理は次のように書ける ([31, (0.4)], [9])。 $\square$

Theorem 4.1. 関手 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_* : \underline{\mathbb{VB}} \to \mathbf{FinL}$ はカテゴリーの同値を与える。逆関手は $\mathrm{Syz} : \mathbf{FinL} \to \underline{\mathbb{VB}}$ となる。

すると、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の中間次元のコホモロジーが消滅することは、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) = 0$ ということであるので、カテゴリーの同値から、$\mathcal{E}$ が直線束の直和であることが言える。

Remark 4.2. これらの対応は、射影空間上の余次元 2 の部分スキームのリエゾン理論の類似ともいえる。リエゾン類とベクトル束と Hartshorne-Rao 加群との間にある種の対応があることは Rao[27, 28] の結果から始まり、Matin-Deschamps, Perrin[14] で $\mathcal{E}$ 型分解、$\mathcal{N}$ 型分解を用いて一般化されている。Nollet[23], Nagel[22] も参考になる。

Buchsbaum 束についての Chang-Goto の定理の Horrocks のオリジナルな証明の方向からの研究は、Yoshino[33] に書かれている。まず、Buchsbaum 加群についての基本的な性質を述べることから始める。

Definition and Proposition 4.3 ([29, 30]). 多項式環 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 M が Buchsbaum 加群であるとは次の同値条件が成り立つときにいう。$\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$, $\dim M = d$ とする。

(i) 任意の同次巴系 $y_1, \cdots, y_d$, 巴系イデアル $\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$ に対して、$\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ が巴系の取り方によらない。

(ii) 任意の同次巴系 $y_1, \cdots, y_d$, $0 \leq i \leq d$ に対して、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, \cdots, y_i)M) = 0, \quad 0 \leq j \leq d - i - 1$ が成り立つ。

(iii) $\tau_{<d}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は $D^\flat(\mathrm{S}{-}\mathbf{Mod})$ において、k-線形空間の複体と同型になる。

Remark 4.4. Buchsbaum 加群は Cohen-Macaulay 加群の一般化であることがわかる。実際、Cohen-Macaulay 加群の場合は、(i) では $\ell(M/\mathfrak{q}M) = e(\mathfrak{q}; M)$ となり、(ii) では局所コホモロジーそのものがゼロになり、(iii) では $\tau_{<d}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ となる。

Chang-Goto の定理の Horrocks-Walter-Yoshino による別証

$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, S$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbaum であれば、(4.3) (iii) を用いると、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})(\cong \tau_{<n+1}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$ は k 線形空間の複体になる。ここで、 $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ を次数 S 加群とする。ところで、$\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}$ は中間次元のコホモロジーは $\mathrm{H}^p(\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ のみであるから、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n})$ は k 線形空間の複体となる。カテゴリーの同値から、$\mathcal{E}$ が直線束の直和因子を除いて、$\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}(\ell)$ の直和に同型であることがわかる。 □

Chang-Goto の定理の Syzygy の手法による別証

Corollary 3.5 の手法をスペクトル系列を用いた Buchsbaum 判定法 ([16, 17, 20]) に応用して、Chang-Goto の定理を証明する。

多項式環 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 $E = \Gamma_*(\mathcal{E})$ は $\dim E = n + 1$, $\mathrm{depth}\, E \geq 2$ である。ここで、Koszul 複体 とアファイン被覆 $\mathcal{U}$ に対する Čech 複体からつくられる複体

(i) $K_\bullet = K_\bullet((x_0, \cdots, x_n); S)$

(ii) $L^\bullet = (0 \to E \to C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{E})[-1])$

をとる。2 重複体 $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, L^\bullet)$ からフィルター付けを考え、スペクトル系列 $\{\mathrm{E}_r^{p,q}\}$ を構成する。このとき

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}_p((x_0, \cdots, x_n); \mathrm{H}^q_*(\mathcal{E})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q} = \mathrm{H}^{p+q}((x_0, \cdots, x_n); E)$$

となる。すると、Buchsbaum 環の理論より (cf.[17, 30])、自然な写像

$$\mathrm{H}^q = \mathrm{H}^q((y_0, \cdots, y_d); E) \to \mathrm{E}_1^{0,q} = \mathrm{H}^q_{\mathfrak{m}}(E), \quad 0 \leq q \leq n$$

は全射である。さらに、$d_r^{p,q}: \mathrm{E}_r^{p,q} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$ は $q \le n,\, r \ge 1$ のとき零写像となる ([16])。

Cororally 3.5 の証明を念頭におきながら、上記のスペクトル系列の類似をつくる。

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\oplus}(1) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\oplus}(p) \to \mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p\vee} \to 0$$

は完全列である。そこで、

(i) $M^\bullet = (K^\bullet)_{\le p} : 0 \to S \to S(1)^{\oplus} \to \cdots S(p)^{\oplus} \to 0$

(ii) $N^\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{E})$

をとる。2 重複体 $C^{\bullet\bullet} = M^\bullet \otimes N^\bullet$ からフィルター付けを考え、スペクトル系列 $\{\mathrm{E}_r^{p,q}\}$ を構成する。すると、$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}_*^q(\mathcal{E}),\, \mathrm{H}^{p+q} = \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes {\Omega_{\mathbb{P}^n}^p}^\vee)$ が成り立つ。$d_r^{p,q}: \mathrm{E}_r^{p,q} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$ は $q \le n,\, r \ge 1$ のとき零写像となるから、全射

$$\varphi: \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p\vee}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$$

を得る。同様に、全射

$$\psi: \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^p) \to \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$$

を得られ、以下、Corollary 3.5 の証明に従って Chang-Goto の定理は証明される。 □

5 多重射影空間への拡張

これまでの考察をもとに、多重射影空間への Horrocks 判定法を考える。

Problem 5.1. $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が次を満たすとき「$\mathcal{E}$ は何か」という問題である。

1. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(\ell, \ell)) = 0,\, 1 \le i \le m+n-1$
2. 任意の $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(\ell_1, \ell_2)) = 0,\, 1 \le i \le m+n-1$

Ballico-Malaspina[2] のアイディアに基づいて多重射影空間上の Castelnuovo-Mumford 正則量を定義し、Horrocks 型の判定法に応用する。

Definition 5.2. $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が次を満たすとき、$\mathcal{F}$ が 0-regular であると言う。

$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}(j_1, j_2)) = 0, \quad i \ge 1,\, j_1 + j_2 = -i,\, -m \le j_1 \le 0,\, -n \le j_2 \le 0$

Proposition 5.3. $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が 0-regular であるとする。

1. $\mathbb{P}^m$ の一般の位置にある超平面 $H \subset \mathbb{P}^m$ に対して、$\mathcal{F}|_{H \times \mathbb{P}^n}$ は $H \times \mathbb{P}^n (\cong \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^n)$ において 0-regular である。

2. 任意の $m_1 \geq 0,\ m_2 \geq 0$ に対して $\mathcal{F}(m_1, m_2)$ は 0-regular である。

3. $\mathcal{F}$ は大域生成である。

Remark 5.4. Problem 5.1 の「2」を満たすベクトル束は存在しないことが Castelnuovo-Mumford 正則量を用いると簡単にわかる。実際、$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、$\mathcal{E}(t,t)$ が 0-regular となる最小の t をとり、$\mathcal{F} = \mathcal{E}(t,t)$ とおく。中間次元のコホモロジーは消滅しているので、$\mathrm{H}^{m+n}(X, \mathcal{F}(-m-1, -n-1)) \neq 0$ となる。Serre 双対性を用いると、$\mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee) \neq 0$ となり、零でない写像 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X$ が得られる。一方、$\mathcal{F}$ は大域生成であるから、全射 $\psi : \mathcal{O}^\oplus \to \mathcal{F}$ を得る。$\varphi \circ \psi$ は零でない写像であるので、$\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{F}$ の直和因子になることがわかる。ところが、$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{O}_X(-m-1, 0)) \neq 0$ であるから、$\mathcal{E}$ の仮定に矛盾することになる。

Ballico-Malaspina[2], Miyazaki[18] の考え方を発展させて次の定理を証明する。

Theorem 5.5. *$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ について、任意の $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0,\ i \neq 0, m, n, m+n$ が成立しているとする。このとき、ある整数 $c \in \mathbb{Z},\ 0 \leq c \leq |m-n|$ が存在して、任意の整数 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ に対して、次が成り立つとする。*

1. $\ell_2 \leq \ell_1 + c$ のとき $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$

2. $\ell_2 \geq \ell_1 - |m-n| + c$ のとき $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$

すると、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X,\ \mathcal{O}_X(-1,0), \cdots, \mathcal{O}_X(-m,0),\ \mathcal{O}_X(0,-1), \cdots, \mathcal{O}_X(0,-n)$ を $\mathcal{O}_X(t,t)$ で捩ったベクトル束の直和になる。

Proof. 任意の $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ -m \leq \ell_1 \leq 0,\ -n \leq \ell_2 \leq 0$ と任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}(\ell_1 + t, \ell_2 + t)) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}(\ell_1 + t, \ell_2 + t)) = 0$ とする。この場合は、$\mathcal{E}(t,t)$ が 0-regular となる最小の t を取り $\mathrm{H}^{m+n}(X, \mathcal{E}(-m-1+t, -n-1+t)) \neq 0$ とすると、Remark 5.4 と同じ議論により、$\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{E}(t,t)$ の直和因子になる。

したがって、上記の範囲で $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ または $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ となる (j_1, j_2) が存在する場合を考えればよい。そこで、$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ で $\ell_2 - \ell_1 < j_2 - j_1$ を満たす $\ell_1,\ \ell_2$ に対して $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((\ell_1, \ell_2)) = 0$ を満たす $(j_1, j_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を取る。

ここで、$\mathcal{F} = \mathcal{E}(j_1, j_2)$ とおく。$j_2 - j_1 \geq c + 1$ に注意する。すると、$\mathrm{H}^m(\mathcal{F}(1,0)) = \mathrm{H}^{m-1}(\mathcal{F}(2,0)) = \cdots = \mathrm{H}^1(\mathcal{F}(n,0)) = 0$ となる。ここで、注意するのが、$n < m$ のとき、$\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(m-n+1, 0) = 0$ となることである。実際、$j_2 - j_1 - (m-n+1) \geq c+1-|m-n|-1 = c - |m-n|$ の範囲では、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(j_1 + m - n + 1, j_2)) = 0$ である。Koszul 複体からできる完全列

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1,0)^\oplus \to \cdots \to \mathcal{F}(m,0)^\oplus \to \mathcal{F}(m+1,0) \to 0$$

を用いると、全射 $\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0)) \to \mathrm{H}^m(\mathcal{F})$ を得る。

さらに、$\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(0,-1) = \cdots = \mathrm{H}^{m+n-1}(\mathcal{F}(0,-n) = 0$ となるので、Serre 双対性より、$\mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n)) = \cdots = \mathrm{H}^1(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-1)) = 0$ となる。ここでも、$n > m$ の場合に $\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(0,m-n-1)) = 0$ に注意する。実際、$j_2+(m-n-1)-j_1 \geq c+1-|m-n|-1 \geq c-|m-n|$ の範囲では、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(j_1,j_2+m-n-1)) = 0$ である。同様にして、完全列

$$0 \to \mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1) \to \mathcal{F}^\vee(-m-1,-n)^\oplus \to \cdots \to \mathcal{F}^\vee(-m-1,-1)^\oplus \to \mathcal{F}^\vee(-m-1,0) \to 0$$

を用いると、全射 $\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-m-1,0)) \to \mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1))$ を得る。

ここで $s(\neq 0) \in \mathrm{H}^m(\mathcal{F})$ に対して、$\varphi(f) = s(\neq 0) \in \mathrm{H}^m(\mathcal{F})$ を満たす $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0))$ をとる。ここで、$s \in \mathrm{H}^m(\mathcal{F})$ に対応する元 $s^* \in \mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1))$ をとる。同様に、$\psi(g) = s^*(\neq 0) \in \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-n-1))$ を満たす元 $g \in \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-n-1,0)$ をとる。すると、f と g はそれぞれ $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-m-1,0),\mathcal{F})$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X(-m-1,0))$ の元とみなせる。Corollary 3.5 と同様に、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-m-1,0)) & \to & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^m(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1)) & \to & \mathrm{H}^{m+n}(\mathcal{O}_X(-m-1,-n-1)),
\end{array}$$

を用いると、$g \circ f$ は同型になり、写像 f により、$\mathcal{O}_X(-m-1,0)$ は $\mathcal{F}$ の直和因子となる。つまり、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X(-j_1-m-1,-j_2)$ を直和因子として持つ。 $1 \leq j_2 - j_1 \leq m$ であるので $-j_2-(-j_1-m-1) = 1,\cdots,m$ を取りうる。したがって、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X(-1+t,t),\cdots,\mathcal{O}_X(-m+t,t)$ 型のベクトル束を直和因子として取ることがわかる。

また、$\mathrm{H}^n(X,\mathcal{E}((j_1,j_2)) \neq 0$ で $\ell_2 - \ell_1 > j_2 - j_1$ を満たす ℓ_1, ℓ_2 に対して $\mathrm{H}^n(X,\mathcal{E}((\ell_1,\ell_2)) = 0$ を満たす $(j_1,j_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ を取った場合は、同様にして、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X(t,-1+t),\cdots,\mathcal{O}_X(t,-n+t)$ 型のベクトル束を直和因子として取ることがわかる。
□

Remark 5.6. $m = n = 1$ の場合は、$\mathbb{P}^3$ の 2 次超曲面 $Q(\cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ の ACM 束が $\mathcal{O}_Q$, $\mathcal{O}_Q(-1,0)$, $\mathcal{O}_Q(0,-1)$ の捩れの直和に同型になる、ということである。一般の 2 次超曲面の場合は Knörrer の結果 (cf. [4, 10, 11, 25, 26, 32]) により、構造層もしくはスピノル束の捩れの直和に同型になることがわかる。

さて、「$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}$ は $\Omega^p_{\mathbb{P}^m}(s)\boxtimes\Omega^q_{\mathbb{P}^n}(t)$ の直和に同型になるための必要十分条件は何か。」を考えてみる。これは、[6, 12] により、コホモロジーによる十分条件が得られているが、定性的な必要十分条件は何かということであり、この問題については現在研究中であり、何らかの見通しは可能であると思っている。

ここで、Malaspina-Miyazaki[12] のコホモロジー判定法の一つを紹介する。

Theorem 5.7. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上の既約なベクトル束 $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとする。

1. $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}) \neq 0$

2. $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(1,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(1,0)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-1,0)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{E}(0,-1)) = \mathrm{H}^3(\mathcal{E}(-1,-1)) = 0$

このとき、$\mathcal{E} \cong \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}$ となる。

最後に、$\Omega^p_{\mathbb{P}^m}(s) \boxtimes \Omega^q_{\mathbb{P}^n}(t)$ が Buchsbaum 束となる必要十分条件について、[19] の例を紹介する。

Example 5.8. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ に対して、次が成り立つ。

1. $\mathcal{E}$ が ACM 束である。$\Leftrightarrow \ell = -1$
2. $\mathcal{E}$ が Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -3 \leq \ell \leq 1$
3. $\mathcal{E}$ が quasi-Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -4 \leq \ell \leq 2$

Example 5.9. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(\ell)$ に対して、次が成り立つ。

1. $\mathcal{E}$ が ACM 束である。$\Leftrightarrow \ell = 1, -1$
2. $\mathcal{E}$ が Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -3 \leq \ell \leq 3$
3. $\mathcal{E}$ が quasi-Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -4 \leq \ell \leq 4$

謝辞

高知大学での素晴らしい研究集会において、還暦を迎えた日に講演する機会をいただいて大変感謝しています。私の力量と時間不足のために中途半端な概説になったとしたら申し訳なく思います。この研究は現在進行中であり、できるだけ早く完成することを目標にしています。

参考文献

[1] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68(1958), 625–657.

[2] E. Ballico and F. Malaspina, Regularity and cohomological splitting conditions for vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 345 (2011), 137 – 149.

[3] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1–48, Cambridge UP, 1993.

[4] R. O. Buchweitz, G. M. Greuel and F. O. Schreyer, Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities II, Invent. Math. 1273 (1987), 58 – 116.

[5] M. C. Chang, Characterization of arithmetically Buchsbaum subschemes of codimension 2 in $\mathbb{P}^n$, J. Differential Geom. 31 (1990), 323–341.

[6] L. Costa and R. M. Miró-Roig, Cohomological characterization of vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 294 (2005), 73–96, with a corrigendum in J. Algebra 319 (2008), 1336–1338.

[7] D. Eisenbud, The geometry of syzygies, GTM 229, Springer, 2005.

[8] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, ASPM 11(1987), 39–64.

[9] G. Horrocks, Vector bundles on the punctual spectrum of a ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689 – 713.

[10] H. Knörrer, Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I, Invent. Math. 88(1987), 153 – 164.

[11] A. Langer, D-affinity and Frobenius morphism on quadrics, IMRN 2008, rmn 145, 26pp.

[12] F. Malaspina and C. Miyazaki, Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces, Ric. mat. 67(2018), 963–968.

[13] F. Malaspina and A. P. Rao, Horrocks correspondence on arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Algebra Number Theory 9(2015), 981–1003.

[14] M. Martin-Deschamps and D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches, Astérisque 184–185(1990).

[15] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge UP, 1986

[16] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum algebras and Segre products, Tokyo J. Math. 12(1989), 1–20.

[17] C. Miyazaki, Spectral sequence theory for generalized Cohen-Macaulay graded modules, Commutative Algebra (Trieste 1992), 164–176, World Sci. Publ., 1994.

[18] C. Miyazaki, A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1435–1440.

[19] C. Miyazaki, Buchsbaum criterion of Segre products of vector bundles on multiprojective space, J. Algebra 467 (2016), 47–57.

[20] C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for graded modules and projective varieties, Beitr. Algebra Geom. 60 (2019), 57 – 65.

[21] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59 (1966), Princeton UP.

[22] U. Nagel, Even liaison class generated by Gorenstein linkage, J. Algebra 209 (1998), 543 – 584.

[23] S. Nollet, Even linkage classes, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996), 1137 – 1162.

[24] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3 Birkhäuser, 1980.

[25] G. Ottaviani, Spinor bundles on quadrics, Trans. Amer. Math. Soc. 307(1988), 301 – 316

[26] G. Ottaviani, Some extensions of Horrocks criterion to vector bundles on Grassmannians and quadrics, Ann. Mat. Pura Appl. 155(1989), 317 – 341.

[27] A. P. Rao, Liaison among curves in $\mathbb{P}^3$, Invent. Math. 50(1979), 205 – 217.

[28] A. P. Rao, Liaison equivalence classes, Math. Ann. 258(1981), 169 –173.

[29] P. Schenzel, Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Ringe, Lecture Notes in Math. 907 (1980) Springer

[30] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and its applications, Springer, 1986.

[31] C. H. Walter, Pfaffian subschemes, J. Algebraic Geom. 5(1996), 671–704.

[32] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, LMS Lecture Note Series 146(1990).

[33] Y. Yoshino, Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension, J. Algebra 159(1993), 240–264.