ベクトル束の Horrocks-type 判定法へのアプローチ
— 可換環論・シジジー手法・Castelnuovo-Mumford 正則量

宮崎　誓 (Chikashi Miyazaki) *

熊本大学大学院先端科学研究部

cmiyazak@kumamoto-u.ac.jp

本稿の目的は、射影空間上のベクトル束の Horrocks 型の分裂判定法についての研究 [12] の概説を述べることである。射影空間 $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束は、Grothendieck の定理より、直線束の直和に同型になる。Horrocks の定理は、これを $\mathbb{P}^n$ 上に拡張したものである。

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$ を代数閉体 k 上の多項式環、$\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$、$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ を射影空間とする。$\mathcal{E}$ を $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束、$M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ は次数 S 加群である。

ベクトル束 $\mathcal{E}$ が、ACM 束、Buchsbaum 束、quasi-Buchsbaum 束というのは、次数 S 加群の Cohen-Macaulay、Buchsbaum、quasi-Buchsbaum という環論的性質であるが、ここではベクトル束のコホモロジーとして定義する。

定義 1. (i) $\mathcal{E}$ が ACM 束であるとは、$\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0$, $2 \le i \le n-1$ のときにいう。

(ii) $\mathcal{E}$ が quasi-Buchsbaum 束であるとは、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0$, $2 \le i \le n-1$ のときにいう。

(iii) $\mathcal{E}$ が Buchsbaum 束であるとは、$\mathbb{P}^n$ の任意の r 部分空間 $L(\cong \mathbb{P}^r)$, $2 \le r \le n$ に対して、$\mathcal{E}|_L$ が quasi-Buchsbaum 束となるときにいう。

定理 2 (Horrocks [8])**.** 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が ACM 束であれば、直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)$ の直和に同型である。

この定理には、いくつかの証明がある。ベクトル束の教科書である Okonek-Schneider-Spindler [14] には、n についての帰納法での証明が書かれている。また、可換環論の教科書である Matsumura [11] は、Auslander-Buchsbaum の定理 [1] として、M の射影次元についての帰納法により証明が与えられている。実は、Horrocks のオリジナルな証明は難しいけれど、導来圏を用いた解説 [10, 17] からは深い結果が読み取れる。

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (21K03167) Japan Society for the Promotion of Science.

定義 3 ([5, 13])**.** $\mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$, 整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0, i \geq 1$ が成り立つとき、$\mathcal{F}$ が m-regular であるといい、その最小の m を $\mathcal{F}$ の Castelnuovo-Mumford 正則量 $\mathrm{reg}\,\mathcal{F}$ と書く。

命題 4. $\mathcal{F}$ が m-regular であれば、$(m+1)$-regular であり、$\mathcal{F}(m)$ は大域生成となる。

Castelnuovo-Mumford 正則量を用いた定理 2 の証明 (cf. [9]) を紹介する。

$m = \mathrm{reg}\,\mathcal{E}$ とおくと、$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus} \to \mathcal{E}(m)$ を得る。また、$\mathcal{E}$ は $(m-1)$-regular でなく、中間次元のコホモロジーは消滅するから、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(m-n-1)) \neq 0$ が得られる。Serre の双対性を用いると、$\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee(-m)) \neq 0$ となり、$\psi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ を得る。よって、合成写像 $\psi \circ \varphi$ は零写像ではなく、分裂する。したがって、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$ を直和因子に持つ。この操作を繰り返せばよい。 □

さて、ACM 束の分類を Buchsbaum 束に拡張した定理が次である。Buchsbaum 環の理論は Stückrad-Vogel [15] が詳しい。

定理 5 (Chang [3], Goto [7])**.** 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が ACM 束であれば、微分 p 形式の層の捩れ $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(\ell)$ の直和に同型である。

Goto, Chang は、異なった手法で独立に示した。ここでは、シジジーを用いた証明法 (cf. [9, 12]) のポイントを紹介する。

ベクトル束 $\mathcal{E}$ が中間次元のコホモロジーを持つとする。例えば、$s(\neq 0) \in \mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \neq 0$ を取り、Serre の双対性より、対応する元 $t(\neq 0) \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1)) \neq 0$ が取れる。Koszul 複体から得られる完全列

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\oplus}(1) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\oplus}(p) \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{E}^\vee(-n-1) \to \mathcal{E}^{\vee\oplus}(-n) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\vee\oplus}(-p-1) \to \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

から、Buchsbaum 理論を用いて、$\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$, $\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ により、持ち上げ $\varphi(f) = s$, $\psi(g) = t$ が取れる。可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) & \to & \mathrm{H}^0(\Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) & \cong & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \otimes \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1)) & \to & & & \mathrm{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)),
\end{array}$$

を考えると、$\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ は同型 $g \circ f$ を与える。したがって、$\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ は $\mathcal{E}$ の直和因子となる。 □

最後に、$\mathbb{P}^3$ 上の quasi-Buchsbaum 束の分類に進もう。

$\mathbb{P}^3$ 上の Null-correlation 束を定義しよう。$S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ に対して、$S \ni 1 \to (x_1, -x_0, x_3, -x_2) \in S(1)^{\oplus 4}$ により、$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(2)$ を定義する。単射で余核はベクトル束になり、

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \to \mathcal{N}^\vee \to 0$$

によって、Null-correlation 束 $\mathcal{N}$ を定義する。ランクは 2 であり、自己双対である。

命題 6 (Ellia-Sarti [6])**.** $\mathbb{P}^3$ 上の階数 2 の安定な *quasi-Buchsbaum* 束は Null-correlation 束の捩れに同型である。

Barth の Restriction 定理 [2] が命題 6 の証明の鍵である。

論文 [12] の主結果の一つは次の定理である。

定理 7. $\mathbb{P}^3$ 上の階数 3 以下の既約なベクトル束は $\mathcal{E}$ が $\dim_k \mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) = \dim_k \mathrm{H}^2_*(\mathcal{E}) = 1$ を満たすとき、Null-correlation 束の捩れに同型である。

証明の概略. $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(-\ell)) \neq 0$ に対応する拡大 $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\ell) \to 0$ を考えると、$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{F}) = 0$, $\dim_k \mathrm{H}^2_*(\mathcal{F}) = 1$ であるから、Buchbaum 束となり、$\mathcal{F}$ は定理 5 より、微分 2 形式の層の捩れに同型になる。よって、$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \to \mathcal{E}(\ell - 1) \to 0$ となるので、$\mathcal{E} \cong \mathcal{N}^\vee(-\ell + 1)$ となる。□

この定理に対して、可換環論の立場で、quasi-Buchsbaum 環の構造定理を目指してシジジー論的手法を考えてみる。

定義・命題 8 ([16])**.** 次数 S-加群 M の斉次パラメータ系の一部 $f_1, \cdots, f_e$ に対して、次が成立するとき、「標準」であるという。ただし $\mathfrak{q}_j = (f_1, \cdots, f_j)$, $0 \leq j \leq e$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_e$ とする。

$$\mathfrak{q}\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M/\mathfrak{q}_j M) = 0, \quad i, j \geq 0,\ i + j < \dim M.$$

S-加群 M の任意のパラメータ系が「標準」であれば、M は Buchsbaum である。 □

$\mathbb{P}^3$ 上の quasi-Buchsbaum 束 $\mathcal{E}$ を考えよう。$S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $\mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ とおく。このとき、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = 0$, $i = 1, 2$, $\mathrm{H}^0_\mathfrak{m}(M) = 0$ となる。

定義 9. 上記の条件のとき、標準線形パラメータ系 $y_1, y_2 \in S_1$、つまり、$y_1\mathrm{H}^1_\mathfrak{m}(M/y_2M) = y_2\mathrm{H}^1_\mathfrak{m}(M/y_1M) = 0$ であるとき、M を pseudo-Buchsbaum と呼ぶ。
M が quasi-Buchsbaum であるが、pseudo-Buchsbaum でないとき、M を nonstandard-Buchsbaum と呼ぶ。

次も [12] の主結果の一つである。

定理 10. $\mathbb{P}^3$ 上の既約なベクトル束が $\mathcal{E}$ が $\dim_k \mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) = \dim_k \mathrm{H}^2_*(\mathcal{E}) = 1$ を満たすとする。$\mathcal{E}$ が *nonstandard Buchsbaum* であれば、$\mathcal{E}$ は *null-correlation* 束に同型である。

謝辞. 本稿は、研究集会「代数幾何学とその周辺の話題」（休暇村南阿蘇）2023 年 9 月 10 日-13 日 での講演に基づくものである。参加者に感謝をします。

参考文献

[1] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68(1958), 625–657.

[2] W. Barth, Some property of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$, Math. Ann., 226(1977), 125-150.

[3] M. C. Chang, Characterization of arithmetically Buchsbaum subschemes of codimension 2 in $\mathbb{P}^n$, J. Differential Geom. 31 (1990), 323–341.

[4] M. C. Chang, Some remarks on Buchsbaum bundles, J. Pure Appl. Algebra 152 (2000), 49–55.

[5] D. Eisenbud, The geometry of syzygies, GTM 229, Springer, 2005.

[6] Ph. Ellia and A. Sarti, On codimension two k-Buchsbaum subvarieties of $\mathbb{P}^n$, Commutative Algebra and algebraic geometry (Ferrara), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 206, Dekker, New York, 1999, pp.81-92.

[7] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, ASPM 11(1987), 39–64.

[8] G. Horrocks, Vector bundles on the punctual spectrum of a ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689 – 713.

[9] F. Malaspina and C. Miyazaki, Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces, Ric. mat. 67(2018), 963–968.

[10] F. Malaspina and A. P. Rao, Horrocks correspondence on arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Algebra Number Theory 9(2015), 981–1003.

[11] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge UP, 1986

[12] C. Miyazaki, Syzygy theoretic approach to Horrocks-type criteria for vector bundles, preprint.

[13] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59 (1966), Princeton UP.

[14] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3 Birkhäuser, 1980.

[15] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and its applications, Springer, 1986.

[16] N. V. Trung, Towards a theory of generalized Cohen-Macaulay modules, Nagoya Math. J. 102 (1986), 1-49

[17] C. H. Walter, Pfaffian subschemes, J. Algebraic Geom. 5(1996), 671–704.