Castelnuovo-Mumford 正則量とシジジーに関連する話題について

宮崎　誓 (Chikashi Miyazaki)

熊本大学大学院先端科学研究部（理学系）
cmiyazak@educ.kumamoto-u.ac.jp

1 Introduction

本論文は多項式イデアルのシジジーに関する Castelnuovo-Mumford 正則量について、その上限を記述する問題についての概説である。Castelnuovo-Mumford 正則量の基礎から始め、Eisenbud-Goto 予想をめぐる話を解説し、正則量上限を中心とした射影多様体の分類にも触れる。正則量の手法をベクトル束の分裂問題に応用することも述べる。

射影多様体の定義方程式（定義イデアル）の複雑さは「シジジー」によって表され、Hilbert のシジジー定理により、有限な極小自由分解が確定する。Castelnuovo-Mumford 正則量はシジジーに関する不変量であり、Mumford[46] が Castelnuovo のアイディアに基づいて定義した。1980 年代において、Eisenbud-Goto 予想 ([15, 20]) が提唱された。本論文は、1980 年代以降の歴史に沿って、Castelnuovo-Mumford 正則量の概説を行う。

1980 年代において、Gruson-Lazarsfeld-Peskine の記念碑的な論文 [19] がある。射影曲線の美しい結果はそれ以降の研究のモデルにもなっている。Bayer-Mumford の概説 [7] はその後の発展に指針を与えた。曲面における Pinkham, Lazarsfeld[27] の手法は、1990 年代以降には、Mather 理論 [33] を用いる Kwak[25], Chiarli-Chiantini-Greco[13] による 14 次元以下の非特異射影多様体に対して Eisenbud-Goto 予想が弱い意味で解決したことにもつながる。

さて、Eisenbud-Goto の論文 [15] においては Cohen-Macaulay 多様体（座標環が CM) の場合の予想の成立にも触れている。この論文に触発されて、Stückrad-Voge[57] は、Griffiths-Harris の Uniform Position Lemma(cf. [2]) を用いて、0 次元の問題に持ち込み、1980 年代までに可換環論において発展した Buchsbaum 環の理論を Eisenbud-Goto 予想の研究に応用し、良い性質の環についての正則量上限を得た。この手法は、Hoa-Miyazaki[21], Nagel-Schenzel[49] の 1990 年代の結果に受け継がれる。これらの総説をしながら、2010 年前後での講演者による Castelnuovo-Mumford 正則量と Buchsbaum 多様体の分類の研究 [40, 41] に触れる。

トーリック多様体の場合、$\operatorname{codim} X = 2$ のとき, Peeva-Sturmfels[54] が $\operatorname{reg} X \le \deg X - 1$ が成り立つことを示している。Bayer-Peeva-Sturmfels[8] に始まる Scarf 複体、Cellular

複体の研究については、Sturmfels の講義録 [38] を概説書として挙げたい。

Eisenbud-Goto 予想の根本的解決は、現在の見地からは、2010 年頃まで停滞してきたとも言えかねない。2010 年以降の目覚ましい発展は、Noma[52], Kwak-Park[26] による非特異射影多様体での $\mathcal{O}_X$-regularity についての Eisenbud-Goto 予想の解決がまず頭に浮かぶ。Generic Projection や Double Point Divisor の手法に基づくものである。

最も衝撃的だったのは McCullough-Peeva による予想の否定的解決 [36] である。証明の手法においても極めて興味深い。Rees-like Algebra を用いてイデアルを変形すること、および、重み付き同次多項式を通常の同次多項式に変形することを用いて、反例を構成するという方法を用いている。これらの最近の結果 (cf. [37]) を俯瞰し、証明のポイントなどにも触れる。

最後に、Castelnuovo-Mumford 正則量の手法の射影空間のベクトル束の分裂問題への応用を述べる。有名な射影空間上のベクトル束の Horrocks 判定法についての 4 つの証明を述べ、ベクトル束の代数的研究についてシジジー論的手法を考えたい。

代数学シンポジウムでのサーベイ講演の機会を与えていただいた森脇淳先生、下元数馬先生に深く感謝します。解説書を含めた文献をできるだけ引用し、深く学びたい読者の参考になるように心がけました。

2 Castelnuovo-Mumford Regularity Basics

この章では、Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的な事項を述べる。詳しい解説は、Bayer-Mumford[7], Eisenbud[16], Lazarsfeld[28] を参考にされたい。

この論文を通して、次の記号を用いる。k を代数閉体とし、$S = k[x_0, \cdots, x_n]$ を多項式環とし、$\mathfrak{m} = S_+ = (x_0, \cdots, x_n)$ と書く。射影空間を $\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ とおく。

定義・命題 2.1 (Mumford[46])**.** $\mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$、整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathcal{F}$ が 'm-regular' であるとは、任意の $i \geq 1$ に対して、

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$$

が成り立つときにいう。これは、$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(j)) = 0, i \geq 1, i+j \geq m$ と同値であり、$\mathcal{F}$ が 'm-regular' であれば、$\mathcal{F}(m)$ が大域生成であることはよく知られている。

連接層 $\mathcal{F}$ の Castelnuovo-Mumford 正則量を $\operatorname{reg} \mathcal{F} := \min\{m \in \mathbb{Z} \,|\, \mathcal{F} \text{ is } m\text{-regular}\}$ と定義する。また、射影スキーム $X \subseteq \mathbb{P}^n$ の Castelnuovo-Mumford 正則量を $\operatorname{reg} X := \operatorname{reg} \mathcal{I}_X$ と定義する。

命題 2.1 の証明の概略. 連接層 $\mathcal{F}$ が m-regular であれば、$(m+1)$-regular であること、および、$\Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to \Gamma(\mathcal{F}(m+1))$ が全射となることが、n についての帰納法で示される。

そこで、$\ell \gg 0$ のとき、$\Gamma(\mathcal{F}(\ell)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{F}(\ell)$ が全射となることを用いて、$\Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{F}(m)$ が全射、つまり、$\mathcal{F}(m)$ が大域生成であることを得る。□

注意 2.2. Castelnuovo-Mumford 正則量の定義はいくつかの方向に拡張されている。例えば、多重射影空間、重み付き射影空間、グラスマン多様体、大域生成の豊富な直線束などである。その場合、上記の性質が保たれているかは、$\mathbb{P}^n$ 上での証明を見直すとわかる。(cf. [29])

さて、環と加群を用いて定義をする。

定義 2.3. 多項式環 S 上の有限生成次数加群 M をとる。このとき、$i = 0, \cdots, n+1$ に対して、$a_i(M) = \max\{\ell \in \mathbb{Z} | [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)]_\ell \neq 0\}$ と定義する。さらに、$\operatorname{reg} M = \max\{a_i + i | i = 0, \cdots, n+1\}$ を M の Castelnuovo-Mumford 正則量と定義し、$\operatorname{maxdeg}(M)$ を M の最小の生成元の最大次数と定義する。

注意 2.4. 射影スキーム $X \subseteq \mathbb{P}^n$ の定義イデアルを $I := \Gamma_* \mathcal{I}_X = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(\ell))$ とし、座標環を $R := S/I$ とすると、$\operatorname{maxdeg}(I) \leq \operatorname{reg} I$ が成り立ち、$\operatorname{reg} X = \operatorname{reg} \mathcal{I}_X = \operatorname{reg} R + 1 = \operatorname{reg} I$ となる。

さて、 I の次数 S 加群としての最小自由分解を考える。シジジー定理により、有限性が言え、中山の補題により、

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to I \to 0$$

が同型の除いて一意的に定まる。ここで、$F_i = \oplus_j S(-\alpha_{i,j})$ は次数自由 S 加群であり、写像 $F_{i+1} \to F_i$ は斉次多項式の行列で表される。

定理 2.5 (cf. [7, 15])**.** $\operatorname{reg} X = \max_{i,j}\{\alpha_{i,j} - i\}$

この定理は「Castelnuovo-Mumford 正則量は、定義方程式の複雑さを量る」ということを表している。この言い方は「よくある決まる文句」でもあり、「完全交叉」が「最も複雑」で、「最小次数の多様体」が「最も複雑でない」ことにもなるので、注意すべきである。次の言い換えは非常に面白い。

命題 2.6 (cf. [15])**.** *次数 S 加群 M が m-regular であることの必要十分条件は $M_{\geq m} := \oplus_{\ell \geq m} M_\ell$ が m 線形な自由分解を持つ、つまり、 $M_{\geq m}$ の極小自由分解が*

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M_{\geq m} \to 0,$$

となることである。ただし、 $F_i = \oplus S(-m-i)$, $i = 0, \cdots, s$ は次数自由 S 加群である。

証明の概略. 短完全列 $0 \to M_{\geq m} \to M \to M/M_{\geq m} \to 0$ より、完全列

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \to M/M_{\geq m} \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \to 0$$

および $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$, $i \geq 2$ を得る。これより、$M_{\geq m}$ が m-regular であることは容易にわかる。□

注意 2.7. Lazarsfeld[28] にも解説されている。 $\mathcal{F}(m)$ の大域生成を用いて、完全列

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \to \mathcal{F}(m) \to 0,$$

をつくると、 $\mathcal{F}_1$ は $(m+1)$-regular になる。これを繰り返すと、(有限とは限らない)線形な自由分解

$$\cdots \to \cdots \to \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-2) \to \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-1) \to \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \to \mathcal{F} \to 0.$$

が得られる。この場合は、大域切断を取っても、完全性は保たれる。

定義 2.8. 有限生成次数 S 加群 M の極小自由分解を $\mathbf{F}_\bullet$ と書き、$F_i = \oplus_j S(-j)^{\beta_{ij}}$ とすると、$\beta_{ij} = \dim_k[\mathrm{Tor}_i^S(M,k)]_j$ となる。この $\beta_{i,j}$ を Betti 数と呼ぶ。 Betti table とは $\beta_{i,i+j}$ を (i,j) の場所に書いたものである。Betti table の例は (2.10), (2.11) を見よ。

注意 2.9. 有限生成次数 S 加群 M の射影次元、Castelnuovo-Mumford 正則量は Betti 数を用いて、$\mathrm{proj.dim}_S M = \max\{i|\beta_{ij} \neq 0\}$, $\mathrm{reg}\, M = \max\{j|\beta_{i,i+j} \neq 0\}$ と書ける。また、M の Poincaré 級数 M は $\mathrm{P}(M,t) = \sum_i h_M(i)t^i = \dfrac{\sum_i(-1)^i\beta_{ij}t^j}{(1-t)^{n+1}}$ と表される。

例 2.10. $X \subseteq \mathbb{P}^n$ を $(d_1, \cdots, d_r)$ の完全交叉とすると、極小自由分解は

$$0 \to S(-d_1 - \cdots - d_r) \to \cdots \to \oplus_{j=1,\cdots,r}S(-d_j) \to S \to S/I \to 0$$

$I = (f_1, \cdots, f_r)$ の定義方程式からなる Koszul 複体である。したがって、$\mathrm{reg}\, X = d_1 + \cdots + d_r - r + 1$ となる。特に、$r = 2$, $\deg f_1 = 2$, $\deg f_2 = 3$ のとき、Betti table は

	0	1	2
0	1	-	-
1	-	-	-
2	-	1	-
3	-	1	-
4	-	-	1

となり、$\mathrm{reg}\, X = 4$ がわかる。

例 2.11. C を $\mathbb{P}^1 \ni (s:t) \longrightarrow (s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \in \mathbb{P}^3$ で定義される 3 次の有理正規曲線とする。曲線 C の定義イデアル $I(\subset S = k[x,y,z,w])$ は行列 $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{bmatrix}$ の 2×2 小行列式で定義される。

ここで、$f = yw - z^2$, $g = yz - xw$, $h = xz - y^2$ とおく。すると、$I = (f,g,h)$ の極小自由分解は

$$0 \to S(-3) \oplus S(-3) \overset{{}^tA}{\to} S(-2) \oplus S(-2) \oplus S(-2) \overset{[f\ g\ h]}{\to} S \to S/I \to 0$$

となり、$\mathrm{reg}\, C = 2$ が言える。

また、Betti table は

	0	1	2
0	1	-	-
1	-	-	-
2	-	3	2

となる。

射影スキーム $X(\subset \mathbb{P}^n)$ は、$\mathrm{reg}\, X \geq 1$ を満たすが、非退化、つまり、X がどの超平面にも含まれていないときは、$\mathrm{reg}\, X \geq 2$ である。

予想 2.12 (Eisenbud-Goto Conjecture)**.** 非退化射影多様体 $X(\subset \mathbb{P}^n)$ に対して、$\mathrm{reg}\, X \leq \deg X - \mathrm{codim}\, X + 1$ が成立する。

注意 2.13. Eisenbud-Goto 予想の右辺も 2 以上であり、$\deg X = \mathrm{codim}\, X + 1$ のときは、最小次数の多様体と呼ばれ、2 次超曲面、Veronese 曲面、有理正規スクロール、もしくは、これらの錐になることが知られている。また、右辺は、$\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) + 2$ とも書け、予想を大域生成の豊富な直線束に拡張できる。

例 2.14. X が「既約」および「被約」の条件は必要であり、次のような例がある。

1. $\mathbb{P}^3$ の捩れの位置にある直線を $I = (x,y)\cap(z,w) = (xz, xw, yz, yw) \subset k[x,y,z,w]$ とする。

2. $\mathbb{P}^3$ の 2 重直線を $I = (xw - yz, x^2, xy, y^2) \subset k[x,y,z,w]$ とする。

いずれも $\operatorname{reg} I = \deg S/I = \operatorname{ht} I = 2$ となる。

3 Gruson-Lazarsfeld-Peskine の論文

この章では、有名な Gruson-Lazarsfeld-Peskine の論文の筋書きを述べる。ここでは触れないが、原論文では正則量上限の射影曲線と割線の関係にページを割いている。これは、その後の Noma[50, 51] の結果に発展する。

定理 3.1 ([19]). $\operatorname{reg} C \le d + 2 - n$ が成り立つ。等号が成立するのは、次のいずれかの場合である。

1. $d = n$、つまり、C は有理正規曲線

2. $d = n + 1$

3. $d > n + 1$, でかつ C が $(d + 2 - n)$-*secant line* を持つ。

定理 3.2 ([19]). 非退化射影曲線 $C \subseteq \mathbb{P}^n$, $\deg C = d$ が、有理曲線でも楕円正規曲線でもないとき、$\operatorname{reg} C \le d + 1 - n$ が成り立つ。

補題 3.3. 曲線 C の正規化を $p : \widetilde{C} \to C \subseteq \mathbb{P}^n$ とし、$\mathcal{M} = p^*\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$ とおく。C 上の直線束 $\mathcal{A}$ に対して、$H^1(\widetilde{C}, \wedge^2\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) = 0$ であれば、$\operatorname{reg} C \le \mathrm{h}^0(\mathcal{A})$ が成立する。

補題 3.4. $d = \deg p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ とおく。$\mathrm{h}^0(\mathcal{A}) = d + 2 - n$ および $\mathrm{h}^1(\wedge^2\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) = 0$. を満たす豊富な直線束 $\mathcal{A} \in \operatorname{Pic} C$ が存在する。

証明の概略. $p : \widetilde{C} \to C \subseteq \mathbb{P}^n$ のグラフを $\Gamma \subset \widetilde{C}\times\mathbb{P}^n$ とする。射影をそれぞれ $\pi : \widetilde{C}\times\mathbb{P}^n \to \widetilde{C}$ $f : \widetilde{C}\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ と書き、$\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(1) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, $V = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \subseteq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(1))$ とおく。次の完全列は Euler 列のそれぞれの引き戻しである。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi^*\mathcal{M} & \to & V\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{C}\times\mathbb{P}^n} & \to & \pi^*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(1) & \to & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & \to & f^*\Omega_{\mathbb{P}^n}(1) & \to & V\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{C}\times\mathbb{P}^n} & \to & f^*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}(1) & \to & 0, \end{array}$$

すると、p のグラフ $\Gamma(\subseteq \widetilde{C}\times\mathbb{P}^n)$ は $\pi^*\mathcal{M} \to f^*\mathcal{O}_C(1)$ で定義され、完全列

$$\pi^*\mathcal{M}\otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\widetilde{C}\times\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_\Gamma \to 0.$$

を得る。ここで、$\cdot\otimes\pi^*\mathcal{A}$ を取り、Koszul 分解を考えると、

$$\pi^*(\wedge^2\mathcal{M}\otimes\mathcal{A})\otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \to \pi^*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{A})\otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \pi^*\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\Gamma\otimes\pi^*\mathcal{A} \to 0.$$

となり、これより完全列

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{M}\otimes\mathcal{A})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)\xrightarrow{u}\mathrm{H}^0(\mathcal{A})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\to p_*\mathcal{A}\to 0.$$

が得られる。ここで、$\mathcal{J}(\subseteq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ を $p_*\mathcal{A}$ の Fitting イデアル、即ち、 $\mathcal{J}\ =\ \mathrm{Im}\,(\wedge^{n_0}u)$, $n_0=\mathrm{h}^0(\mathcal{A})$ とする。もちろん、$\mathrm{Supp}\,p_*\mathcal{A}=C$ である。

このようにして、u の Eagon-Northcott 複体

$$\cdots\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0-2)^{\oplus}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0-1)^{\oplus}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0)^{\oplus}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{J}\to 0$$

が得られる。ここで ε は全射であり、この複体は C の外では完全であるので、$\mathcal{J}$ が n_0-regular、即ち、$\mathcal{I}_X$ が n_0-regular であることが言える。□

GLP 論文の解説は、Eisenbud[16] にも書かれている。さらに、Ein の講義をまとめた [14], Lecture 24 の証明法は、2 次元以上での Lazarsfeld の方法を射影曲線にも適用した方法でわかりやすい。Eagon-Northcott 複体については、Bruns-Vetter[10] が分かりやすい。ただし、代数幾何の手法がわかり、簡単に済ませたいのであれば、Ein が簡明な解説を述べている。

命題 3.5 ([14], Lecture 24)**.** *スキーム X 上のベクトル束 $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, (*$\mathrm{rank}\,\mathcal{E}=e$,$\mathrm{rank}\,\mathcal{F}=f$*) の写像 $u:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ に対して、次の複体*

$$0\to\wedge^e\mathcal{E}\otimes S^{e-f}(\mathcal{F}^*)\to\cdots\to\wedge^{f+1}\mathcal{E}\otimes S^1(\mathcal{F}^*)\to\wedge^f\mathcal{E}\to\wedge^f\mathcal{F}\to 0,$$

が得られ、これを Eagon-Northcott 複体という。$u\ :\ \mathcal{E}\ \to\ \mathcal{F}$ が全射のとき、Eagon-Northcott 複体は完全列である。

4 Lazarsfeld の構成法と Generic Projection Method

Eisenbud-Goto 予想への試みは、GLP 論文 [19] 以降は、Lazarsfeld の構成法 [27] でなされてきた。Kwak[25] が Mather 理論を取り入れ、3 次元についても弱い意味で成立することを示すまでには、長い年月がかかった。この方法は最終的に Chiantini-Chiarli-Greco[13] によって次の形の定理になった。この章では、その筋書きを述べる。

定理 4.1. *非退化で非特異な射影多様体 $X(\subset\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}})$ に対して、$n=\dim X\leq 14$ であれば、$\mathrm{reg}\,X\leq\deg X-\mathrm{codim}\,X+1+(n-2)(n-1)/2$ が成立する。*

証明の概略を述べよう。一般射影 (generic projection) を $p:X(\subseteq\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}})\to\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ とし、座標変換により、 $p((x_0:\cdots:x_{n+1}:x_{n+2}:\cdots,x_N))=(x_0:\cdots:x_{n+1})$ と書く。p は 'generic' なので、各ファイバーは有限である。ここで標準的な写像を次のように定める。

- $\psi_0:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\to p_*\mathcal{O}_X$: a canonical map
- $\psi_1=\displaystyle\sum_{n+2\leq j\leq N}\phi_{x_j}:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus}\to p_*\mathcal{O}_X$, where $\phi_{x_j}:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)\xrightarrow{x_j}p_*\mathcal{O}_X$
- $\psi_2=\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq N}\phi_{x_ix_j}:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)^{\oplus}\to p_*\mathcal{O}_X$, where $\phi_{x_ix_j}:\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)\xrightarrow{x_ix_j}p_*\mathcal{O}_X$

これらの写像の和を $w = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 : \mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)^{\oplus} \to p_*\mathcal{O}_X$ とすると、次の補題が得られる。

補題 4.2. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}(-3) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}}(-n)$ とおく。全射 $v : \mathcal{F} \to p_*\mathcal{O}_X$ が存在し、$v|_{\mathcal{G}} = w$ を満たすとする。そのとき、$\operatorname{reg} X \le d - N + n + 1 + (n-1)(n-2)/2$ が得られる。

補題 4.3. *If* $p : X(\subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ が *'good'* であれば、全射 $\mathcal{F} \to p_*\mathcal{O}_X$ が存在する。

定義 4.4. 射影 $p : X(\subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ に対して、局所閉集合 $S_j = \{z \in \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}} | \deg p^{-1}(z) = j\}$ とおく。射影 p が 'good' であるとは $\dim S_j \le \max\{-1, n-j+1\}$ for all j のときに言う。

定理 4.5 (Mather 理論 [33])**.** $n = \dim X \le 14$ であれば、 p は *'good'* である。

注意 4.6. Behesti-Eisenbud[9] によると、Lazarsfeld による「一般射影 $p : X(\subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ のファイバーの次数 $\deg p^{-1}(z)$, $n = \dim X$ が指数関数的に大きくなりうる」ということの証明が書かれている。このことは、「一般射影を用いる Eisenbud-Goto 予想へのアプローチ」は高次元ではなかなかうまくはいかないことを示唆している。

5 Noma, Kwak-Park による $\mathcal{O}_X$-regularity 予想の解決

Eisenbud-Goto 予想において、非退化射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して、$\operatorname{reg} X = \operatorname{reg} \mathcal{I}_X \le \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ が示したいことである。これは、$m = \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ とおくとき、(1) $\mathrm{H}^1(\mathcal{I}_X(m-1)) = 0$ および (2) $\mathrm{H}^i(\mathcal{I}_X(m-i)) = 0$, $i \ge 2$ の 2 つを示すことと同じである。つまり、次と同値である。

(1) $X \subset \mathbb{P}^N$ が $(m-1)$-normal であること、つまり、 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m-1)) \to \Gamma(\mathcal{O}_X(m-1))$ が全射であること

(2) $\operatorname{reg} \mathcal{O}_X \le m-1$.

Noma, Kwak-Park は上記の (2) についての結果を得た。ここでは概略だけ述べるが、証明を理解するためには、原論文の参考文献から読まなければならない。

定理 5.1 ([52, 26])**.** 標数 *0* の代数閉体 k 上の非退化で非特異な射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して、 $\mathcal{O}_X$ は $(\deg X - \operatorname{codim} X)$-*regular* である。

証明の概略. $n = \dim X$, $d = \deg X$, $c = \operatorname{codim} X = N - n$ とおく。X の一般的な位置にある $N - n - 1$ 個の点からの内点射影 (inner projection) $p : X(\subset \mathbb{P}^N) \cdots \longrightarrow \bar{X}(\subset \mathbb{P}^{n+1})$ をとる。このとき、$\deg \bar{X} = d - c + 1$ である。

この内点射影の Double Point Divisor を (cf. [7, Appendix Section 3,4])

$$D_{\mathrm{inn}} = -K_X + (d - n - c - 1)H.$$

とすると、 D_{inn} は semiample であり、小平消滅定理を用いると、$\operatorname{reg} \mathcal{O}_X \le d - c$ を得る。
□

6 Buchsbaum環の手法からのアプローチと射影多様体の分類

本章は、Buchsbaum 環の研究の手法が Castelnuovo-Mumford 正則量の上限の問題に応用されたトピックスであり、著者も手がけてきた分野である。正則量を Castelnuovo 型の不等式に現れる $\lceil(\deg X-1)/\operatorname{codim} X\rceil$ の式を用いて上限を求め、その上限を満たす射影多様体を分類することを行う。

定義 6.1. 射影スキーム $X \subset \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$、ただし S は多項式環で $\mathfrak{m} = S_+$ とする。

1. X が ACM であるとは、 $\mathrm{H}^i(\mathcal{I}_X(\ell)) = 0$ $1 \le i \le \dim X, \ell \in \mathbb{Z}$ のときにいう。
2. X が Buchsbaum であるとは、$\dim X \cap L = \dim X - \operatorname{codim} L$ を満たすすべての r-平面 L に対して、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_*(\mathcal{I}_{X\cap L}) = 0$, $1 \le i \le \dim X \cap L$ が成り立つときをいう。

次の定理が初期の結果である。

定理 6.2 (Eisenbud-Goto[15]). 非退化射影多様体 X が *ACM* であるとき、$\operatorname{reg} X \le \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ が成り立つ。

定理 6.3 (Stückrad-Vogel[57]). 非退化射影多様体 X が *Buchsbaum* であるとき、$\operatorname{reg} X \le \lceil(\deg X-1)/\operatorname{codim} X\rceil + 1$ が成り立つ。

定理 6.4 (Trung-Valla[59], Nagel[47]; Yanagawa[62], Nagel[48]; Miyazaki[41]). .

(1) 非退化射影多様体 X が *ACM* であるとする。このとき、$\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = \lceil(\deg X-1)/\operatorname{codim} X\rceil + 1$ であれば、X は最小次数の多様体の因子である。

(2) 非退化射影多様体 X が *Buchsbaum* であるとする。このとき、$\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = \lceil(\deg X-1)/\operatorname{codim} X\rceil + 1$ であれば、X は最小次数の多様体の因子である。

(3) 非退化射影多様体 X が *Buchsbaum* であるとする。このとき、$\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = \lceil(\deg X-1)/\operatorname{codim} X\rceil$ であれば、X は最小次数の多様体もしくは *Del Pezzo* 多様体の因子である。

簡単のために、$\deg X \gg 0$ と書いたが、具体的にも表せる。

注意 6.5. 非退化射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ は、$\deg X \ge \operatorname{codim} X + 1$ が成り立ち、等号が成立するときに、最小次数の多様体という。このとき、X は (a) 2 次超曲面 (b) $\mathbb{P}^5$ 内の Veronese 曲面 (c) 有理正規線織面 もしくは (d) これらの錐であることが知られている。また、Del Pezzo 多様体の定義は [17, Chapter I (6.3)] による。

非退化な Buchsbaum 多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^{n+\dim V}$ に対して、一般超平面切断を繰り返して、射影曲線 $C = V \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim V-1}$ をとる。さらに、一般超平面切断により、0 次元スキーム $X = C \cap H \subseteq H(\cong \mathbb{P}^n)$ をとる。このとき、Buchsbaum 環の性質より、$\operatorname{reg} V = \operatorname{reg} C = \operatorname{reg} X$ が言え、X が 0 次元スキームであることから、

$$\operatorname{reg} X = \min\{m \mid \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_X(m-1)) = 0\} = \min\{t \mid \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X(t))\} + 1$$

となる。つまり、0 次元スキームの点の配置の問題に帰着される。$\operatorname{char} k = 0$ のとき、X は 'uniform position' であり、$\operatorname{char} k > 0$ のとき、は 'uniform position' になるとは限らな

い [55]。しかしながら、正標数の場合も（Ballico による)'linear semi-uniform position' となり、代数的な議論のみで進めることができる。

次の不等式は重要である。

命題 6.6. 射影曲線の一般超平面切断 $X(\subset \mathbb{P}^n)$, $\deg X = d$ に対して、次が成り立つ。

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (d-1)/n \rceil + 1$$

標数 **0** の場合の証明. いわゆる、'Castelnuovo's method' を用いる。$\ell = \lceil (d-1)/n \rceil$ とおく。任意の $P \in X$ に対して、$X \backslash \{P\}$ を ℓ 個のグループに分ける。即ち、

$$X \backslash \{P\} = \{P_1, \cdots, P_n | P_{n+1}, \cdots, P_{2n} | \cdots | P_{(\ell-1)n+1}, \cdots, P_{d-1}\}$$

とする。X は 'uniform position' であるから、ℓ 個の超平面 $H_i = \langle P_{n(i-1)+1}, \cdots, P_{ni} \rangle \not\ni P$, $1 \leq i \leq \ell$ を取り、その和集合を $F = H_1 \cup \cdots \cup H_\ell$ とする。すると、$F \cap X = X \backslash \{P\}$ となるので $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)) \to \Gamma(\mathcal{O}_X(\ell))$ が全射となる。□

標数正の場合の証明.

0 次元スキーム X の座標環を R とし、h-vector を $\underline{h} = (h_0, \cdots, h_s)$ とする。ここで、h-vector とは、$h_i = \dim_k [R]_i - \dim_k [R]_{i-1}$ であり、s は $h_s \neq 0$ を満たす最大の整数である。すると、$h_0 = 1$, $h_1 = (n+1) - 1 = n$, $\deg X = h_0 + \cdots + h_s = d$, $s = \operatorname{reg} X - 1$ は簡単にわかる。

注意 6.7. Uniform Position Lemma は X の Hilbert 多項式を制御し、h-vector の言葉では、$h_i \geq h_1$, $i = 1, \cdots, s-1$ であることを示している。これに対して、Ballico の 'Linear semi-uniform position' の定理 [4] は、$h_1 + \cdots + h_i \geq i h_1$, $i = 1, \cdots, s-1$ を示している。

そこで、標数任意の場合の命題6.6 の証明を続ける。次の命題の (a) は (b) に含まれている。歴史的には、[15] に (a) が述べられており、その後 [57] で (b) が示されている。現在の観点から、原論文に基づいた代数的証明を与える。

補題 6.8. (a) $\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ (b) $\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$

補題の証明. (a) $h_i \geq 1$ for $0 \leq i \leq s$ and $h_1 = n$ であるから、次が成り立つ。

$$\operatorname{reg} X = s + 1 \leq h_0 + h_1 + \cdots + h_s - n + 1 = d - n + 1$$

(b) $h_0 + \cdots + h_s = d$, $h_1 + \cdots + h_{s-1} \geq (s-1) h_1$ であるから、

$$\operatorname{reg} X - 2 + h_s/h_1 = (s-1) + h_s/h_1 \leq (h_1 + \cdots + h_{s-1})/h_1 + h_s/h_1 = (d-1)/n.$$

が成り立つ。したがって、$\operatorname{reg} X - 1 \leq \lceil (d-1)/n \rceil$ が得られる。□

続く補題は、Castelnuovo-Mumford 正則量上限を満たす Buchsbaum 多様体の分類で用いられる。

補題 6.9 (Castelnuovo, Eisenbud-Harris[20]). 射影曲線の一般超平面切断 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対して次が成立する。

1. $\deg X \geq 2n+1$ かつ $h_2 = h_1$ であれば、X は有理正規曲線に含まれる。

2. $\deg X \geq 2n+3$ かつ $h_2 = h_1 + 1$ であれば、X は楕円正規曲線に含まれる。

補題 6.10 ([40, 41])**.**

1. $\deg X \geq n^2 + 2n + 2$ かつ $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil + 1$ であれば、X は有理正規曲線に含まれる。

2. $\deg X \geq n^2 + 4n + 2$ かつ $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil$ であれば、X は楕円正規曲線に含まれる。

補題 6.9 を拡張した次の Harris 予想があり、これが成立すれば補題 6.10 の拡張も得られる。

予想 6.11 (Harris)**.** $1 \leq m \leq n-1$ とする。$\deg X \geq 2n + 2m - 1$ かつ $h_2 = h_1 + m - 1$ であれば、X は、次数が高々 $n + m - 1$ の射影曲線に含まれる。

注意 6.12. 正標数の場合は X が ‘uniform position’ とは限らない。しかしながら、X が ‘uniform position’ でない場合、$\deg X \gg 0$ のとき $\operatorname{reg} X \ll \lceil (d-1)/N \rceil + 1$ となることは [6] の証明から示唆される。

定理 6.4 の証明の概略.

(3) の証明の概略を述べる。C を $\mathbb{P}^{n+1} = \operatorname{Proj} S$ の非退化射影曲線とし、$S = k[x_0, \cdots, x_{n+1}]$, $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_{n+1})$ とする。 補題 6.10 を用いると、定理の仮定より、一般超平面切断 $X = C \cap H$ に対して、X は有理正規曲線上もしくは楕円正規曲線上にある。ここでは、楕円正規曲線 $Z (\subset H \cong \mathbb{P}^n)$, $n \geq 3$ 上にある場合を述べる。Z の定義式が 2 次生成であることに注意する。ここで、$Y \cap H = Z$ を満たす Del Pezzo 曲面 Y を構成したい。

$$\begin{array}{ccccc} X = C \cap H & \subset & Z & \subset & H (\cong \mathbb{P}^n) \\ & & & & \\ C & \subset & Y & \subset & \mathbb{P}^{n+1} \end{array}$$

したがって、C を含む $\mathbb{P}^{n+1}$ の 2 次式で Y を構成するために、次のことを示す。

(a) $\Gamma(\mathcal{I}_{Z/H}(2)) \cong \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$.

(b) $\Gamma(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \to \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$ が全射である。

実際、$X \subseteq Q$ と $Z \not\subseteq Q$ を満たす 2 次超曲面 Q が存在すれば、$X \subseteq Z \cap Q$ となるので、ベズーの定理より、$d \leq 2(n+1)$ となる。これは $d \gg 0$ に矛盾し、(a) は示される。

次に、$\Gamma(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \to \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$ が全射であることを示すために、完全列

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}) & \to & \Gamma_*(\mathcal{I}_{X/H}) \\ \to & \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})(-1) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}) & \to & \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H}), \end{array}$$

を考える。ここで、$\varphi : \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})(-1) \xrightarrow{\cdot h} \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})$ とおく。$h \in [S]_1$ は超平面 H の定義式である。$[\operatorname{Ker} \varphi]_2 = 0$ となること、示せばよい。

Huneke-Ulrich によるソークル補題 (命題 6.13) を用いると、1 次式 $h \in [S]_1$ を適当に（正確には "generic" に）とると、$a_-(\operatorname{Ker}\varphi) > a_-(\operatorname{Coker}\varphi)$ が得られる。したがって、$a_-(\operatorname{Ker}\varphi) > a_-(\operatorname{Soc}(\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H})))$ となる。ここで、 $a_-(\operatorname{Soc}(\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H})))$ を計算する。

Z が ACM であるので、短完全列 $0 \to \mathcal{I}_{Z/H} \to \mathcal{I}_{X/H} \to \mathcal{I}_{X/Z} \to 0$ から、短完全列

$$0 \to \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H}) \to \mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/Z}) \to \mathrm{H}^2_*(\mathcal{I}_{Z/H}) \to 0$$

を得る。ここで、 $\mathrm{H}^2_*(\mathcal{I}_{Z/H}) \cong \mathrm{H}^1_*(\mathcal{O}_Z) \cong k$ であるから、$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H})$ は、0 次成分を除いて、$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/Z})$ の加群の構造に一致している。Serre の双対性によって、$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/Z})$ は $\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))$ の 双対な次数付き S 加群と同型である。つまり、$\operatorname{Soc}(\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/Z}))$ は、$\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))/\mathfrak{m}\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))$ の双対と同型である。そこで、 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Z(X)$ とおくと、 Z は非特異楕円曲線であるから、 $-d-(m-1)(n+1) < 0$ のとき、$\mathrm{H}^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z(m-1)) = 0$ となる。よって、$m \geq (n-d+2)/(n+1)$ に対して、 $\mathcal{F}$ は m-regular である。したがって、$m = \lceil (n-d+2)/(n+1) \rceil$ とおくと、

$$\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z(\ell)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_Z(1)) \to \Gamma(\mathcal{F}(\ell+1))$$

は $\ell \geq m$ のとき、全射となるので、$a_-(\operatorname{Soc}(\mathrm{H}^1_*\mathcal{I}_{X/Z})) \geq -m$ が成立する。即ち、 $d \gg 0$ のとき、$a_-(\operatorname{Soc}(\mathrm{H}^1_*(\mathcal{I}_{X/H}))) \geq 2$ が成立し、$[\operatorname{Ker}\varphi]_2 = 0$ が示された。この操作を繰り返すことにより、定理が証明される。尚、Socle 補題は、標数 0 の場合のみに適用されるが、正標数の場合は別の議論で迂回して定理は証明できる。□

定理 6.13 (Socle Lemma[23])**.** *標数 0 の体 k 上の多項式環を $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ とし、有限生成次数 S 加群を M とする。十分一般の 1 次式 (a generic element) $h \in [S]_1$ に対して、*

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to M(-1) \xrightarrow{\varphi} M \to \operatorname{Coker}\varphi \to 0$$

とする。ここで、$\varphi = \cdot h.$ とおく。このとき、$\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$ であれば、$a_-(\operatorname{Ker}\varphi) > a_-(\operatorname{Soc}(\operatorname{Coker}\varphi))$ が成り立つ。

ここで、有限生成次数 S 加群 N に対して、 $\operatorname{Soc}(N) = [0 : \mathfrak{m}]_N$、$a_-(N) = \min\{i | [N]_i \neq 0\}$ とする。

射影曲線の場合も類似の結果が得られる。

定義 6.14. 射影曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ に対し、Hartshorne-Rao 加群を $M(C) = \mathrm{H}^1{}_*\mathcal{I}_C = \oplus_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^1(\mathcal{I}_C(\ell))$ と定義する。これは次数 S 加群であり、$k(C) = \min\{v \geq 0 \,|\, \mathfrak{m}^v M(C) = 0\}$ とおく。

命題 6.15. 非退化な射影曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ に対して、$\operatorname{reg} C \leq \lceil (\deg C - 1)/\operatorname{codim} C \rceil + k(C).$ が成り立つ。$\deg C \geq 2n^2 + n + 2$ でかつ上記の等号が成立すれば、C は最小次数の曲面の因子となる。

注意 6.16. 次数が十分に大きいという条件は必要である。種数 $g \geq 5$ の超楕円でない射影曲線 C を標準埋め込みで得られた曲線 $C \subseteq \mathbb{P}^{g-1}_k$ を考えると、Castelnuovo-Mumford 正則量の上限を満たすが、最小次数の射影曲面の因子にはなりえない。

注意 6.17. Buchsbaum 多様体を局所 Cohen-Macaulay 多様体に拡張した結果が望まれる。これについては [44] に述べているように、中間次元のコホモロジーを制御する不変量をうまく設定して正則量上限が Castelnuovo 型の不等式で記述することを目指している。

7 McCullough-Peeva による Eisenbud-Goto 予想の否定的解決と Rees-like Algebra

定理 7.1 (McCullough-Peeva[36]). 体 k 上の多項式環の非退化な斉次素イデアルの *Castelnuovo-Mumford* 正則量はその素イデアルの次数のどんな多項式関数でも上限を制御することはできない。

系 7.2. *Eisenbud-Goto* 予想は、一般には成り立たない。

反例をつくる手順

1. 多項式環 S の（必ずしも素でない）斉次イデアル I で $\operatorname{reg} I \gg \deg S/I$ となるイデアルを取る。
2. Rees-lile 代数（もしくは Rees 代数）を用いて、(不定元の次数が 1 とは限らない) 多項式環 T と斉次素イデアル P をつくる。このとき、$\operatorname{reg} P$ と $\deg T/P$ は $\operatorname{reg} I$ と $\deg S/I$ から計算可能に取る。
3. 'Step-by-step homogenization' もしくは 'Prime standardization' を用いて、上記の T を（標準）多項式環 T' にする。ここで、$P' = PT'$ をつくると、$\operatorname{reg} P' = \operatorname{reg} P$ および $\deg T'/P' = \deg T/P$ が成立する。

一般のイデアルについては、正則量の上限が次のように与えられ、命題 7.3 は n についての帰納法により、代数的に証明される。

命題 7.3 ([7]). 多項式環 $k[x_0, \cdots, x_n]$ の斉次イデアル I に対して、$\operatorname{char} k = 0$ の場合、$\operatorname{reg} I \leq (2\mathrm{maxdeg}(I))^{2^{n-1}}$ が成り立つ。一般の場合、$\operatorname{reg} I \leq (2\mathrm{maxdeg}(I))^{n!}$ が成り立つ。

上記の上限は、Eisenbud-Goto 予想からほど遠いが、次の例からほぼ 'best possible' な上限であると考えられている。実際、McCullough-Peeva の反例では、次の例を基に構成している。

例 7.4 (Mayr-Meyer[35]). $k[x_0, \cdots, x_n]$ のイデアル I で $\mathrm{maxdeg}(I) = 4$, $\operatorname{reg} I \geq 2^{2^n} - 1$ を満たすものが存在する。

例 7.5 (Koh[24]). $k[x_1, \cdots, x_{22r-1}]$, $r \in \mathbb{N}$ の 23 個の 2 次式、1 個の 1 次式で生成されたイデアル I_r で $\mathrm{maxdeg}(Syz_1(I_r)) \geq 2^{2^{r-1}}$ を満たすものが存在する。（原論文通りに書いたが、変数を $22r - 2$ 個にして、1 次式なしでもよい。）

定義 7.6. 多項式環 $S = k[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \cdots, f_r)$ の Rees 環は $R(I) = S[It](= \oplus_{d \geq 0} I^d) \subset S[t]$ として、定義される。$\operatorname{Proj} R(I)$ は $\mathbb{A}^n$ の I でのブローアップである。 ここで、$\varphi : S[y_1, \cdots, y_r] \to S[It]$, $\varphi(y_i) = f_i t$ とおくとき、定義イデアル $P = \operatorname{Ker} \varphi$ は計算するのは、一般には困難である。

例 7.7 ([36]). $I = (u^6, v^6, u^2w^4 + v^2x^4 + uvwy^3 + uvxz^3)$ を多項式環 $S = k[u, v, w, x, y, z]$ のイデアルとする。このとき、 Rees 環 $S[It]$ の定義イデアルを $P \subset (T = S[w_1, w_2, w_3])$ とする。Macaulay2 による計算と Bertini の定理を用いて、3 次元射影多様体 X in $\mathbb{P}^5$ で $\deg X = 31$, $\operatorname{reg} X \geq 38$ を満たすものを得る。

定義 7.8. 多項式環 $S = k[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \cdots, f_r)$ の Rees-like 環は $\mathcal{R}L(I) = S[It, t^2] \subset S[t]$ として、定義される。ここで、重み付き多項式環 $T = S[y_1, \cdots, y_r, z]$ を $\deg y_i = \deg f_i + 1$, $\deg t = 2$ として定義する。そこで、$\psi : T = S[y_1, \cdots, y_r, z] \to S[It, t^2]$, $\psi(y_i) = f_i t$ とおくと、定義イデアルは $Q = \operatorname{Ker}\psi (\subset T)$ である。

例 7.9. $k[x]$ のイデアル $I = (x)$ の Rees-like 環 $\mathcal{R}L(I) = k[x, xt, t^2]$ の定義イデアルは $P = (y^2 - x^2 z) (\subset k[x, y, z])$ である。

定理 7.10. 多項式環 $S = k[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \cdots, f_r)$ の *Rees-like* 環の定義イデアル $Q (\subset T = S[y_1, \cdots, y_r, z])$ に対して、$\operatorname{reg} T/Q = \operatorname{reg} S/I + 2 + \sum_{i=1}^r \deg f_i$, $\deg T/Q = 2\prod_{i=1}^r (\deg f_i + 1)$, $\operatorname{ht} Q = r$ となる。

定理 7.10 の証明の概略. まず、定義イデアル $Q \subset T = k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_r, z]$ の極小の生成元を計算すると、$\{y_\alpha y_\beta - z f_\alpha f_\beta | 1 \le \alpha, \beta \le r\}$ および $\{\sum c_{ij} y_i | \sum c_{ij} f_i = 0\}$ となることがわかる。ここで、I の S 加群としての極小自由分解を

$$F_1 \xrightarrow{(c_{ij})} F_0 \xrightarrow{(f_i)} P \to 0$$

と書いた。Q は素イデアルで、z は T/Q 非零因子である。ここで $\bar{T} = T/(z)$, $\bar{Q} = Q\bar{T}$ とおくと、T/Q と $\bar{T}/\bar{Q}$ の Betti 数は一致することがわかる。

さて、$\bar{T} = k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_r]$. の素イデアル $\bar{Q}$ の生成元は $M = (\{\sum_i c_{ij} y_i\})$ および $N = (\{y_i y_j\}) = (y_1, \cdots, y_r)^2$ である。すると、$\bar{T}/\bar{Q}$ の極小自由分解は $(M + N)/N \to \bar{T}/N$ の極小自由分解の写像錐により記述できる。実際、$\bar{T}$ 加群 $M + N/N (\cong M/M \cap N)$ の極小自由分解は S 加群 $\operatorname{Syz}_1^S I$ の極小自由分解から書ける、また、$\bar{T}/\bar{Q}$ の極小自由分解は Eagon-Northcott 複体であるので、これらにより写像錐を記述し、$\operatorname{reg} T/Q$, $\deg T/Q$ が計算できる。□

定義・命題 7.11 (Step-by-step homogenization). 多項式環 $T = k[y_1, \cdots, y_p]$ の重みづけを $\deg y_i > 1$, $i \le q$ および $\deg y_i = 1$, $i > q$. とする。そこで、標準多項式環 $T' = k[y_1, \cdots, y_p, v_1, \cdots, v_q]$ を考え、次数準同型写像 $\nu : T \to T'$ を $\nu(y_i) = y_i v_i^{\deg y_i - 1}$, $i \le q$ および $\nu(y_i) = y_i$, $i > q$ と定義する。これを 'Step-by-step homogenization' と呼ぶ。T の素イデアル P に対して、$P' = PT'$ は T' の素イデアルとなり、T/P と T'/P' の Betti 数は一致することがわかる。

注意 7.12 ([11, 32]). Betti 数を保存する同次化の方法としては、'Step-by-step homogenization' の他に 'Prime Standization' も研究されている。この方法は Ananyan-Hochster[1] の 'homogeneous prime sequence' を用い、特異点を制御することができる。

例 7.13. $\varphi : S \to k[t]$, $\varphi(x) = t$, $\varphi(y) = t^2$, $\varphi(z) = t^3$ で定義された Affine monomial curve のイデアルは多項式環 $S = k[x, y, z]$ において $P = (x^2 - y, xy - z)$ in $S = k[x, y, z]$ と書ける。同次式と考えるために、重みを $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$ とすると、極小自由分解は

$$0 \to S(-5) \to S(-2) \oplus S(-3) \to S \to S/P \to 0.$$

となるので、$\operatorname{reg} P = 4$ が言える。

通常の同次化では、多項式環 $S' = k[x, y, z, w]$ のイデアル $P' = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ が得られ (twited cubic curve)、 $\operatorname{reg} P' = 2$ となる。

一方、Step-by-step homogenization では、多項式環 $T = k[x, y, z, u, w]$ のイデアル $Q = (x^2 - yu, wyu - zu^2)$ が得られ、これは完全交叉であり、$\operatorname{reg} Q = 4$ となる。

定理 7.1 の証明の概略. Koh の例 (7.5) に対して、Rees-lile 環、Step-by-step homogenization を用いて、標準多項式環 R_r の素イデアル P_r を取ると、

- $\deg R_r/P_r \leq 4 \cdot 3^{22r-3} < 2^{50r}$
- $\operatorname{reg} P_r \geq \operatorname{maxdeg}(P_r) \geq 2^{2^{r-1}} + 1 > 2^{2^{r-1}}$,

となり、これは Eisenbud-Goto 予想の反例を与える。□

8 Castelnuovo-Mumford 正則量と Horrocks の判定法

この章では、ベクトル束の Horrocks 判定法を Castelnuovo-Mumford 正則量の観点から捉えることから始め、ベクトル束の分類についてのシジジー理論な観点からの概説を行う。「$\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束は直線束の直和に同型である」という Grothendieck の定理の拡張が次の定理である。

定理 8.1 (Horrocks[22])**.** $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が ACM、即ち、任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して $\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = \oplus_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(\ell)) = 0$ であるとする。このとき、$\mathcal{E}$ は直線束の直和に同型である。

ここで、定理 8.1 の 4 つの証明の概略を述べる。

第 1 の証明の概略 (Okonek-Schneider-Sprindler[53]).
射影空間 $\mathbb{P}^n$ の次元 n についての帰納法である。$n = 1$ は Grothendieck の定理なので、$n \geq 2$ とする。帰納法の仮定から $\psi : \mathcal{E}|_H \cong \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i)$ が得られるので、$\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ とおくと、完全列 $0 \to \mathcal{H}om_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E})(-1) \to \mathcal{H}om_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathcal{H}om_H(\mathcal{F}|_H, \mathcal{E}|_H) \to 0$ と ACM の仮定から、完全列 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_H(\mathcal{F}|_H, \mathcal{E}|_H) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \oplus\mathcal{E}(-a_i - 1)) = 0$ を得る。すると、ψ の延長 $\varphi : \mathcal{E} \to \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ が得られ、これは同型であることが示される。□

第 2 の証明の概略 (Auslander-Buchsbaum[3], Matsumura[34]).
Auslander-Buchsbaum の定理の多項式版を示せばよい。即ち、多項式環 $S = k[x_1, \cdots, x_n]$ 上の有限生成次数 S 加群に対して、$\operatorname{depth}_S M + \operatorname{proj.dim}_S M = n$ となることを示す。$\operatorname{proj.dim}_S M$ についての数学的帰納法を用いる (cf. [34])。M が自由のときは明らかなので、$\operatorname{proj.dim}_S M \geq 1$ とする。ここで、完全列 $0 \to N \to F \to M \to 0$ (ただし、F は次数自由加群) を取り、局所コホモロジーを用いると、帰納法の仮定より証明される。□

第 3 の証明の概略.(Ballico-Malaspina[5], Malaspina-Miyazaki[30])
Castelnuovo-Mumford 正則量を用いた証明を行う。$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、$\operatorname{reg}\mathcal{E} = m$ とおくと、$\mathcal{E}(m)$ は大域生成であるから、全射 $\psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{E}$ が取れる。$\mathcal{E}$ は $(m-1)$-regular でなく、かつ、ACM 束であるから、$\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m-n-1)) \neq 0$ である。Serre の双対性より $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^\vee(m)) \neq 0$ となり、ゼロでない写像 $\varphi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ が存在する。$\varphi \circ \psi$ はゼロでない写像であるから、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$ が $\mathcal{E}$ の直和因子を与える写像になる。これを繰り返す。□

第 4 の証明の概略 (Horrocks[22], Walter[60], Malaspina-Rao[31])
Horrocks のオリジナルなアイディアであるが、ここでは [60] に依る証明の概略を述べる。ACM 多様体上のベクトル束を含む理論は [31] に書かれている。$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して $E = \Gamma_*\mathcal{E}$ とおく。そこで、次数 $S^\vee$ 加群 $E^\vee$(negatively graded!) の極小自

由分解 $0 \to P^{n-1\vee} \to \cdots \to P^{0\vee} \to E^{\vee} \to 0$ を取ります。(depth $E^{\vee} \geq 2$ を用いる。)さらに、この双対を取ると、次数 S 加群の複体 $0 \to E \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$ が得られ、この複体の層化は完全列になることがわかります。ここで、次数 S 加群 E の極小自由分解 $0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^{-1} \to E \to 0$ をつなげて、複体

$$P^{\bullet}: 0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0,$$

を考えると、$\mathrm{H}^i(P^{\bullet}) \cong \mathrm{H}^i_*(\mathcal{E})$ は S 加群として長さ有限であり、特に、$\mathrm{H}^i(P^{\bullet}) = 0$, $i \notin \{1, \cdots, n-1\}$ となる。複体の構成を考えると、次数 S 加群の有界な複体の導来圏 $D^{\flat}(\mathrm{S}{-}\mathbf{Mod})$ の中で、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})$ ということが言える。

さて、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束の安定同値なカテゴリーを $\underline{\mathbb{V}B}$ とおく。ここで、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ に対して、ある直線束の直和 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ があり、$\mathcal{E} \oplus \mathcal{L} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{M}$ を満たすとき、安定同値という。ここで、$C^{\bullet} \in Ob(D^{\flat}(\mathrm{S}{-}\mathbf{Mod}))$ が $\mathrm{H}^i(C^{\bullet})$ が S 上有限加群であり、$\mathrm{H}^i(C^{\bullet}) = 0$, $0 < i < n$ となる充満部分圏を $\mathbb{F}inL$ と書くと、Horrocks の定理は次の通りになる。

定理 8.2. 同型関手 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_* : \underline{\mathbf{VB}} \to \mathbb{F}inL$ はカテゴリーの同値を与える。

$\mathbb{P}^n$ 上の ACM 束は $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) = 0$ を満たすので、Horrocks 対応 (8.2) より、$\mathcal{E}$ は直線束の直和に同型になる。□

定義 8.3. $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbaum 束であるとは、任意の r 平面 $L (\subseteq \mathbb{P}^n)$, $r = 1, \cdots, n$ に対して、$(x_0, \ldots, x_n)\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}|_L) = 0$, $1 \leq i \leq r-1$ が成り立つときをいう。

定義・命題 8.4 (Stückrad-Vogel[58], Schenzel[56]). $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ を体 k 上の多項式環とし、$\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$ とおく。次数 S 加群 M, $\dim M = d$ が Buchsbaum 加群であるとは、次の同値条件が成り立つときにいう。

(i) $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ が同次パラメータイデアル $\mathfrak{q} = (y_1, \cdots, y_d)$ に依らず一定である。

(ii) 任意のパラメータ系 $y_1, \cdots, y_d$, $0 \leq i \leq d$ に対して、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, \cdots, y_i)M) = 0, \quad 0 \leq j \leq d-i-1$ が成り立つ。

(iii) $\tau_{<d}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は $D^{\flat}(\mathrm{S}{-}\mathbf{Mod})$ において ik 線形空間の複体に同型である。

定理 8.5 ([12, 18]). $\mathbb{P}^n$ 上の *Buchsbaum* 束 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E} \cong \oplus\Omega^{k_i}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$ の直和に同型である。

これは、Goto[18] と Chang[12] が独立に証明した。その後、Yoshino[62] による Horrocks 対応を用いた証明がある。著者によるシジジー論的な証明 [45] もあり、それぞれ定理 8.1 の 4 つの証明にほぼ対応している。

注意 8.6. Horrocks 対応やシジジー論的方法は、ベクトル束の Beilinson にも対応している。$\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束で、$\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) \cong k$, $i = 1, 2$ であり、Buchbaum でなければ、Null-Correlation 束ということもわかる。$\mathbb{P}^4$ 上の Horrocks-Mumford 束を始め、Horrocks 対応に関する条件で具体的(環論的に)表すのは今後の問題と言える。

例 8.7. 次の結果は良く知られているかもしれない。しかしながら、多重 Castelnuovo-Mumford 正則量を用いると、証明がわかりやすい。多重 Castelnuovo-Mumford 正則量は [5, 42] の定義に従い、多重射影空間上での Horrocks 判定法に応用されている。

例えば、次の問題を考える。「$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ で、$\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m+n-1$ を満たすものは存在しない。」

実際、多重 Castelnuovo-Mumford 正則量を「うまく」定義すると、Horrocks 判定法の第 3 証明と同じ方法で、$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(t) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(u)$ となり、これは中間次元のコホモロジーを持つから矛盾する。

次は、シジジー論的方法による小結果 [30] である。

例 8.8. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上の既約なベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、次は同値である。

(a) $\mathcal{E} \cong \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}$.

(b) $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}) \neq 0$ かつ $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(1,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(1,0)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-1,0)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,-1)) = \mathrm{H}^3(\mathcal{E}(-1,-1)) = 0$ が成り立つ。

ついでに、次の例 [43] は、Buchsbaum 性の複雑さを表している。

例 8.9. 1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$ は $\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0$, $i = 1, 2$ であるが、Buchsbaum 束でない。

2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(3)$ は $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}) \neq 0$, $\mathrm{H}^3(\mathcal{E}(-3)) \neq 0$. であるが Buchsbaum 束である。

References

[1] T. Ananyan and M. Hochster, Small subalgebras of polynomial rings and Stillman's conjecture. J. Amer. Math. Soc. 33, 291 - 309 (2020).

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris, Geometry of algebraic curves I, Grundlehren der math. Wissenschaften 167, Springer, 1985.

[3] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68(1958), 625 – 657.

[4] E. Ballico, On singular curves in positive characteristic, Math. Nachr. 141 (1989), 267 – 273.

[5] E. Ballico and F. Malaspina, Regularity and cohomological splitting conditions for vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 345 (2011), 137 – 149.

[6] E. Ballico and C. Miyazaki, Generic hyperplane section of curves and an application to regularity bounds in positive characteristic, J. Pure Appl. Algebra 155 (2001), 93 – 103.

[7] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1 – 48, Cambridge University Press 1993.

[8] D. Bayer, I. Peeva and B. Sturmfels, Monomial resolutions. Math. Res. Lett. 5 (1998), 31 - 46.

[9] R. Behesti and D. Eisenbud, Fibers of generic projections, Compositio Math., 146(2010), 435 - 456.

[10] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal rings, Springer LN 1327, 1988.

[11] G. Caviglia, M. Chardin, J. McCullough, I. Peeva and M. Varbaro Regularity of prime ideals. Math. Z. 291 (2019), 421 - 435.

[12] M. C. Chang, Characterization of arithmetically Buchsbaum subschemes of codimension 2 in $\mathbb{P}^n$, J. Differential Geom. 31 (1990), 323 – 341.

[13] L. Chiantini, N. Chiarli and S. Greco, Bounding Castelnuovo-Mumford regularity for varieties with good general projections, J. Pure Appl. Algebra 152 (2000), 57 – 64.

[14] H. Clemens, J. Kollár and S. Mori, Higher Dimensional Complex Geometry, Asterisque 166, SMF, 1088

[15] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra 88 (1984), 89 – 133.

[16] D. Eisenbud, The geometry of syzygies, GTM 229, Springer, 2005.

[17] T. Fujita, Classification theories of polarized varieties, London Math. Soc. Lecture Note Series 155, Cambridge University Press, 1990.

[18] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, ASPM 11(1987), 39 – 64.

[19] L. Gruson, C. Peskine and R. Lazarsfeld, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, Invent. Math. 72(1983), 491 – 506.

[20] J. Harris (with D. Eisenbud), Curves in projective space, Les Presses de l'Université de Montréal, 1982.

[21] L. T. Hoa and C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings, Math. Ann. 301 (1995), 587 – 598.

[22] G. Horrocks, Vector bundles on the punctual spectrum of a ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689 – 713.

[23] C. Huneke and B. Ulrich, General hyperplane sections of algebraic varieties, J. Algebraic Geometry 2 (1993), 487 – 505.

[24] J. Koh, Ideals generated by quadrics exhibiting double exponential degrees. (English summary) J. Algebra 200 (1998), no. 1, 225 - 245.

[25] S. Kwak, Castelnuovo regularity for smooth projective varieties of dimension 3 and 4, J. Algebraic Geom. 7 (1998), 195 – 206.

[26] S. Kwak and J. Park, A bound for Castelnuovo-Mumford regularity by double point divisors, Adv. Math. 364 (2020), 107008.

[27] R. Lazarsfeld, A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces, Duke Math. J. 55 (1987), 423 – 438.

[28] R. Lazarsfeld, Positivity, I, II, Springer, 2004

[29] D. Maclagan and G. Smith, Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity, J. Reine. Angew. Math. 571 (2004), 137 - 164.

[30] F. Malaspina and C. Miyazaki, Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces, Ric. mat. 67(2018), 963 – 968.

[31] F. Malaspina and A. P. Rao, Horrocks correspondence on arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Algebra Number Theory 9(2015), 981 – 1003.

[32] P. Mantero, L. Miller and J. McCullough, Singularities of Rees-like algebras. Math. Z. 297 (2021), 535 - 555.

[33] J. Mather, Generic projections. Ann. Math. 98(1973), 226 - 245.

[34] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge UP, 1986

[35] E. Mayr and A. Meyer, The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals, Adv. Math. 46 (1982), 305 - 329.

[36] J. McCullough and I. Peeva, Counterexamples to the Eisenbud-Goto regularity conjecture, J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), 473 – 496.

[37] J. McCullough and I. Peeva, The regularity conjecture for prime ideals in polynomial rings, EMS Survey Math. Sci. (2020), 173 - 206.

[38] E. Miller and D. Perkinson, Eight Lectures on Monomial Ideals by B. Sturmfels, CoCoA Summer School 1999. https://services.math.duke.edu/˜ezra/Queens/cocoa.pdf

[39] C. Miyazaki and W. Vogel, Bounds on cohomology and Castelnuovo-Mumford regularity, J. Algebra 185 (1996), 626 – 642.

[40] C. Miyazaki, Sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1675 – 1686.

[41] C. Miyazaki, Buchsbaum varieties with next to sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 1909 – 1914.

[42] C. Miyazaki, A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1435 – 1440.

[43] C. Miyazaki, Buchsbaum criterion of Segre products of vector bundles on multiprojective space, J. Algebra 467 (2016), 47 – 57.

[44] C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for graded modules and projective varieties, Beitr. Algebra Geom. 60 (2019), 57 – 65.

[45] C. Miyazaki, On Horrocks-type criteria for vector bundles, 射影多様体の幾何とその周辺 2019 報告集

[46] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59 (1966), Princeton UP.

[47] U. Nagel, On the defining equations and syzygies of arithemetically Cohen-Macaulay varieties in arbitrary characteristic, J. Algebra 175 (1995), 359 – 372.

[48] U. Nagel, Arithmetically Buchsbaum divisors on varieties of minimal degree, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 4381 – 4409

[49] U. Nagel and P. Schenzel, Degree bounds for generators of cohomology modules and Castelnuovo-Mumford regularity, Nagoya Math. J. 152 (1998), 153 – 174.

[50] A. Noma, Multisecant lines to projective varieties, Projective varieties with unexpected properties, 349 - 359, Walter de Gruyter, 2005.

[51] A. Noma, Rational curves of Castelnuovo-Mumford regularity d − r+1, J. Algebra 321 (2009), 2445 - 2460.

[52] A. Noma, Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors., Trans. AMS, 366 (2014), 4603 - 4623.

[53] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3 Birkhäuser, 1980.

[54] I. Peeva and B. Sturmfels, Syzygies of codimension 2 lattice ideals. Math. Z. 229 (1998), 163 - 194.

[55] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p, Math. Ann. 276 (1987), 565 – 579.

[56] P. Schenzel, Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Ringe, Lecture Notes in Math. 907 (1980) Springer

[57] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes. Math. Nachr. 136 (1988) 307 - 320.

[58] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and its applications, Springer, 1986.

[59] N. V. Trung and G. Valla, Degree bounds for the defining equations of arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Math. Ann. 281 (1988), 209 – 218.

[60] C. Walter, Pfaffian subschemes, J. Algebraic Geom. 5(1996), 671 – 704.

[61] K. Yanagawa, On the regularities of arithmetically Buchsbaum curves, Math. Z. 226 (1997), 155 – 163.

[62] Y. Yoshino, Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension, J. Algebra 159(1993), 240 – 264.