Castelnuovo-Mumford regularity of polynomial ideals and syzygy theoretic approach to vector bundles

宮崎　誓（熊本大学大学院先端科学研究部）

日本数学会年会　特別講演（代数学） 2024 年 3 月 17 日

Outline

1 Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質
- Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質
- Eisenbud-Goto 予想

2 Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

3 Castelnuovo-Mumford 正則量の漸近的性質

4 ベクトル束の分裂判定法とシジジーの手法
- Horrocks 判定法
- Buchsbaum 束
- Null-correlation 束と quasi-Buchsbaum 環

Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質

記号

k : 代数閉体
$S = k[x_0, \cdots, x_n]$: 多項式環
$\mathfrak{m} = S_+ = (x_0, \cdots, x_n)$
$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$: 射影空間

定義・命題 (Mumford)

$\mathcal{F}$: $\mathbb{P}^n$ 上の連接層, $m \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{F}$: m-regular $\iff \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0,\ i \geq 1$

$\iff \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(j)) = 0,\ i \geq 1,\ i + j \geq m \ \Rightarrow \mathcal{F}(m)$: 大域生成

$$\operatorname{reg} \mathcal{F} := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{F} \text{ is } m\text{-regular}\}$$

$X \subseteq \mathbb{P}^n$: 射影スキーム

$\operatorname{reg} X := \operatorname{reg} \mathcal{I}_X$: Castelnuovo-Mumford 正則量

Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質

定義・命題 (Continued)

$\mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が m-regular であれば,

(1) $\mathcal{F}$: $(m+1)$-regular

(2) $\Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to \Gamma(\mathcal{F}(m+1))$: 全射

注意

Castelnuovo-Mumford 正則量は、多重射影空間・グラスマン多様体上、あるいは大域生成な豊富な直線束を用いて、定義を拡張できるが、上記の (1)(2) の性質が保てるかが鍵である。

定義

M: 有限生成次数 S 加群
$a_i(M) = \max\{\ell \in \mathbb{Z} | [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)]_\ell \neq 0\}$, $i = 0, \cdots, n+1$
$\mathrm{reg}\, M = \max\{a_i(M) + i | i = 0, \cdots, n+1\}$: Castelnuovo-Mumford 正則量
$d(M)$: M の最小の生成元の最大次数

Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質

注意

$X \subseteq \mathbb{P}^n$: 射影スキーム
$I := \Gamma_* \mathcal{I}_X = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(\ell))$: X の定義イデアル
$R := S/I$: X の座標環
このとき，$d(I) \leq \operatorname{reg} I$, $\operatorname{reg} X = \operatorname{reg} \mathcal{I}_X = \operatorname{reg} R + 1 = \operatorname{reg} I$ となる

イデアル I の次数 S 加群としての極小自由分解は有限である。
(Hilbert のシジジー定理)

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to I \to 0$$

ここで，$F_i = \oplus_j S(-\alpha_{i,j})$ は次数自由 S 加群であり，写像 $F_{i+1} \to F_i$ 多項式が成分の行列で書ける

定理 (cf. Eisenbud-Goto, Bayer-Mumford)

$\operatorname{reg} X = \max_{i,j}\{\alpha_{i,j} - i\}$

Castelnuovo-Mumford 正則量は定義イデアルの複雑さを表す

Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質

命題 (Eisenbud-Goto)

次数 S 加群 M が m-regular であるための必要十分条件は $M_{\geq m} := \oplus_{\ell \geq m} M_\ell$ が m 線形分解を持つことである

$$0 \to F_s \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M_{\geq m} \to 0,$$

ここで, $F_i = \oplus S(-m-i)$, $i = 0, \cdots, s$ は次数自由 S 加群である

証明

(E-G) 完全列 $0 \to M_{\geq m} \to M \to M/M_{\geq m} \to 0$ から, 完全列 $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$, $i \geq 2$ および $0 \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \to \mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \to M/M_{\geq m} \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M_{\geq m}) \to \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \to 0$ が得られ, $M_{\geq m}$ が m-regular となる

(Lazarsfeld) 完全列 $0 \to \mathcal{F}_1 \to \Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \to \mathcal{F} \to 0$ から, $\mathcal{F}_1$ は $(m+1)$-regular である

Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的性質

例

(1) $X \subseteq \mathbb{P}^n$: 完全交叉 $(d_1, \cdots, d_r)$
Koszul 複体が極小自由分解を与え、$\operatorname{reg} X = d_1 + \cdots + d_r - r + 1$ となる

$$0 \to S(-d_1 - \cdots - d_r) \to \cdots \to \oplus_{j=1,\cdots,r} S(-d_j) \to S \to S/I \to 0$$

(2) $C : \mathbb{P}^1 \ni (s:t) \longrightarrow (s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \in \mathbb{P}^3$: 有理正規曲線
イデアル $I \subset S = [x, y, z, w]$: $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{bmatrix}$ の小行列式で生成
$I = (f, g, h)$, $f = yw - z^2$, $g = yz - xw$, $h = xz - y^2$ の極小自由分解は,
Hilbert-Burch の定理で決まり、$\operatorname{reg} C = 2$ となる

$$0 \to S(-3) \oplus S(-3) \xrightarrow{{}^tA} S(-2) \oplus S(-2) \oplus S(-2) \xrightarrow{[f\ g\ h]} S \to S/I \to 0$$

Eisenbud-Goto 予想

注意

(1) $\operatorname{reg} X \geq 1$

(2) $X(\subset \mathbb{P}^n)$ が $\mathbb{P}^n$ のどの超平面に含まれない（非退化） $\Rightarrow \operatorname{reg} X \geq 2$

予想 (Eisenbud-Goto 予想 (Regularity Conjecture))

$X(\subset \mathbb{P}^n)$: 非退化射影多様体 $\Rightarrow \operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1$?

注意

'既約' '被約' の仮定は必要

(1) Skew lines in $\mathbb{P}^3$, $I = (x, y) \cap (z, w) \subset k[x, y, z, w]$

(2) A double line in $\mathbb{P}^3$, $I = (xw - yz, x^2, xy, y^2) \subset k[x, y, z, w]$

$\operatorname{reg} I = \deg S/I = \operatorname{ht} I = 2$.

Eisenbun-Goto 予想

これまでの結果

(1) $\dim X = 1$: Gruson-Lazarsfeld-Peskine, 1983

(2) $\dim X = 2$, smooth, char k $= 0$: Lazarsfeld, 1987

(3) $\dim X = 3$, smooth, char k $= 0$

$$\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 2$$: Kwak, 1998

(4) トーリック多様体 $\operatorname{codim} X = 2$: Peeva-Sturmfels, 1998

(5) $\dim X = n \leq 14$, smooth, char k $= 0$: : Chiantini-Chiarli-Greco, 2000

$$\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1 + (n-1)(n-2)/2$$

(6) smooth, char k $= 0$, $\mathcal{O}_X$-regularity では成立 : Noma 2014, Kwak-Park 2020

(7) $\dim X \geq 3$, singular, Conterexamples : McCullough-Peeva, 2018

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

定義

$X \subset \mathbb{P}^n$: 射影スキーム, $\dim X = d$
$S = k[x_0, \cdots, x_n]$: 多項式環, $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$
$I = \Gamma_*(\mathcal{I}_X)$: 定義イデアル, $R = S/I$: 座標環

(1) X : ACM $\Leftrightarrow$ R : Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(R) = \mathrm{H}^i_*(\mathcal{I}_X) = 0$, $1 \le i \le d$

(2) X : quasi-Buchsbaum $\Leftrightarrow$ R : quasi-Buchsbaum $\Leftrightarrow \mathfrak{m}\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$, $1 \le i \le d$

(3) X : Buchsbaum $\Leftrightarrow$ R : Buchsbaum $\Leftrightarrow \dim X \cap L = \dim X - \operatorname{codim} L$ を満たす任意の r 平面に対して、$X \cap L$ が quasi-Buchsbaum となる

定理 (Eisenbud-Goto 1984; Stückrad-Vogel 1988)

(1) $X \subset \mathbb{P}^n$: ACM 多様体 i.e. R : Cohen-Macaul;ay 整域
$\Rightarrow \operatorname{reg} X \le \deg X - \operatorname{codim} X + 1.$

(2) $X \subset \mathbb{P}^n$: Buchsbaum 多様体 i.e. R : Buchsbaum 整域
$\Rightarrow \operatorname{reg} X \le \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

注意 (証明のポイント)

R : Buchsbaum 次数環, $h \in S_1$: $\dim R/hR = \dim R - 1$ に対して,
$\operatorname{reg} R = \operatorname{reg} R/hR$, 超平面切断で正則量は不変

射影曲線の超平面切断には,UPP(Uniform Position Principle) が成り立つ

定理 (Trung-Valla 1988, Nagel 1995; Yanagawa 1997, Nagel 1999; Miyazaki 2011)

(1) $X \subset \mathbb{P}^n$: Buchsbaum, $\deg X \gg 0$, $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$
$\Rightarrow$ 最小次数の多様体の因子

(2) $X \subset \mathbb{P}^n$: Buchsbaum, $\deg X \gg 0$, $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil$
$\Rightarrow$ 最小次数の多様体もしくは Del Pezzo 多様体の因子

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

証明の概略

$V \subseteq \mathbb{P}^{n+\dim V}$: Buchsbaum 多様体
$C = V \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim V - 1}$: 射影曲線
$X = C \cap H \subseteq H(\cong \mathbb{P}^n)$: 射影曲線の一般超平面切断

$\Rightarrow \operatorname{reg} V = \operatorname{reg} C = \operatorname{reg} X$

$$\operatorname{reg} X = \min\{m \mid \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_X(m-1)) = 0\} = \min\{t \mid \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X(t))\} + 1$$

(i) $\operatorname{char} k = 0$, X は uniform position
任意の $P \in X$ に対して, $F \cap X = X \setminus \{P\}$ を満たす超平面の和集合 F をとる
Castelnuovo's method

(ii) $\operatorname{char} k > 0$, X は uniform position とは限らない
$\underline{h} = (h_0, \cdots, h_s)$: X の座標環 R の h-vector
$h_i = \dim_k [R]_i - \dim_k [R]_{i-1}$, s は $h_s \neq 0$ を満たす最大の整数.
$h_0 = 1$, $h_1 = (n+1) - 1 = n$, $\deg X = h_0 + \cdots + h_s = d$ and $s = \operatorname{reg} X - 1$

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

補題 (Uniform Position Lemma(Griffiths-Harris, Ballico etc.))

$$\operatorname{char} k = 0,\ h_i \geq h_1,\ i = 1, \cdots, s-1$$

$$\operatorname{char} k > 0,\ h_1 + \cdots + h_i \geq i h_1,\ i = 1, \cdots, s-1$$

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (d-1)/n \rceil + 1$$

証明の概略

$h_0 + \cdots + h_s = d$ と $h_1 + \cdots + h_{s-1} \geq (s-1)h_1$ から $\operatorname{reg} X - 2 + h_s/h_1 = (s-1) + h_s/h_1 \leq (h_1 + \cdots + h_{s-1})/h_1 + h_s/h_1 = (d-1)/n$

補題 (Castelnuovo, Eisenbud-Harris)

$X \subset \mathbb{P}^n$: 射影曲線の一般超平面切断

(1) $\deg X \geq 2n+1,\ h_2 = h_1 \Rightarrow X$ は有理正規曲線上

(2) $\deg X \geq 2n+3,\ h_2 = h_1 + 1 \Rightarrow X$ は楕円正規曲線上

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

補題 (char k =0 for simplicity)

(1) $\deg X \geq n^2 + 2n + 2$, $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil + 1$
$\Rightarrow X$ は有理正規曲線上

(2) $\deg X \geq n^2 + 4n + 2$, $\operatorname{reg} X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil$
$\Rightarrow X$ は楕円正規曲線上

証明の概略

Z の定義式を持ち上げること

$$\begin{array}{ccccccc} X = C \cap H & \subset & Z & \subset & H (\cong \mathbb{P}^n) \\ C & \subset & & \subset & \mathbb{P}^{n+1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Socle Lemma (Huneke-Ulrich 1993)

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

定義

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$, $\mathfrak{m} = S_+ = (x_0, \cdots, x_n)$
M : 有限生成次数 S 加群, $\dim M = d + 1$
$v(\geq 1) \in \mathbb{Z}$
M : v-Buchsbaum $\iff$ $\mathfrak{m}^v \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, $1 \leq i \leq d$
M : strongly v-Buchsbaum $\iff$ 任意の同次パラメータ系 $\{f_1, \cdots, f_{d+1}\}$ に対して $M/(f_1, \cdots, f_j)M$, $j = 0, \cdots, d$: v-Buchsbaum

定理 (Nagel-Schenzel 1998, Miyazaki-Vogel 1996)

$X \subset \mathbb{P}^n$: 非退化射影多様体

(1) X : v-Buchsbaum, $v \geq 1 \Rightarrow \operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + v \dim X$

(2) X : strongly v-Buchsbaum, $v \geq 1$
$\Rightarrow \operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + (v - 1) \dim X + 1.$

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

予想 (Hoa)

$X \subset \mathbb{P}^n$: 非退化射影多様体, strongly v-Buchsbaum, $v \geq 1$
$\Rightarrow \operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + v$?

定義

$C \subset \mathbb{P}^n$: 射影曲線
$M(C) = \mathrm{H}^1{}_*\mathcal{I}_C = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^1(\mathcal{I}_C(\ell))$: Hartshorne-Rao 加群
$k(C) = \min\{v \geq 0 \mid \mathfrak{m}^v M(C) = 0\}$

命題 (Miyazaki 2000)

$C \subset \mathbb{P}^3$: 非退化射影曲線 $\Rightarrow \operatorname{reg} C \leq \lceil (\deg C - 1)/\operatorname{codim} C \rceil + k(C)$

$\operatorname{char} k = 0$ のとき, $\deg C \geq 10$, $\operatorname{reg} C = \lceil (\deg C - 1)/\operatorname{codim} C \rceil + k(C)$ ならば, C は 2 次超曲面 $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ 上の $(a, a+2)$ または $(a, a+3)$ の因子である

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

定義

M: 有限生成次数 S 加群, $\dim M = d \geq 1$, equi-dimentional,
$M_{\mathfrak{p}}$: Cohen-Macaulay, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

$a_i(M) = \max\{\ell | [\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)]_\ell \neq 0\}$, $i \geq 0$
$a(M) = a_d(M)$: a-invariant of M
$\mathrm{reg}\, M = \max\{a_i(M) + i | 0 \leq i \leq d\}$

定義

M の同次パラメータ系 $\{y_1, \cdots, y_d\}$ が標準であるとは, 次が成り立つときにいう

$$(y_1, \cdots, y_d)\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, \cdots, y_j)M) = 0, \quad i + j \leq d - 1$$

$\mathfrak{m}$ 準素イデアル $\mathfrak{q}$ が M 標準とは $\mathfrak{q}$ に含まれる任意の同次パラメータ系が標準であるときにいう

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

定理 (Hoa-Miyazaki 1995)

$R = S/I$, $\dim R = d$ において、イデアル $\mathfrak{m}^v$ が標準であるとき次が成立

$a_i(R) + i \le a(R) + d + (v-1)(d+1-i) + 1,\ i = 0, \cdots, d-1$

証明の概略

$y_1, \cdots, y_d$, $v = \deg y$ が標準パラメータ系の一部のとき、完全列

$$0 \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(R) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(R/y_jR) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(R)(-v) \to 0 \quad 0 \le i \le d-2$$

$$0 \to \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(R) \to \mathrm{H}^{d-1}_{\mathfrak{m}}(R/y_jR) \to \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{m}}(R)(-v) \to \mathrm{H}^{d}_{\mathfrak{m}}(R) \to 0$$

$a_i(R) + v \le a_{i-1}(R/yR)$, $a_i(R) \le a_i(R/yR)$ が得られる

これを繰り返すと、$a_i(R) + vi \le a(R/(y_1, \cdots, y_d)R)$ となる

Buchsbaum 環の手法と Castelnuovo 型の正則量の上限

証明の概略

$w \in R_s$, $s = a(R) + vd + 1 (\geq 1)$ に対して、$\mathfrak{m}^v w \subseteq (y_1, \cdots, y_d)R$ を示す。

完全列 $\sum R_{y_1 \cdots \hat{x}_i \cdots y_d} \xrightarrow{\psi} R_{y_1 \cdots y_d} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R) \to 0$ において,
$\varphi(w/y_1 \cdots y_d) \in \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)_{s-vd} = \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(R)_{a(R)+1} = 0$ となるから,
$w/(y_1 \cdots y_d) = \sum_{i=1}^d w_i/(y_1 \cdots \hat{y}_i \cdots y_d)^\ell$. が得られる

$$w \in [(y_1^{\ell+1}, \cdots, y_d^{\ell+1}) : (y_1 \cdots y_d)^\ell] \subseteq (y_1, \cdots, y_d) + \sum [(y_0, \cdots, \hat{y}_i, \cdots, y_d) : \langle \mathfrak{m} \rangle]$$

ただし, $[J : \langle \mathfrak{m} \rangle] = \{x \in R | \mathfrak{m}^\ell x \in J, \ell \gg 0\}$

$\mathfrak{m}^v$ は標準イデアルだから、$\mathfrak{m}^v w \in (y_1, \cdots, y_d)R$ となる,

$$a(R/(y_1, \cdots, y_d)R) \leq s + v - 1$$

故に、$a_i(R) + i \leq a(R/(y_1, \cdots, y_d)R) - (v-1)i \leq s + (v-1)(1-i)$
$\leq a(R) + d + (v-1)(d+1-i) + 1$ となり、定理は証明された。

Castelnuovo-Mumford 正則量の漸近的性質

定理 (Bertram-Ein-Lazarsfeld 1991)

$V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: 非特異多様体, $c = \operatorname{codim} V$
$\mathcal{I}_V = \tilde{I}$, $I = (f_1, \cdots, f_r)$, $\deg f_i = d_i$, $d_1 \geq \cdots \geq d_r$

$\Rightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_V^q(\ell)) = 0$, $i \geq 1$, $\ell \geq d_1 q + d_2 + \cdots + d_c - n$

定理 (Cutkosky-Herzog-Trung 1999, Kodiyalam 2000)

$I \subset S = k[x_1, \cdots, x_n]$: 斉次イデアル
整数の組 $d, b, s \in \mathbb{Z}$ が存在して, $\operatorname{reg} I^m = dm + b$, $m \geq s$

証明の概略

STEP I. 定数 $A, B \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{reg} I^m \leq Am + B, m \gg 0$, $A, B \in \mathbb{Z}$ を示す
STEP II. J : I の節減, つまり, $I^q = JI^{q-1}$ となる $q \geq 1$
$d = d(J)$ が最小となるような J をとると, $dm \leq \operatorname{reg} I^m \leq dm + b, m \gg 0$ が成立
STEP III. $\operatorname{reg} I^m = dm + b_m$, $m \gg 0$. が上記からわかるが, b_m が定数を示す

Castelnuovo-Mumford 正則量の漸近的性質

定理 (Eisenbud-Harris 2010)

射影スキーム $V \subset \mathbb{P}^n$ に対して, $L \cap V = \phi$ となる $\mathbb{P}^n$ の部分線形空間 L をとる。
L を中心とする線形射影 $\varphi : V \to \mathbb{P}^m$ を考える。
L の元で生成される V の座標環のイデアルを $J \subset R_V$ とする。

このとき, $\max\{\operatorname{reg} \varphi^{-1}(x) | x \in \mathbb{P}^m\} = b + 1$ が成り立つ。
ただし、b は $\mathfrak{m}^{t+b} \subseteq J^t$, $t \gg 0$ を満たす最小の整数である。

命題

$\varphi : \mathbb{P}^1 = \operatorname{Proj} k[x, y] \to \mathbb{P}^n$: $V \subset \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ による有限射 (finite morphism)
I : V で生成される $k[x, y]$ のイデアル
$\Rightarrow \operatorname{reg} I^m = dm + r - 1$, $q \gg 0$, r はファイバーの個数

命題 (Mather's nice dimension)

$\mathbb{C}$ 上の $n(\leq 14)$ 次元非特異射影多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^N$ の座標環 R の一般的な d 次同次式 $f_1, \cdots, f_{n+2}$ で生成されるイデアルを $I \subset R$ とする。
このとき、$\mathfrak{m}^{t+n} \subset I^t$, $t \gg 0$ が成り立つ。

Horrocks 判定法

記号

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$, $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$: 多項式環
$\mathcal{E}$: $\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ のベクトル束
$M = \Gamma_*(\mathcal{E})$: 有限生成次数 S 加群, $M_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ は自由
$\mathrm{H}^0_\mathfrak{m}(M) = \mathrm{H}^1_\mathfrak{m}(M) = 0$, $\mathrm{H}^{i+1}_\mathfrak{m}(M) \cong \mathrm{H}^i_*(\mathcal{E})$, $i \geq 2$

定理 (Horrocks 1964)

$\mathcal{E}$: ACM, つまり, $\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = \mathrm{H}^{i+1}_\mathfrak{m}(M) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$. であれば, $\mathcal{E}$ は直線束の直和に同型である, M は次数自由加群である

注意 (いくつかの証明)

1) Horrocks のオリジナルな証明 2) 射影空間の次元についての帰納法
3) Auslander-Buchsbaum の定理 4) Castelnuovo-Mumford 正則量を用いる証明

Horrocks 判定法

証明 (cf. Okonek-Schneider-Spindler)

$n=1$ のときは Grothendieck
$n \geq 2$ のときは 同型 $\mathcal{E}|_H \cong \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i)$ から $\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ をとる
そこで $\Gamma(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}|_H)$ の元を $\Gamma(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に持ち上げればよい

証明 (Auslander-Buchsbaum の定理 1958)

$(R, \mathfrak{m}, k)$: ネーター局所環　　M : 有限生成 R 加群, $\mathrm{proj\,dim}\, M < \infty$
$\Rightarrow \mathrm{depth}\, M + \mathrm{proj\,dim}\, M = \mathrm{depth}\, R$.

証明 (Horrocks Criteiron using Castelnuovo-Mumford Regularity)

$\mathrm{reg}\, \mathcal{E} = m$ とすると, 全射 $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus} \to \mathcal{E}(m)$ を得る

$\mathcal{E}$ は ACM だから $\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(m-1-n)) \neq 0$, Serre dual より $\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee(-m)) \neq 0$
よって, 零でない写像 $\psi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ が存在

$\psi \circ \varphi$ は零でないので, 分裂し, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ は $\mathcal{E}(m)$ の直和因子を与える

Horrocks 判定法

定理 (Horrocks, Walter, Malaspina-Rao)

VB : $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 modulo stable equivalence.
FinL : $\mathrm{D}^\flat(S-\mathrm{Mod})$ の充満部分圏

$$\ell(\mathrm{H}^i(C^\bullet)) < \infty, \qquad 1 \le i \le n-1$$
$$\mathrm{H}^i(C^\bullet) = 0, \qquad i \le 0, n \le i$$

関手 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_* : \mathrm{VB} \to \mathrm{FinL}$ はカテゴリーの同値を与える (Horrocks Correspondence)

証明の概略

S 加群 $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ に対して, 自由分解 $0 \to P^{n-1\vee} \to \cdots \to P^{0\vee} \to M^\vee \to 0$ をとり ($M^\vee$ は $S^\vee$ 加群, negatively graded), S 上の双対次数加群をとり、層化すると,

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{P}^0 \to \cdots \to \mathcal{P}^{n-1} \to 0$$

となる。複体 $P^\bullet : 0 \to P^0 \to \cdots P^{n-1} \to 0$ は $\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^i(P^\bullet)$, $1 \le i \le n-1$ を満たす。

Buchsbaum 束

定義 (Stückrad-Vogel)

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$ を多項式環とし, $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$, 次数 S 加群 M, $\dim M = d$ が次を満たすときに Buchsbaum という

任意の同次パラメータ系 $y_1, \cdots, y_d$ に対して
$\mathfrak{m}\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, \cdots, y_i)M) = 0, \quad 0 \leq i \leq d, \quad 0 \leq j \leq d - i - 1$ が成立

定義

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が quasi-Buchsbaum bundle とは $\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ が成り立つときにいう

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbaum bundle とは任意の r 平面 $L \subseteq \mathbb{P}^n$ に対して, $\mathcal{E}|_L$ が quasi-Buchsbaum のときにいう

問題

$\mathbb{P}^n$ 上の Buchsbaum 束, quasi-Buchsbaum 束を分類せよ

Buchsbaum 束

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$, $\mathfrak{m}$ の Koszul 複体は S 加群 k の極小自由分解

$$K_\bullet : 0 \to S(-n-1) \to S(-n)^{n+1} \to \cdots \to S(-1)^{n+1} \to S \to k \to 0$$

$d_p : K_{p+1} \to K_p$ に対して $E_p = \mathrm{Coker}\, d_p$ とすると, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(E_p) = 0$, $i \neq p, n+1$, $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(E_p) \cong k$ となり, Buchsbaum 加群である

$\Omega^p_{\mathbb{P}^n} = \widetilde{E_{p+1}}$ は Buchsbaum 束である

定理 (Goto-Chang)

$\mathbb{P}^n$ 上の Buchsbaum 束 $\mathcal{E}$ は微分 p 形式の層の捩れの直和に同型 $\mathcal{E} \cong \oplus \Omega^{k_i}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$.

注意

Goto(1987), Chang(1990) の証明は異なった手法で独立になされた
Yoshino(1993) は Horrocks 対応による
簡単な設定でのシジジー手法の証明を紹介 (cf. Malaspina-Miyazaki)

Buchsbaum 束

命題

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が, (i) $\mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \neq 0$, (ii) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i+1)) = 0$, $1 \leq i \leq p$, (iii) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i-1)) = 0$, $p \leq i \leq n-1$ とすると, $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ は $\mathcal{E}$ の直和因子となる

証明の概略

Koszul 複体から得られる完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(p) \to \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-n) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-p-1) \to \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

を用いると, (ii), (iii) の条件から, それぞれ全射を得る

$$\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E}), \quad \psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$$

$s(\neq 0) \in \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$ に対して, $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) = \mathrm{Hom}(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{E})$, $\varphi(f) = s$

s の双対 $s^* \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ に対して, $g \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n})$, $\psi(g) = s^*$

Buchsbaum 束

証明の概略

$$\begin{array}{ccccc} f\otimes g & \in & \mathrm{H}^0(\mathcal{E}\otimes\Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n})\otimes\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee\otimes\Omega^{p}_{\mathbb{P}^n}) & \to & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ s\otimes s^* & \in & \mathrm{H}^p(\mathcal{E})\otimes\mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1)) & \to & \mathrm{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)), \end{array}$$

自然な写像 $\mathrm{H}^0(\mathcal{E}\otimes\Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n})\otimes\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee\otimes\Omega^{p}_{\mathbb{P}^n})\to\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ は同型 $g\circ f$ を与える
よって, $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ は $\mathcal{E}$ の直和因子

多重射影空間上のベクトル束に対しても, 同様の手法が次が得られる

例

$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 上の直既約なベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して, 次は同値

(a) $\mathcal{E}\cong\Omega_{\mathbb{P}^2}\boxtimes\Omega_{\mathbb{P}^2}$.

(b) $\mathrm{H}^2(\mathcal{E})\neq 0$ and $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(1,1))=\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,1))=\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(1,0))=\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-1,0))=\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,-1))=\mathrm{H}^3(\mathcal{E}(-1,-1))=0$.

Null-correlation 束

定義

$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, S = \mathrm{Proj}\, k[x_0, \cdots, x_n]$, n odd, $\mathrm{char}\, k \neq 2$

$\Gamma(\Omega_{\mathbb{P}^n}(2))$ は $S_1^{n+1} \to S_2$ の Kernel (Euler sequence)

$(a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n, \cdots, a_{n0}x_0 + \cdots + a_{nn}x_n) \in S_1^{n+1}$ は
$\sum_{ij} a_{ij}x_ix_j = 0$, $a_{ij} \in k$, $i, j = 0, \cdots, n$ を満たす

$(n+1)$ 交代行列 $A = (a_{ij})$ は写像 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \Omega_{\mathbb{P}^n}(2)$ を与える

$\mathrm{rank}\, A = n+1$ のとき, Cokernel はランク $n-1$ のベクトル束を定義する

この写像を用いて Null-correlation 束 $\mathcal{N}$ を次の完全列で定義できる

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}(-1)(\cong \Omega_{\mathbb{P}^n}^{n-1}(n)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0.$$

（例）$(x_1, -x_0, \cdots, x_n, -x_{n-1}) \in \Gamma(\Omega_{\mathbb{P}^n}(2))$ として $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \Omega_{\mathbb{P}^n}(2)$ が取れる

Null-correlation 束

注意

Null-correlation 束 $\mathcal{N}$ は quasi-Buchsbaum であるが Buchsbaum でない
中間次元のコホモロジーは $\mathrm{H}^1(\mathcal{N}(-1))(\cong k)$, $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{N}(-n))(\cong k)$ のみ

問題

$\mathbb{P}^n$ のベクトル束 $\mathcal{E}$ で $\mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^{n-1}_*(\mathcal{E}) \cong k$, $\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0$, $2 \leq i \leq n-2$ を満たすベクトル束を分類できるか

$S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 M, $\dim M = n+1$ で $\mathrm{H}^2_{\mathfrak{m}}(M) \cong \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) \cong k$, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, $i \neq 2, n, n+1$ となるものを分類できるか

定理 (Ellia-Sarti(1999))

$\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 上のランク 2 の安定ベクトル束が quasi-Buchsbaum であるための必要十分条件は Null-correlation と同型になることである ($\Leftarrow$ Barth's Restriction Theorem)

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

注意

4 次交代行列 $A = (a_{ij})$ に対応する $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \Omega_{\mathbb{P}^3}(2)$ を考えると、$\mathrm{Coker}\,\varphi$ は 3 つのタイプになる

$$(\mathrm{i})\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{ii})\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{iii})\ A = 0$$

Null-correlation bundle $\mathcal{N}$ は, (i) の場合に $\mathcal{N}^{\vee}(1) \cong \mathrm{Coker}\,\varphi$ として定義される

定理

$\mathbb{P}^3$ 上の直既約なベクトル束 $\mathcal{E}$ が $\dim_k \mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) = \dim_k \mathrm{H}^2_*(\mathcal{E}) = 1$ を満たすとすると, $\mathcal{E}$ は次のいずれかの捩れに同型である

(i) Null-correlation 束

(ii) $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\psi} \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2} \to \mathcal{E}^{\vee} \to 0$

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(-1)) \cong k$, $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3)) \cong k$ の場合に示せばよい

$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{F}) = 0$ となる $\mathcal{F}$ が存在して, 完全列 $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0$ を満たす

$\mathcal{F}$ は Buchsbaum 束だから, $\mathcal{F} \cong \Omega^2_{\mathbb{P}^3}(3) \oplus (\oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\ell_i))$ となる

したがって, 完全列 $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus (\oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\ell_i)) \to \mathcal{E}^\vee \to 0$ を得る

ここで, $\mathfrak{m}\mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) = 0$ で, $\mathcal{E}$ がベクトル束となるには, 定理のタイプしかない

命題

$\mathcal{E}$: $\mathbb{P}^n$ 上の直既約ベクトル束 $\operatorname{rank} \mathcal{E} \leq n-1$

$\dim_k \mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) = \dim_k \mathrm{H}^{n-1}_*(\mathcal{E}) = 1$ $\qquad$ $\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) = 0,\ 2 \leq i \leq n-2.$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ は $\mathbb{P}^n$(n odd) 上の Null-correlation 束の捩れに同型

注意

$\mathcal{N}$: $\mathbb{P}^n$ 上の Null-correlation 束 $\Rightarrow \mathcal{N}^\vee \cong \mathcal{N}$, $n = 3$, $\operatorname{rank} \mathcal{N} = 2$

構造定理から, 一般に $\mathcal{N}^\vee \cong \wedge^{n-2}\mathcal{N} \cong \mathcal{N}$ が得られる

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

定義・命題

$S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $\mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

$\mathcal{E} : \mathbb{P}^3 = \operatorname{Proj} S$ 上の quasi-Buchsbaum 束, $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ とおく

すると $\mathfrak{m}\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M) = 0$, $i = 2, 3$, $\mathrm{H}^0_\mathfrak{m}(M) = \mathrm{H}^1_\mathfrak{m}(M) = 0$ となる

x_0, x_1, x_2, x_3 は S 加群 M の同次パラメータ系

イデアル $I \subset S$ が標準であるとは, I に含まれる任意のパラメータ系の一部 $y_1, y_2 (\in I)$ が標準, つまり, $y_1\mathrm{H}^2_\mathfrak{m}(M/y_2M) = y_2\mathrm{H}^2_\mathfrak{m}(M/y_1M) = 0$ のときにいう

次数 S 加群 M が Buchsbaum であるための必要十分条件は $\mathfrak{m}$ が標準のときである

定義

M が quasi-Buchsbaum であり, Buchsbaum でないとする

標準パラメータ系の一部 $y_1, y_2 \in S_1$ が存在するとき, M を pseudo-Buchsbaum と呼び, それ以外のとき, nonstandard-Buchsbaum と呼ぶ

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

設定

$\mathbb{P}^3$ の quasi-Buchsbaum 束を調べる
シジジーの方法を用いると, $a_2(M) = -1$, $a_3(M) = -3$ の場合に帰着できる

本講演では, $\mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) \cong k(1)$, $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}) \cong k(3)$ の場合を考える

Koszul 複体 $K_\bullet(x_0, \cdots, x_3; S)$ から $L^\bullet$ をつくる

$L^\bullet$: $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^6 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0$

$C^\bullet$: Čech 複体 $C^i = C^i(\mathfrak{U}; \mathcal{E})$

$C^{\bullet\bullet} = L^\bullet \otimes C^\bullet$: ２重複体

$\{E_r^{p,q}\}$: スペクトル系列 $E_1^{1,q} = \mathrm{H}^q_*(\mathcal{E}(-3))$... etc.

次の写像を得る

$$d_2^{1,2} : E_2^{1,2} = \mathrm{H}^2_*(\mathcal{E}(-3)) \to E_2^{3,1} = \mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}(-1))^6$$

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

設定

$d_2^{1,2}$ は, Koszul 複体の基底 $\{e_i \wedge e_j\}$ を考えると、4 次交代行列 $A = (a_{ij})$ を与える

命題

4 次交代行列のランクが, 0, 2, 4 に応じて, ベクトル束 $\mathcal{E}$ は, Buchsbaum, Pseudo-Buchsbaum, Nonstandard-Buchsbaum になる

定理

$\mathrm{H}^1_*(\mathcal{E}) \cong k(1)$, $\mathrm{H}^2_*(\mathcal{E}) \cong k(3)$ を満たす $\mathbb{P}^3$ 上の nonstandard-Buchsbaum 束 $\mathcal{E}$ は null-correlation 束の捩れに同型になる

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$s(\neq 0) \in \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ に対して, 完全列 (特に, $\Gamma_*(\cdot)$ で自由分解)

$$0 \to \mathcal{E}(-3) \to \mathcal{E}(-2)^4 \to \mathcal{E}(-1)^6 \to \mathcal{E}(-3) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee} \to 0$$

を用いて,

$$\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}(-3) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(1)) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$$

により, $\varphi(f) = s$ が作れれば, $f : \Omega^2(3) \to \mathcal{E}$ が出来るが, 'Non-standard' の場合は, 持ち上げができない。そこで,

$$\varphi' : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2(1)) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$$

を考える

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ の元を辿る

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C^2(\mathcal{E}(-3)) & \to & C^2(\mathcal{E}(-2))^4 & \to & C^2(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^2(\mathcal{E}(-3)\otimes\Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & C^1(\mathcal{E}(-3)) & \to & C^1(\mathcal{E}(-2))^4 & \to & C^1(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^1(\mathcal{E}(-3)\otimes\Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & C^0(\mathcal{E}(-3)) & \to & C^0(\mathcal{E}(-2))^4 & \to & C^0(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^0(\mathcal{E}(-3)\otimes\Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Čech 複体で $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ の元は $\mathrm{H}^0(\mathcal{E}(-3)\otimes\Omega_{\mathbb{P}^3}^{2\vee})$ の元に持ち上がらない

$\mathrm{H}^0(\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}^\vee)$ へ持ち上げる

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$\mathcal{N}$ が $\mathcal{E}$ の直和因子であることを示す

$g \circ f$ が同型となる $f : \mathcal{N} \to \mathcal{E}$, $g : \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ を構成する

4 次交代行列 A を用いて, Null-correlation 束を構成する

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}(-1) & \to & \Omega(1) & \to & \mathcal{N}^\vee(\cong \mathcal{N}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & \mathcal{O}(-1) & & \mathcal{O}(-1)^6 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & \mathcal{O}(-2)^4 & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & \mathcal{O}(-3) & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

写像錐を取ると, $\mathcal{N}$ の自由分解が得られる

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-2)^4 \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(-1)^6 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}(-2)^4 \to \mathcal{O}(-1)^5 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$$

$\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ の元を次で持ち上げる

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee) \to \mathrm{H}^1(\Omega^2(1) \otimes \mathcal{E})(\cong k) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))(\cong k)$$

Čech 複体で $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ の元を $\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee)$ の元に持ち上げる

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C^2(\mathcal{E}(-3)) & \to & \begin{array}{c} C^2(\mathcal{E}(-2))^4 \\ \oplus \\ C^2(\mathcal{E}(-1)) \end{array} & \to & C^2(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^2(\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}^\vee) & \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \to & C^1(\mathcal{E}(-3)) & \to & \begin{array}{c} C^1(\mathcal{E}(-2))^4 \\ \oplus \\ C^1(\mathcal{E}(-1)) \end{array} & \to & C^1(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^1(\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}^\vee) & \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \to & C^0(\mathcal{E}(-3)) & \to & \begin{array}{c} C^0(\mathcal{E}(-2))^4 \\ \oplus \\ C^0(\mathcal{E}(-1)) \end{array} & \to & C^0(\mathcal{E}(-1))^6 & \to & C^0(\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}^\vee) & \to \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Null-correlation bundle on $\mathbb{P}^3$

証明の概略

$^\exists g(\neq 0) \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee)$ s.t. $\varphi(g) = s$

$\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{E} \otimes \Omega^2(1)) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$

完全列 $0 \to \mathcal{N} \to \Omega^2(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0$ を用いて

$s \in \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ に対して $t \in \mathrm{H}^3(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}(-4))$ を取る

$s \in \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3))$ の Serre duality による双対元 $s' \in \mathrm{H}^1(\mathcal{E}^\vee(-1))$ に対して

$^\exists f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{N})$ s.t. $\psi(f) = s'$

$\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{N}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{E}^\vee(-1))$

$0 \to \mathcal{E}^\vee(-1) \to \mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^2(1) \to \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{N} \to 0$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{N}) & \to & \mathrm{H}^0(\mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{N}) & \cong & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-3)) \otimes \mathrm{H}^1(\mathcal{E}^\vee(-1)) & \to & & & \mathrm{H}^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)),
\end{array}
$$

可換図式より、自然な写像 $\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{N}^\vee) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{N}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ は同型 $g \circ f$ を与える。よって、$\mathcal{N}$ は $\mathcal{E}$ の直和因子である

Thank you very much.