集合論（＝数学）の未解決問題

渕野 昌（Sakaé Fuchino）

18. Mai 2017（08時52分）

以下の文章は、現代思想 2016年10月臨時増刊号 総特集＝未解決問題集【シリーズ現代思想の数学者たち】に収録された論説の拡張版である。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も再収録した。また、投稿／校正後の加筆訂正も含まれている。

1 究極の未解決問題？

集合論での未解決問題について論ぜよ、という宿題を頂いて、この作文を始めている。ここでの「未解決問題」は定冠詞つきの単数ということのようである。「連続体仮説にかかわる研究についてご執筆いただけないでしょうか」というのが、もともとの作文の依頼の内容だったのだが、しかし、そもそも現代の視点から見て、この「連続体仮説」は数学の未解決問題と言えるのだろうか？ あるいは逆に、この問題が実は「数学の究極の未解決問題」となっていて、本稿のような作文で安易に論じることの憚られる畏れ多いものになったりはしていないだろうか？

数学者の多くは、「連続体仮説」、「連続体問題」等々というキーワードをどこかでは聞いているとしても、自分自身にかかわる問題としては考えていないのではないか？ 他方では、直接は研究していないとしても、たとえばフェルマーの定理、リーマン予想、ポアンカレ予想などの解決されたり未解決だったりする他の数学の大問題に対しては、自分のやっている研究が遠くのどこかではこれらの問題と繋がっている、という感覚を持っているのではないか？

実際には、もっと積極的な否定として、数学の基礎付けの観点からも、連続体仮説 — 更に集合論すべて — は数学の問題ではない、とする議論すらある。クロー

[0] 名古屋大学の松原 洋氏、および、神戸大学での筆者の同僚の菊池誠氏と酒井拓史氏からは本稿の初期の草稿に対する幾つかの有用なコメントを頂いた。ここに感謝の意を表す。

ネカ (Leoport Kronecker, 1823–1891) の『整数は神がお創りになった。他のものはすべて人間の業である。』[1] は有名だが、同様の考え方をもっと数学的に精密に敷衍してみせたのは、1910 年代終りのヴァイル (Hermann Weyl, 1885–1955) である。ヴァイルは [13] で、彼が「循環」が起ってしまうと考えた議論をさけて、しかも通常の数学の多くの部分が展開できる体系を構築したが、その体系の中では連続体問題は、問題として定式化することさえできない。フェファーマン (Solomon Feferman, 1928 – 2016) はヴァイルの議論を現代の数理論理学の知見でより精密化し、ワイルの論点を更に推し進めた [2] を書いたが、この論文が一つの契機となって、数年前にネット上で、数学、数理哲学、哲学などの世界を代表すると言えるような人たちを巻き込んだ熾烈な論争が起こったことがあった。

この、「実用的な数学の展開できる無矛盾性の保証のある弱い体系で、数学を展開すればよいのだから、集合論は全く必要ない」、という主張に対する反証として、ゲーデル (Kurt Gödel, 1906–1978) の加速定理 (Speed-up Theorem) をあげることができる。ゲーデルの加速定理は、通常の集合論の公理系の、無矛盾性の保証のある弱い体系に対する意義を擁護するだけでなく、通常の集合論の公理系に様々な巨大基数の存在公理を加えて得られる、より無矛盾性の強さの大きな体系で考察することの、旧来の (通常の集合論の枠内で展開される) 数学に対する意義も擁護しているように思える。これについては以下の第 3 節でより詳しく論じる。

公理的集合論の一般的枠組を認める立場では、[2]「連続体問題」の「解決」は、

(*) ゲーデルが連続体仮説の通常の集合論の公理系上での無矛盾性を証明し、コーエン (Paul Cohen, 1934–2007) が連続体仮説の否定の通常の集合論の公理系

1 „Die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenswerk“. [12]「お創りになった」と敬語に翻訳したのは、原文の „lieb“ という形容詞と神 „Gott“ という単語の組としてコードされている内容である。

2 現代的な数学を含む通常の意味での数学を統一的に展開できる枠組としては、通常の公理的集合論の公理系以外に適当なものは存在しないので、いわゆる working mathematicians はこの「公理的集合論の一般的枠組」を、少なくとも無自覚的には認めている、と考えてよいだろう。

上での無矛盾性を証明して、それらを合せて、連続体仮説の集合論の通常の集合論公理系からの独立性が確立された

というように理解されている。

これに対し、ゲーデルは、1947/1964 年の論文 [7] で、独立性の結果が得られることを前提として、[3] その場合にも集合論の公理系の正しい拡張を見出すことによって、連続体仮説のような重要な集合論的命題の真偽をこの拡張された公理系からの証明により帰結することができる、と論じている。もちろん、「公理系の正しい拡張」が見つかったときは、その正しさの論拠が必要になるので、それに向けての集合論の拡張された体系についての（数学的 — 数学哲学的な）議論を展開しなくてはならないことになる。そのような研究プログラムは、現在ではゲーデルのプログラム (Gödel's Program) と呼ばれていて、ウディン (Hugh Woodin, 1955–) らによって精力的に推し進められている。

しかし、ゲーデルのプログラムの遂行に向けての研究が成果をあげつつあるとしても、その結果、集合論の公理系の「正しい」しかし互いには相容れないような複数の拡張が見つかってしまう、という状況が起こらないという保証はどこにも無いようにも思える。[4]

筆者は、近年に度々議論されるようになってきている集合論的多元宇宙 (set-theoretic multiverse) の枠組を拡張されたプラトニズムとして捉えることで、そのような、複数の「正しい集合論の拡張」が出現してしまっている状況の可能性

---

[3] コーエンが彼の結果を得たのは [7] の最初の版が執筆された時より十年以上後だった。[7] の 1964 年版では、補遺としてコーエンの結果が「最近の結果」として触れられており、巨大基数の連続体問題ではたしうる役割がゲーデルが本文で書いたこととは異なる可能性があることなどが述べられているが、本文は自身は 1947 年度版とほとんど同じである。

[4] たとえば、集合論の「正しい拡張」候補とは言えるであろうところの、Rado Conjecture と Martin's Maximum という二つの公理は、筆者が最近の研究でよく議論の出発点として用いるものであるが、これらは互いに矛盾することが知られている。ちなみに、これらの公理は両方とも連続体の濃度が $\aleph_2$ になる、したがって特に連続体仮説が成り立たないことを導く。

も積極的に受け入れることができる、と考える（[4]を参照）。このことについても、以下の第4節で、もう少し詳しく議論してみようと思う。

本稿は、読者に数学の素養をある程度仮定している（といっても技術的専門的な素養を仮定するものではない）ことを除くと、広い読者対象を想定して書いているつもりである。そこでまず、集合論と数理論理学に関する予備知識の若干の補足から始めようと思う。

2 連続体問題と数理論理学

連続体問題と数理論理学をめぐる状況について、以下で必要となることの復習をしておくことにする。連続体仮説は、「自然数の全体の集合と実数の全体の集合の間の大きさの無限集合が存在しない」ことを主張する命題である。このことは、現代の集合論の標準的体系であるツェルメロ＝フレンケル集合論（ZFC）では、

(1) 自然数の全体からなる集合（$\mathbb{N}$）の濃度（$\aleph_0$）の次の基数（$(\aleph_0)^+ = \aleph_1$）は、実数の全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の濃度（$2^{\aleph_0}$）と等しい（$2^{\aleph_0} = \aleph_1$）

こととしてあらわせるが、[5] カントル（Georg Cantor, 1845–1918）が一九世紀の後半にこの仮説について考えはじめたときには、まだ ZFC は定式化されていなかったし、[6] これは、ZFC の部分体系で、今日 ZC として知られている体系に対応する公理系がツェルメロによって素朴な（形式化されない）形で書き下されるよりも更

5 ZFC では、集合 X の濃度とは、X との間に全単射（一対一で上への写像となっているような写像）を持つ基数（$\aleph_0$, $\aleph_1$ などの無限集合の（全単射の存在で同一視したときの）大きさの尺度となっているような集合）として定義される。このような意味での濃度が定義できるためには、ZC では不十分であるが、表現を工夫することで(2)や(3)でように ZC でも濃度の議論のうちの一部を遂行できる。

6 ZFC の、今日知られる形での定式化がなされたのは1940年代になってからである。カントル自身は ZFC でのような議論を、集合論の公理的な枠組が作られる前に行なっていたわけだが、彼自身の議論は ZC から ZFC へのシフトに相当する発展が、初期の集合論に関する仕事から後の時期の仕事にかけて起っているように思われる。

にずっと前のことであった。連続体仮説は ZC や，それから更に選択公理を取り除いた Z でも自然な定式化を与えることができて、そのような (ZFC では上の (1) と同値になる) 定式化の一つは：

(2) すべての実数からなる無限集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ に対し、その要素のすべてを自然数の全体に一対一に対応づけすることができるか、要素のすべてを実数の全体に一対一に対応づけすることができるかのいずれかが成り立つ

である。更に、カントル＝ベルンシュタインの定理により (2) は (既に Z で) 次と同値である：

(3) すべての実数からなる無限集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ に対し、X から $\mathbb{N}$ への一対一写像が存在するか、$\mathbb{R}$ から X への一対一写像が存在するかのいずれかが成り立つ。

カントル自身は連続体仮説をやがて証明されるべき定理と考えていて、その証明を生涯にわたって試み続けた。

実際、開集合 $\subseteq \mathbb{R}$ に対し、(3) が成り立つことは容易にわかる。空でない開集合は空でない開区間を含むが、任意の空でない開区間から $\mathbb{R}$ の上への一対一対応が存在するからである。カントル＝ベンディクソンの定理により閉集合に対しても、(3) が成り立つ。更に、スースリンの定理により、すべての解析集合に対して、(3) が成り立つ。また大きな巨大基数の存在を仮定すると、すべての射影集合に対し (3) が成り立つ。ここで述べた命題のうち解析集合と射影集合に関するものは、カントルより後の時代に得られたもので、特に射影集合に関するものはウディンらによる 1980 年代終り頃の結果から導かれるのだが、これらの結果は (3) の妥当性を強く示唆しているように思える。

カントルの時代、実際にはもっと後の 1920 年代まで、すべての数学の命題は、やがて証明できるか、あるいはその否定が証明できるかのいずれかである、と多くの数学者は考えていたと思って間違いないだろう。

二十世紀初頭に前後して発見されたいくつかのパラドクシカルな結果から、[7]ひょっとすると数学は矛盾しているかもしれない、という懐疑が数学者を悩ませるようになるが、妥当な公理系を確定して、それについての考察を行なうことで、やがては無矛盾の保証のある数学体系が構築でき，その妥当性から，体系は完全にもなる（つまり全ての数学の命題の真偽がこの公理系からの証明の存在により結着できるようにできるようになる）ことに、ほとんどの数学者 — 少なくともヒルベルトの回りのほとんどの数学者 — が疑いを持つことは、なかったように思える。[8]
しかし、1931 年に発表されたゲーデルの二つの不完全性定理によって、これらの数学観のどちらも、少なくともここで書いたような素朴な形では正しくないことが明かになった。

第一不完全性定理　T を具体的に与えられた理論とする。[9] T が初等的算術

[7] 例えばパラドクシカルな結果のうちの一つは、すべての集合を要素として持つ集合を考えるとそのことから矛盾が出る、というものだが、現代の集合論では、この結果は、すべての集合を要素として持つ集まり（クラス）は集合でない、という定理の背理法による証明、と理解される。

[8] たとえば、ツェルメロは ZC に対応する公理系の祖型を導入した[14]で、「非常に本質的であるはずの私の公理系の「無矛盾性」についてさえ、まだ厳密には証明できておらず、ここに提案された原理に基いて議論するかぎり、今までに知られている「逆理」はすべて解消する、ということを所々で注意するにとどめる」と述べている。二十世紀前半を代表する数学者であるヒルベルト (David Hilbert, 1862–1943) は 1920 年代に、この数学の無矛盾性の証明を厳密に形式化された体系で行なう、というプログラムに着手し、ゲーデルが不完全性定理を発見する直前の 1930 年頃には、ヒルベルトと彼の研究協力者たちは、この目標があと少しで達成できる、という見込みを信じるに足るような部分結果群を得ていた。

[9] 理論 T が具体的に与えられたとは、与えられた論理式が T に属すかどうかを判定するアルゴリズムが存在することである。実際我々が扱う公理系は、このような意味で具体的に与えられているだけでなく、たとえば有限個の公理図式 (axiom schema) によって与えられていて、ある論理式が T に属すかどうかの現実的に実行可能 (feasible) なアルゴリズムが存在するものになっていることが多い。
一方、この「具体的に与えられた理論」という範疇には、我々の持っている公理系のイメージからかなりかけはなれたものも含まれている。たとえば、具体的に与えられた任意の理論 T に対し，T と論理的に同値な具体的に与えられた理論 $\tilde{T}$ で、すべての $\tilde{T}$ からの証明に対し、同じ結論を与えるような二行か三行くらいの（この具体的な数は証明の体系に依存する）証明が常に存在

を内包しており、無矛盾なら、T から証明できないし、その否定も証明できないような命題 φ が存在する。

このような φ は T から独立であるという。また T から独立であるような命題が存在するとき、T は不完全である、という。

第二不完全性定理　T を具体的に与えられた、理論とする。T が初等的算術を内包しており、無矛盾なら、T の無矛盾性は、理論 T の中では証明できない。

ここで、「初等的算術を内包する」とは、算術の言語（たとえば数の全体と 0（ゼロ）と 1 と加法と乗法）を T の言語での表現に翻訳することができて、この翻訳による初等算術（ペアノ算術（PA）の部分）が T の定理として証明できることである。第一不完全性定理では、仮定する初等算術の範囲は、たとえばロビンソンの公理系として知られている非常に弱いものにとることができ、第二不完全性定理で必要となる初等算術はもう少し強いものとなるが、いずれにしてもペアノ算術で十分である。

Z や Z を含む ZF, ZFC などの集合論の公理系は、すべて二つの不完全性定理の命題の前提を満たすものとなっているので、[10] 二つの完全性定理から、これらの集合論の公理系は完全でなく、それらが無矛盾であることをこれらの体系の中で証明することもできない。特に無矛盾性については、記号の有限列の操作の体系としての証明の体系に見合った、ある意味で実効的 (finitary) とよべるような無矛盾性証明があったとすると、それは既に Z の中で展開されるものになっている、と考えてよいし、ZFC 至っては通常の数学や、集合論的論法を含む現代の数学の

するようなものを作ることができることが知られている。

[10] これらの公理系の公理は（無限個の公理を含むが）具体的に与えられており、これらの公理系が「すべての数学理論」を展開するための枠組になっていることから、当然、初等数論も内包するものになっている。

すべてのを内包している。つまり、無矛盾性証明としてふさわしい証明に限らず、旧来の数学の意味での証明がここで展開できないことはありえない。それらの理論が、自分自身の無矛盾性が証明できない（つまり、これらの理論が矛盾していないとすると、証明できない）[11]ことから、（数学の証明としての）集合論の無矛盾性の証明が得られることは絶望的であることがわかる。

それにもかかわらず、数学者、特に集合論の研究者が集合論の体系や、更に様々な巨大基数の存在公理を付加して得られる体系たちの無矛盾性を確信していることの典拠は、これらの理論の中で展開される数学の整合性であり、特に集合論の研究者にとっては、

(4) $\mathsf{ZC} \subseteq \mathsf{ZFC} \subseteq \mathsf{ZFC} +$ “到達不可能基数が存在する” $\subseteq \cdots$

と続いてゆく理論の拡張の列（に対する現在までに構築されている理論）の整合性であろう。[12]

この (4) での拡張の列では、ただ理論を拡張してゆく、という以上のことが起っている。ZFC では、ZC の無矛盾性が証明でき、ZFC + “到達不可能基数が存在する” では、ZFC の無矛盾性が証明できる、というように、$\subseteq$ の階段を登るごとに、その理論で一つ前の理論の無矛盾性が証明できる状況が生れているのである。

この意味での上昇列 (4) は、更にペアノ算術と二階の算術に対応する Z の部分理論、P, Z_2 を加えて、[13]

(4’) $P \subseteq Z_2 \subseteq \mathsf{ZC} \subseteq \mathsf{ZFC} \subseteq \mathsf{ZFC} +$ “到達不可能基数が存在する” $\subseteq \cdots$

と拡張することができる。

---

11 矛盾する理論はすべての命題を証明するから、特にそのような理論の無矛盾性も証明してしまう。

12 子細は［8］を参照されたい。

13 二階の算術はドイツ語では „Zahlentheorie zweiter Stufe“ とよばれる。

第一不完全性定理の証明の中でゲーデルが作ってみせた文 φ はかなり人工的なものだが、現在では、旧来の数学の範疇にあらわれる自然な命題で、ZFC から独立なものが多く発見されている。ゲーデルは、連続体仮説が、まさにこのような ZFC から独立な命題であることを、かなり早い時期に予想していたようで、関連した未発表の部分的な結果も得ていたようである。この予想の正しさは、1960 年代にコーエンの仕事により確認されることになった (第 1 節 の (*) を参照)。

3 集合論の部分体系、巨大基数公理とゲーデルの加速定理

T と T' を T' が T の拡張になっているような具体的に与えられた二つの理論とする。[14] T や T' の無矛盾性 (consistency) を、これらの理論の言語での文として表現したものを、それぞれ $consis(T)$, $consis(T')$ とあらわすことにする。

T' の無矛盾性の強さ (consistency strength) が T のそれより大きいということを、T' で $consis(T)$ が証明できることとする。理論 T から論理式 φ が (述語論理の) 証明の体系の中で証明できるとを $T \vdash \varphi$ とあらわすことにすると、これは $T' \vdash consis(T)$ とあらわせる。

一方、必ずしも一方が他方の拡張になっているとは限らないような T と T' に対し、T と T' の両方に共通に含まれるある理論 T_0 に対し、$T_0 \vdash (consis(T) \leftrightarrow consis(T'))$ が成り立つとき、T と T' は無矛盾等価 (equiconsistent) であるという。(T' が無矛盾だとすると) $T \subseteq T'$ で T' が T より無矛盾性の強さが大きいときには、T と T' が無矛盾等価ではありえない。もし無矛盾等価だったとすると、$T \vdash (consis(T) \leftrightarrow consis(T'))$ だが、無矛盾性の強さの仮定から $T' \vdash consis(T)$ なので、$T' \vdash consis(T')$ となってしまい、第二不完全性定理に矛盾するからで

[14] より正確には、T' の中で、これらの理論の無矛盾性を表明する命題がこれらの理論の中で (これらの理論の言語での論理式として) 表現できたり、第一不完全性定理をそれらの論理式に適用できたりする必要があるので、T は第一不完全性定理の前提条件の意味で初等算術を包含していることを更に仮定する。

ある。

(4') の理論の列は、ここで導入した用語を用いると、無矛盾性の強さに関する真の上昇列になっている。[15]

第二不完全性定理により、T' が T より大きな無矛盾性の強さを持つときには、T' は T より矛盾している「可能性」が高い理論になっている、と言うことができる。「できるだけ安全な枠組の中に留まって数学を行なうべきだ」という立場からは、(4') のできるだけ上方に位置する理論の中で数学を展開するべきだ、という主張が自然に導かれるようにも思える。

実は、PA と無矛盾等価になることが知られている ACA_0 と呼ばれる Z_2 の部分体系の枠組の中で、古典的な数学のほとんどすべてが展開できることが知られている。ヴァイルの [13] は数理論理学の基礎概念が確立する前の時代の本なので、ここに書かれていることが現代の用語での何に対応するのか、不明な部分もあるのだが、妥当と思われる解釈の一つとして、彼がそこで導入した体系は、大まかに言えば、ACA_0 に等しいものであると考えることができる。

もちろん PA に対しては、第二不完全性定理により完全に確定的な無矛盾性証明を与えることはできないが、ある種の拡張された確定的な立場からの無矛盾証明は与えることができるが、ゲンツェン (Gerhard Gentzen, 1909–1945) やゲーデルの結果により知られている。したがって、ACA_0 に対しても同程度の無矛盾性の保証が得られていることになる。一方、この体系では、連続体仮説は記述することもできない命題である。数学とは ACA_0 あるいは ACA_0 を拡張する、ある種の無矛盾性の保証が存在するような、何らかの Z_2 の部分理論で展開される学問である、というドグマに立った場合、連続体仮説は、数学の問題として「確定

15 第二不完全性定理により、ここでの議論は、もし厳密に正しい記述を心掛けるとすると、「これらの理論が矛盾しないとすると」、というような但書き付きで述べるべきである。しかしこれは煩雑なので、以下、いくつかの要所を除いて、このような注意は読者に適宜補ってもらうことにして、明示的には書かないことにする。

的な数学の問題ではない」と結論付けることも可能であろう。[16]

このような制限された体系で行なわれる数学が何かを知るために、それより強い体系を調べることの必要性も出てくるわけだが、そうだとしても、「できるだけ安全な枠組の中に留まって数学を行なう」ということの重要性を強調する立場では、集合論や、ましてや通常の集合論の公理系に更に「矛盾しないことの分っていない」巨大基数の存在公理まで付けくわえて得られる強い公理系で数学を行なうことの積極的な意義は、認めにくいかもしれない。

しかし、次に述べるゲーデルの加速定理は、仮に数学の最終目標が、できるだけ弱い体系で多くの数学理論を展開する、ということだったとしても、無矛盾性の強さに関して強い体系で数学することに依然として積極的な意義があることを主張するもの、と解釈することができる。

もともとのゲーデルの加速定理は、n-階の数論の命題 φ で、n-階の数論で証明できるが、その証明は、$n+1$-階での証明より格段に長くなってしまうようなものが存在することを主張するものである。この定理はここで言及しなかった「格段に長く」の厳密な規定や定理の適用範囲に関する条件に関する多くのバリエーションズが存在する。ここでは、次のバリエーションを考えることにする。

少々技術的になるが、定理を厳密に述べるために、次を仮定する。ここでの理論の言語 L としては、集合の包含関係（二変数関係記号）$\in$、対を作る演算（二変数関数記号）$\{\cdot,\cdot\}$ 空集合をあらわす定数記号 $\emptyset$ を含み、考える理論は、$\mathbf{Z}$ から分離公理を除いたものと、$\{\cdot,\cdot\}$ と $\emptyset$ の自然な解釈を与えるような公理を含むものとする。また、そのような理論で、（有限の長さを持つ）[17] 記号列や記号列の有限列はすべてフォン・ノイマンの階層の ω 番目 V_ω の要素としてコードされている

[16] この方向の議論については、たとえば [2] を参照されたい。

[17] ここで言っている「有限」は超数学（形式的体系としての、公理系やそれからの記号操作としての演繹をあやつっている世界での数学）での有限性ではなく、ここで考察している少なくとも弱い集合論を含む公理系で規定される有限性である。

ものとする。記号列や記号列の有限列のランクとは、V_ω の要素としてのそれらのフォン・ノイマン・ランクのこととする。数 n に対し $\underline{n}$ で、その（$\{\cdot,\cdot\}$ と $\emptyset$ の組合せで表される）数表記をあらわすことにする。

ゲーデルの加速定理のバリエーションの一つ　T と T' を、具体的に与えられた、ここで述べたような言語 L 上の理論として、T は（第二不完全性定理の意味で）初等算術を包含し、$T \subset T'$ で T' の無矛盾性の強さは T より大きいものとする。このとき、すべての帰納的関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し、一変数の L-論理式 $\varphi_f(x)$ で、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し、$\varphi_f(\underline{n})$ の T からの証明が存在するが、すべての $\varphi_f(\underline{n})$ の証明のランクは $f(n)$ より大なものになり、一方 $T' \vdash \forall x\, \varphi_f(x)$ が成り立つようなものが存在する。

f を変数 n が大きくなると値が急速に大きくなるような帰納的関数とする。例えば、$f(6)$ が既に銀河系宇宙に存在する原子の全体の数より大きなものになっているとする。ここで $\varphi_f(\underline{7})$ が得たい命題だったとするとき、この命題は、理論的には T で証明できるとしても、その証明を物理的に実現することは不可能である。一方、T' では、$\forall x\, \varphi_f(x)$ の証明が存在するが、ここでは省いた、加速定理の証明の細部から、この証明は、物理的に実現することが可能なものになっていることが十分にあり得ることがわかる。しかも、$\forall x\, \varphi_f(x)$ から $\varphi_f(\underline{7})$ を導くことは容易である。

証明の複雑さにこの例でのような究極の違いが生じていない場合でも、T からの証明を簡単に見つけることができないが，T' からの短い自然な証明は容易に見つかる、という状況もあり得る。このようなシナリオの可能性から、仮に、弱い方の理論 T での証明を見つけることが最終目的だとしても、まず強いほうの理論 T' で証明を見つけて、それを足掛りにして、T での証明の発見ないしは証明の非存在の証明を試みる、という方針が、積極的な意味を持つことがわかる。

ちなみに、(4') に現れる理論は、すべてここで述べた加速定理でのような理論

へ保守拡大することができる。[18] したがって、定理で述べたような証明の加速（強い理論でより簡単な証明が得られること）は、(4') に現れる理論のすべての組に対して成り立つ。

ブルバキやそれ以降の従来型の数学は、そのほとんどが ZC で展開されていると言ってよい。一方集合論的な数学は、ZFC やその更なる拡張で展開されることが多いのだが、ZFC も無矛盾性の強さの真に大きな ZC の拡張になっているので、右で述べた、加速定理を論拠とする従来型の数学への ZFC やその拡張で展開される数学の意義の主張ができる。

しかし、ZFC やその拡張で展開される数学の、従来型の数学に対する意義については、もっと具体的な別の角度からの説明を与えることもできる。ZFC やその拡張の上では、コーエンが連続体仮説の独立性証明に際して開発した、強制法 (forcing method) を含む多くの集合論的な手法の応用が期待できるからである。

強制法は、もともとは独立性証明に用いるために開発された手法で、したがって得られる結果の多くは旧来の数学の外側にあるものだが、この手法は ZFC での定理の証明でも有効性を持つ。絶対性を用いた議論は、そのような応用のパタンの一つである。この議論では、ある命題 φ を証明するために、ある強制概念 $\mathbb{P}$ を使って、集合論のユニヴァース V の強制拡大 $V[G]$ で φ を強制する。ここで、$V[G]$ で φ が成り立つことと V で φ が成り立つことの同値性を証明することで、実は φ は V で既に成り立っていることが帰結される。このタイプの証明の最も鮮やかな応用例の一つとして、シェラハ (Saharon Shelah, 1945–) による「K_4 free な有限グラフで、エッジの2彩色のすべてに同色の三角形が存在する、ようなものが存在する」という命題の（強制法による）証明をあげることができる。[19]

---

18 $\tilde{T}$ がある理論 T の保守拡大であるとは、$\tilde{T}$ は T を含み、すべての T の言語での命題について、それが T で証明されることと $\tilde{T}$ で証明されることが同値になることである。

19 この結果で、特に注目される点は、この強制法を使って証明された定理が単に通常の数学の範囲内の主張であるだけでなく、有限のオブジェクツに対する主張となっていることである。こ

強制法を直接使っていない場合にも、独立性証明での思考実験で研ぎ澄まされた直観が、ZFC での数学的な証明を導くことも少なくない。そのようにして得られたと思われる ZFC での大きな未解決問題の解決の例としては、バルトシンスキーの定理や、タラグランによるフォン・ノイマンの問題の解決などを挙げることができる。[20]

そもそも、(本来の意味の) ハッカーがプログラミングを楽しむように、数学者は証明を見出すことを楽しむ。ZFC やその巨大基数公理による拡張では、他の数学理論では楽しむことのできない、様々な不思議な感触を持つ証明手法が応用されるのを待っているのである。

4 集合論的多元宇宙

強制法は集合論のユニヴァース V を拡張するための柔軟性を持った手法である。連続体仮説の ZFC からの独立性を始めとする、多く得られている独立性の証明は、集合論のユニヴァース V から出発して、ZFC から独立であることを示したい命題の成り立つような V の拡張 V' と、この命題の成り立たないような拡張 V'' を作ることでなされる。このような V' や V'' は、強制拡大とよばれる、コーエンが連続体仮説の独立性を証明したときに導入した手法のバリエーション (強制法) によって得られることが多い。

ただし、これは、かなり単純化した説明である。そもそも、集合論のユニヴァース V とは、すべての集合からなるクラスなので、これを外側に拡張しようがない。この「集合論の拡張」のアイデアがうまく定式化できて ZFC の公理系と抵触しないものとなっていることを説明するためには、集合論の基礎知識と数理論理学の定理はペアノ算術で記述することが可能だが、シェラハの証明がペアノ算術上の加速定理の例になっているのか、それともパリス=ハリントン定理のようなペアノ算術上では証明できない命題となっているのか?　など多くの興味深い問題がここではまだ未解決であるように思える。

---

[20] フォン・ノイマン問題については、著者が最近書いた一般向けの文章 [6] を参照されたい。

基礎知識が必要となる。ここではその子細について触れる余裕はないが、[21] ごく大雑把に言うと、一つの可能な解決策は、集合論の外宇宙 (outer universe) Ω から見ると一つ一つのユニヴァースは可算で推移的な集合論のモデルになっている、という状況の公理化となっているような、拡張された集合論を導入し、そこで数学をすることである。[22] このときの Ω の理論は、形式論理での理論として外から見たときには、この拡張の出発点としての ZFC (あるいは ZFC + ある巨大基数の存在公理) と無矛盾等価になっているようにとれる。

この世界像での旧来の数学は、Ω に埋め込まれた一つ一つのユニヴァース内の現象学に共通する理論であり、独立性証明は、これらのユニヴァースのいくつかの間の星間旅行の (ベース (キャンプ) となる宇宙で書かれた) 旅行記のようなものになる。しかし、もっと大胆に Ω での現象学を、新しい、より広い意味の数学として捉える、という見方も可能である。

この Ω に埋め込まれている無限に存在するユニヴァースの総体を数学的対象として見るという視点は、集合論的多元宇宙 (set-theoretic multiverse) とよばれ、近年脚光をあびている (集合論的多元宇宙についての子細は、[3] とその文献表も参照されたい)。

集合論的多元宇宙の概念はもともとウディンが導入したものである。ウディンが試みているのは、第1節にも書いたように、集合論の公理系の (唯一の)「正し

---

21 これについては、たとえば、[9] の IV.5. を参照されたい。[3]、[5] にも関連の記述がある。特に [3] では、以下で述べる集合論的多元宇宙の基礎付けについてのより詳しい議論がなされている。[10] も参照されたい。

22 個々のユニヴァースを外宇宙から見たときに可算になるようにしているのは、こうすると、強制拡大でユニヴァースに付け加える強制集合 (generic set) の存在が外宇宙で証明できるからである。外宇宙に ZFC より弱い公理系が成り立つことのみを要求するときには、可算性の仮定をはずして、すべてのユニヴァースが外宇宙の内部モデルになっていて、ユニヴァースの作るクラスのクラスが強制拡大に関して閉じている (つまり強制集合が常に存在する)、という仮定を付け加えた理論で、通常の ZFC と無矛盾等価なものを得ることができる (これについては [3]、[10] を参照されたい)。

い」拡張を見出して、連続体仮説を含む重要な、しかし現在の集合論ではまだその真偽の決定のできない命題(の多く)の真偽を定めることである。集合論のユニヴァースたちの総体を一種のカテゴリーとして見たとき、それらのユニヴァースの中で要になっているものが特定できれば、その性質を抽出することで集合論の「正しい」拡張が得られるだろう。巨大基数の存在が射影集合に関する連続体仮説を導いたように、この何等かの意味で要となっているようなユニヴァースの存在の証明には、ある種の大きな巨大基数が関与する可能性が大きい。

しかし集合論のユニヴァースが「要になっている」ということをあらわすと解釈できる互いに相容れない性質が複数出てきてしまう、という展開になる可能性も多いにあるように思える。コーエンモデルやランダムモデルのような明らかに人工的なユニヴァースが沢山あるので、それらと、この要となっている、あるいはそれに準じるユニヴァースの間の異差を明確にすることで、ユニヴァースの分類理論を確立できれば、対応するZFCの可能な拡張の分類が得られ、「正しい」公理系の候補を絞り込み、それらの間の関連性の理解を進めることはできそうである。

要になっているユニヴァースの性質が研究の進展につれて一意に収束してゆくことになるのかどうかにかかわらず、このユニヴァースたちの総体としての多元宇宙を数学の世界として認めることで、不完全性定理によって宿命づけられ、集合論の研究の進展によって異る集合論の宇宙の可能性として開示されることにさえなった数学の未完成性、不定性、非決定性と、(少なくとも数学者が数学を推し進める上での便宜的な場としての)数学的プラトニズムの間の決裂をさけることができるように思われる。

もちろん、不完全性定理の呪縛は我々の立場を公理化するごとに、したがって、Ωの理論をどのように同定したときにも、新しく降りかかってくるものではあるが、[23] ちょうど$0, 1, 2, 3, \cdots$と言うときの「$\ldots$」が、我々が数の無限性を前にして

[23] 通常の数学に対する、外宇宙Ωの理論は、強制拡大たちを具現化して見られるようにするた

足がすくむのを阻止してくれていたように、集合論的多元宇宙の提供するプラトニスティックな視点は、集合論の可能な拡張の無尽蔵性、あるいは、これを意味論的にとらえなおしたときの、集合論のユニヴァースの無尽蔵性に我々が足をすくませることなく積極的に取り組むことを、鼓舞してくれるのではないだろうか。

5　再び数学の究極の未解決問題について

数学の究極の未解決問題は、現在未完成であり、ゲーデルの第一不完全性定理によってそれが未来永劫にわたって未完成であり続けることを宿命づけられているところの数学自身であろう。数学の中には、問題としてよく定式化された大小様々な未解決問題や、問題としての定式化自身が未解決の未解決問題以前の未解決問題を含め、無数のチャレンジが我々を待ち受けている。今、『未来永劫にわたって未完成であり続けることを宿命づけられている』と書いたが、それは言い換えれば、数学はどこまで行っても更に進歩しうることを保証されている、ということでもある。

それらの問題の枠組となっている集合論やその可能な拡張、あるいはそれらの部分理論に関する研究は、我々のこの未解決問題としての数学に対する認識をより深いものへと導きつつある。

第４節で論じた集合論的多元宇宙の考え方は、無限に分岐してゆく「可能な集合論（数学）」像と、数学者の（少なくとも研究を促進させるための作業仮説とし

めの方便に近いものであるが、多元宇宙に視点を移したときには、もっと実体をもったものとして認識されるべきものになる。たとえば、多元宇宙に含まれるすべての宇宙が強い巨大基数の公理をユニヴァーサルに満たす、というような公理を考えることにするとすると、このような公理は多元宇宙に対する公理である、というより Ω に対する公理であると言うべきだろう。

更に積極的に視点の中心を Ω に移すと、Ω の理論こそが集合論の本来の理論である、という見方さえ可能になるが、ここまで視点を移動したときには、Ω に対する不完全性定理現象がもはや無視できなくなり、可能な外宇宙たちの形づくる多元宇宙の多元宇宙を考えざるをえなくなる。更にこれらを含む外外宇宙を考えると、etc. などとして、多元性の階層が上に向って無限に連なって行く、というような集合論の宇宙像を考えることが必要になってくるかもしれない。

ての）[24]ナイーヴなプラトニズムとの間の折り合いをつけることを可能にする自然な視点を提供する（集合論的、乃至数学的）宇宙観となっていると言えよう。[25]

参考文献

[1] Paul Bernays, Le platonisme dans les mathématiques, L'Enseignement Mathématique, Vol.34, (1935), 52–69.

[2] Solomon Feferman, Is the Continuum Hypothesis a definite mathematical problem?, draft of paper for the lecture to the Philosophy Dept., Harvard University, Oct. 5, 2011.

[3] Sy-David Friedman, Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On set-generic multiverse, submitted.

[4] Sakaé Fuchino, The Set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous Platonism viewpoint, Annals of the Japan Association for the Philosophy of Science Vol.20 (2012), 49–54.

[5] 渕野 昌、 構成的集合と公理的集合論入門、[11] の第 IV 巻に収録、 (2007).

[6] 渕野 昌、冬の旅 — ポーランドとチェコへの数学の旅、数学セミナー、Vol.55 no.6, (2016), 50–56.

[7] Kurt Gödel, What is Cantor's Continuum Problem?, American Mathematical Monthly 54, 515–525; errata 55, 151 (1947); Revised and expanded ver-

---

24 この「研究を促進させるための作業仮説」に関しては、ベルナイス (Paul Bernays, 1888–1977) の [1] の議論も参照されたい。

25 もちろんここで言っている宇宙は物理的な宇宙ではなく、しかし物理的宇宙に対する思惟をもすべて含む、観念の宇宙である。

sion in: P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall (1984).

[8] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/2003).
日本語訳： A・カナモリ著、渕野 昌 訳、**巨大基数の集合論**、シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998).

[9] Kenneth Kunen, Set Theory, College Publications (2011).

[10] John R. Steel, Gödel's program, in: Juliette Kennedy (ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, Cambridge University Press (2014), 153–179.

[11] 田中一之 (編)、**ゲーデルと20世紀の論理学**、I–IV、東京大学出版会 (2006–2007).

[12] H.Weber, Leopold Kronecker, Mathematische Annalen 43, (1893), 1–25.

[13] Hermann Weyl, *Das Kontinuum, Kritishe Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, (1918), 日本語訳: ヘルマン・ヴァイル著、渕野昌、田中尚夫 翻訳／解説、**連続体** (2016).

[14] Ernst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281.