“コーエンの強制法” と強制法[1) 2)]

渕野 昌

12. November 2016
(04:31 JST) 版

1　研究進展の試金石としての未解決問題

数学では，大きな未解決問題がその研究領域での何世代にもわたる研究の進展の試金石のようなものとして機能することは稀ではない．フェルマーの予想が数論に対して果してきた役割はそのようなものとしても理解できるだろうし，本稿でこれから議論しようとしている連続体仮説の，集合論研究に対して果してきた役割もそうであったし，今もそうであり続けてもいる．

フェルマーの予想は，谷山-志村予想の解決というもっと大きな文脈の中で，1990 年代の中頃に ワイルズ (Andrew Wiles, 1953(昭和 28) –) によって肯定的に解かれた．一方，連続体仮説については，後で述べるような意味で，この問題がそれによって完全に解決されたとは言えないのだが，コーエン (Paul J. Cohen, 1934(昭和 9) – 2007(平成 19)) は，この仮説の数学からの独立性 (正しいと仮定しても正しくないと仮定しても矛盾が生じないこと) を 1960 年代に証明している．コーエンがこの証明のために導入した強制法 (forcing) と呼ばれる手法は，それ以降の集合論研究を，それまでとは決定的に異るものに変えてしまった．

ワイルズはフェルマーの予想 (フェルマー-ワイルズの定理) の解決がなされた時点で 40 才を越えていたため，その成果がフィールズ・メダルの受賞対象にはならなかったが，当時まだ 30 才台前半だった コーエンは，1966 年にモスクワで開催された世界数学者会議で，彼の連続体仮説に関する研究成果に対しフィールズ・メダルを受賞している．

フェルマーの予想は，ディオファントスの『数論』の欄外にフェルマーが記した書き込みの逸話や，多くの人が証明を試みて挫折したことなどから大変に有名にはなっていたが，その命題自身には，それほど深い意味があるようには思えない．それにもかかわらず，この命題の解決にむけての様々な試

---

1) このテキストは,『数理科学』2014 年 10 月号に掲載予定の同名の記事の拡張版です．ページ数の制限のために記事から削除せざるを得なかった細部や，そこには含めないことにしたリマークのいくつかを加えてあります．

2) 本稿の原稿に対して，松原洋 (名古屋大学)，薄葉季路 (神戸大学) 両氏から，有用なコメントや誤植の指摘をいただいた．ここに感謝の意を表す．

みから直接的間接的に派生した，あるいはそれらの試みから触発されて生れた数学理論は近代，現代の数学を大きく進歩させてきたと言えるだろう[3)]．

一方，連続体仮説は，次の第 2 節で見るように，数学の基礎に関する根本問題の一つであるように思える．この違いは，たとえば，連続体仮説がヒルベルトの 23 の問題に第 1 問題としてあげられているのに対し，フェルマーの定理はこの問題のリストに含まれてもいないことにも象徴されていると言えるだろう．しかし，まさにこのことが，コーエンによる連続体仮説の “解決” の真に意味するところを見えにくくしている原因の 1 つになっているようにも思える．つまり，彼の連続体仮説の研究が強制法 という革新的な手法の集合論への導入を惹き起こした，という事実や，この「解決」は実は最終的な解決ではなく，より深淵な興味深い問題がその後さらに研究されつつある，という事実を，この「非常に重要な問題の “解決”」という見掛けが不当に隠蔽してしまっているように思えるのである．これについては，後の第 4 節 と第 5 節でさらに詳しく述べる．

2　連続体仮説と集合論

集合論は，代数，幾何，数論などに比べて非常に若い研究分野である[4)]．これらの古典的な数学の研究分野の始まりが幾千年もの人類の文明の歴史の過去のかなたにかすんでいるのに対し，集合論は，カントル (Georg Cantor, 1845(弘化 2)– 1918(大正 7)) のフーリエ解析の研究が契機となって，19 世紀の後半に創造された数学の研究分野である[5)]．

カントルが集合論の研究の初期に頻繁に自分の研究の進展をデデキントに書き送っていたことから，無限の研究としての集合論が独立した数学の研究分野として生れた日の日付が特定できる: 1873(明治 6) 年の 12 月 7 日にカントルは実数の全体 $\mathbb{R}$ を自然数の全体 $\mathbb{N}$ で数え上げることができないこと (つまり，実数の全体を $\mathbb{R} = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ と表現できないこと) を証明して，その翌日にこの証明をデデキントに書き送っているのだ．自然数の全体はもちろん実数の全体の部分集合である (特に実数の全体に 1-1 に埋め込める) か

[3)] 数論の歴史の中での，フェルマーの定理の役割に関する一般向けの日本語で書かれた解説の一つとして， [1] があげられる．
[4)] もう少し後出の数学の研究分野である (近代的な) 解析学との比較でも，集合論の始まりは 200 年近くの時差がある．
[5)] 以下で述べている集合論の歴史に関する私の認識は，A. Kanamori による [11], [12], [13] に負うところもある．

ら，このことは，実数の全体の無限のサイズ (濃度) が自然数の全体のそれより真に大きい (実数の全体は可算でない) ことを示していると解釈できる．

カントルは，その後の研究で，すべての無限集合 X に対し，その集合より濃度が大きな集合が存在することを示している (X の冪集合 $\mathcal{P}(X) = \{y : y \subseteq X\}$ がそのようなものの一つになる)．また，彼は，多くの集合について，その濃度 (集合のサイズ) が非可算なら (つまり可算でないなら) 連続体濃度 (実数の全体と 1-1 onto に対応がつけられること) であることを示している．たとえば閉集合についてそれが言える (この証明には可算でない閉集合 $C \subseteq \mathbb{R}$ が与えられたとき超限帰納法を用いて C から順次孤立点を取り除いてゆくことで，最終的に C の空でない部分集合で完全集合になっているものが残ることを示すことでなされる．空でない完全集合は連続体濃度を持つことが示せるので，このことから C も連続体濃度を持つことがカントル-ベルンシュタインの定理[6)]から帰結できる)．またカントルは $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,..., $\mathbb{R}^\omega$ (無限実数列の全体) がすべて連続体濃度になることを示している．$\mathbb{R}^n$ の閉部分集合や開部分集合についても上と同じことが言える．また，これはカントルより後の時代の研究だが，すべての解析集合 (ボレル集合の射影として表わせるような集合) も非可算なら，連続体濃度を持つことがスースリンによって示されている．特に，すべてのボレル集合は非可算なら連続体濃度である．

カントルは上で述べたような完全集合の構成で用いられた超限帰納法についての考察をさらに進めて (超限) 順序数の理論を確立している．順序数の理論と上で述べた無限集合 X の冪集合が X より真に大きな濃度を持つことを組み合わせると (実際にはこの議論では更に選択公理も必要になるのだが)，無限集合の濃度が順序数によって小さい方から整列されることが示せる．カントルはそのように整列された無限集合の濃度をヘブライ語のアルファベットの最初の文字 ‘ℵ’ (アレフ) を用いて $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,..., $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$,... とあらわした．$\aleph_0$ は可算集合の濃度で，$\aleph_1$ はその次に大きな濃度，…，$\aleph_\omega$ は $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... の極限の濃度である．

実数の全体の集合の濃度 (これは連続体濃度と呼ばれ 連続体 (the continuum) の頭文字をとって $\mathfrak{c}$ で表されることが多い) がこの基数の列の中のど

[6)] カントル-ベルンシュタインの定理は，「集合 X から Y への単射と Y から X への単射が存在するとき，これらの単射から X から Y への全単射を作ることができる」ということを主張する定理である．この定理から，集合の (単射の存在により定義される) 濃度の大小関係が反射律を満たすものになっていることが分る．

れになるのか，というのは自然な疑問である．閉集合やもっと一般的な解析集合に関する上で述べた結果から，実は可算濃度と連続体濃度の間には基数が存在しないのではないか，とも思える．カントルは多分そのような直観から， $\mathfrak{c} = \aleph_1$ であることを予想した．カントル自身はこれをまだ証明されていない定理と固く信じ，„das Kontinuumproblem“ (連続体問題) とよんで生涯その証明に全力をかたむけた．等式 $\mathfrak{c} = \aleph_1$ はその後，連続体仮説 („die Kontinuumhypothese“, 英語では the Continuum Hypothesis (略して CH)) とよばれるようになった．ヒルベルトが 1900 年のパリで開かれた世界数学者会議での講演で，この問題を彼の 23 の数学の未解決問題のリストのうちの最初の問題として取り上げたことは既に本稿の初めでも述べた[7)]．

濃度 κ の集合の冪集合の濃度を 2^κ であらわすことにする．$\mathbb{R}$ と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は等濃度になることが容易に示せる (各 $r \in [0,1]$ に r の二進表示に対応する $\mathbb{N}$ の部分集合を対応させる写像はほとんど 1-1 onto である．$[0,1]$ と $\mathbb{R}$ の間には容易に 1-1 onto 写像を定義することができる) ので，$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ である．したがって，連続体仮説は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ とあらわすことができるが，これを一般化した,「すべての順序数 α に対し $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ が成り立つ」， という主張は一般連続体仮説 (Generalized Continuum Hypothesis (GCH)) とよばれているハウスドルフによって定式化された仮説である．

1900 年代から 1930 年代にかけては様々な集合論の公理化の試みがなされることになった．世紀末から 20 世紀初頭にかけてラッセルのパラドックスをはじめとして，集合の構成原理の適応範囲をとり違えることで矛盾が容易に導かれてしまいうることが明かになったことが集合論の公理化を促したのだった．ただし，カントルは集合論で何が許容範囲内の議論なのかということに対する正しい直観を持っており，彼の研究結果は公理化された集合論の体系の中で再構成されることになった[8)]．集合論の公理化の研究を進めたの

[7)] 集合論の研究が主にドイツ語圏でなされていた 20 世紀前半には，可算をあらわすドイツ語 abzählbar の頭文字をとって $\mathfrak{a}$ で可算濃度をあらわすことが多かったので,「俺は可算濃度と連続体濃度の間にあるのが何か知っているぜ．$\mathfrak{b}$ だよ.」というインサイダージョークが成立していた．奇しくも，20 世紀の終り頃からは $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は連続体の集合論的構造の不変量として知られている基数のうちの二つをあらわす記号として用いられるようになっている．$\mathfrak{a}$ は almost disjoint number とよばれ，互いの共通部分が有限になっているような自然数の無限集合の族でこの性質に関して極大なものの濃度のうち最小のものをあらわし，$\mathfrak{b}$ は自然数から自然数への関数の族で，その族に属す関数のすべてがある一つの関数によってほとんど pointwise に (有限個の点をのぞいて pointwise に) に上から抑えられてはいないようなものの濃度のうちの最小のものをあらわす．このとき，$\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ となることはすぐに分るので，連続体仮説の下では $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ であるが，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ も集合論と矛盾しないことがシェラハ (Saharon Shelah) の 2004 年に発表された論文で証明されている．

[8)] カントルの集合論 (言わゆる素朴集合論) はラッセルのパラドックスなどにより矛盾する間違った理論であることが判明した，というような一部の論者の間に広まっている認識は，この意

はツェルメロ，フレンケル，フォン・ノイマン，ベルナイス，スコーレムといった人達だったが，彼等の多くは，この研究で確立された集合論の公理系が無矛盾で完全であることがやがて証明できることを確信していたようである．このことは彼等の論文に散見されるコメントから読みとることができる (ただし上にあげた人々のうちスコーレムは他の人達より集合論の完全性や無矛盾性に対して懐疑的だったようだが).

しかし，そのような証明が原理的に不可能であることが，1931 年に発表されたゲーデルによる次の結果で判明してしまう[9]．

定理 1 (ゲーデル-ロッサーの第一不完全性定理). T を初等数論 (ペアノ算術の十分に大きな部分) を含む具体的に与えられた公理系とするとき，T が無矛盾なら，T から証明できないし，その否定も証明できないような (つまり T から独立な)，T の言語での文 φ が必ず存在する. ❏

定理 2 (ゲーデルの第二不完全性定理). T を定理 1 でのような公理系とするとき，T が無矛盾なら，T の無矛盾性を主張する (算術の言語での) 論理式 $consis_T$ は証明できない. ❏

集合論の公理系やその (具体的に与えられた) 拡張はすべて上の T の条件を満たすので，それが無矛盾なら完全でない (それから独立な命題が存在する) し，その無矛盾性を証明する数学的な手立ては全くない (集合論はすべての数学を包含していると考えられるので，そこで証明できなければ，ほかに数学的に証明することは不可能である).

ちなみに，不完全性定理は，実際には，証明の有限的な操作に関する確定的な議論のみを問題とする世界での主張である．たとえば，第二不完全性定理については,「もし T の無矛盾性を表明する (具体的に定義されている特定の) の論理式 “$consis_T$” の T からの証明 P が与えられたとすれば，⋯ というやり方で P を変形することで，T からの矛盾の証明が得られる」という表明が示されていることが，第二不完全性定理の証明の分析から分る.

第二不完全性定理は集合論の矛盾を主張するものではもちろんないが，ひょっとしたら数学は矛盾しているかもしれない，という不安を完全に払拭する手立てがないことを示してもいる訳なので，その理由から，特に他の数学理論

味で間違っている (あるいは少なくとも misleading である) と言えるだろう．ことに対する注意は [8], [10] などで既に述べている.

[9] ロッサー (J. Barkley Rosser) によるここで述べた形の第 1 不完全性定理の改良はロッサーの 1936 年の論文で発表されている (ゲーデルのオリジナルな形の第一不完全性定理は理論 T の無矛盾性より強い仮定が必要となっていた).

より無矛盾性の強さ (consistency strength) の大きな[10] 集合論の構成原理をフルに使って数学することを躊躇する人もいる，ということもある意味で納得のゆくことと言えるのかもしれない．特にすぐ後に述べることになるゲーデルの結果やコーエンの結果が得られる前の集合論を，不完全性定理の暗示する不安な状況とはかりにかけたときには，このことは十分に納得できるようにも思える．実際，たとえば，フォン・ノイマンはゲーデルの不完全性定理の発表された 1931 年以降，それまで彼の主要な専門分野の一つだった集合論や数理論理学での仕事を全くしなくなっている．

一方，第一不完全性定理は，数学での未解決の問題が，もしかしたらどれも数学から独立かもしれない，したがって，普通の数学的なやり方では絶対に証明も反証もできないかもしれない，という可能性を示唆する — ちなみに，数学のある定理が数学から独立であるかいなかを判定する一般的なアルゴリズムも存在しないことが知られている (チャーチの定理)．ゲーデルが 1938 年に発表された彼の一般連続体仮説に関する次の結果を証明したとき，連続体仮説がそのような数学から独立な命題になっているかもしれない，という予測は，彼の頭の中に当然あったはずである:

定理 3 (ゲーデル). 集合論の公理系 (から選択公理を除いたもの) が無矛盾なら，この公理系に一般連続体仮説 (と選択公理) を加えたものも無矛盾である． ❏

「集合論の公理系が無矛盾なら」とわざわざ断っているが，第二不完全性定理により，この前提ははずすことができない．定理 3 の証明は，構成可能集合 (ごくラフな言い方をすると，超限帰納法を用いて定義可能性の議論を積上げてゆくことで構成できる集合) の全体が集合論の公理と一般連続体仮説のモデルになっていることを示すことでなされる．しかし，この言い方では集合論からの矛盾が得られたようにも読めてしまう．集合論のモデルの存在から集合論の矛盾性が証明できるから，集合論のモデルの存在が証明できたとすると，第二不完全性定理から，この証明を変形して集合論からの矛盾の証明が得られてしまうはずだからである．これが起っていないのは，ここでモデルと言っているのがここでは真のクラス (構成可能集合の全体 L) を台集合として，もともとの $\in$ 関係をそこに制限した形のものになっていて，

---

[10] ある理論の無矛盾性の強さが他の理論より高い，というのは，この理論から他の理論の無矛盾性が証明できる，ということであるが，第二不完全性定理により，これは，言わば，この理論が他の理論より矛盾している可能性が高い，ということでもある．

L が集合論と一般連続体仮説のモデルになっている，という主張は，そこでの各 (有限的な) 証明に対して L がそれを成立させるものになっていることを “集合論の外” (つまり超数学のレベル) で証明しているにすぎないからである．なお，すべての集合が構成可能である可能性もあるので，タルスキーの真理の定義不可能性定理から，ここでの “各 (有限的な) 証明に対して…” という形の主張は集合論の矛盾が導かれないぎりぎりの線のものになっていることも分る．

ゲーデルのこの定理の証明は，現在の数学のスタンダードから見れば，少なくとも数学的なテクニックに関してはそれほど難しいものではないはずなのだが，そこでの議論は上で見たような数理論理学で得られている知見の微妙な部分と密接に関わりあっているため，数理論理学の基礎的な知識を持っていない人にとって理解が難しいものになっているのではないかと思う．このことは，次に述べるコーエンの結果や，その証明から発展した強制法の理論についてはもっと強く言える．その結果，コーエン以降の集合論は，数理論理学の素養を十分に持っていないことの多い他の分野の数学者から言及されることがほとんどなくなってしまった．後に述べる定理 4 でコーエンはフィールズ・メダルを受賞するのだが，“これが数理論理学の専門家にこの賞が与えられる最初で最後だった”[14] [11)]．数理論理学の研究分野の中には計算機科学との関連をより強く持つものも少なくないが，集合論の周辺では数学的な研究 (結果が数学的であるだけでなく，用いられる手法や理論の体系自身も数学的な洗練を示すものになっているような研究) が爆発的な発展を遂げている．コーエン以降，この発展が数学の進歩としてフィールズ・メダル授与という形で一度も認識されていないのは，上で示唆したような種類の数理論理学の知識の前提が障害となって，集合論の研究成果の評価ができる人が他の分野にはほとんどいなくなってしまっていることが，その大きな原因の一つかもしれない．

3　連続体仮説の独立性証明と強制法

コーエンは 1963(昭和 38) 年に次の結果を得ている:

定理 4 (コーエン, [2, 3]). (a) 集合論の公理系が無矛盾なら，これに連続体仮説の否定を付け加えたものも無矛盾である．(b) 集合論の公理系から選択

[11)] Monastyrsky のこの文章では，今後も与えられることは絶対にない，ということを表明しているように見える断定的な書き方がされている．

公理を除いたものが無矛盾なら，これに選択公理の否定を付け加えたものも無矛盾である． □

これとゲーデルの結果と合せると，一般連続体仮説と選択公理の，(選択公理を除いた) 集合論の公理系上の独立性が示せたことになる．

コーエンの結果も，論理式や公理の体系に関する確定的な操作に関する命題として述べることができる: 集合論の公理系と連続体仮説の否定を合せたものからの矛盾の証明が与えられれば，それから集合論の公理系だけからの矛盾の証明を作りだすアルゴリズムが存在する．

コーエンのこの結果の証明は，ゲーデルの定理 3 の証明よりさらに矛盾すれすれのアクロバットを行なっているように見えるものになっている．定理 4 (a) の証明の粗筋は，次のように述べられる: 集合論の公理系を Zermelo-Fraenkel の集合論でのそれ (ZF) としてとり，M をその可算で推移的な $\in$-モデルとする[12)]．ゲーデルの結果 (定理 3) により M は選択公理も満たすとしてよい[13)]．このとき，M 上の generic-集合と呼ばれる M に含まれない，ある意味で M 上の独立性の高い集合 G をとり，M と G を部分集合として含む集合論 (と選択公理) の $\in$-モデルとなっているような最小の集合 (M の強制拡大) $M[G]$ が作れるが，これは連続体仮説の否定のモデルにもなっている．

定理 4 (b) の証明は，$M \subseteq N \subseteq M[G]$ となるような ZF のモデル N で選択公理は満たさないようなものをうまくとることでなされる．

上の記述で一番問題になりそうに思えるのは，「M をその (ZF の) 可算で推移的な $\in$-モデルとする」というところであろう．そのようなモデルが存在することからは，ZF の無矛盾性を主張する ZF の言語での論理式が ZF の中で証明できてしまうが，第 2 不完全性定理から，そのことから ZFC が矛盾することが示されてしまうからである．

この問題は，次のようにして回避することができる: 任意の ZFC の有限個の公理の集まり Γ を考える．これから無矛盾性を証明するために使うことになる集合論の公理は高々有限個である．それらの有限個の公理と強制拡大がそれらの公理を成り立たせるものになっていることを保証する公理を合せたものを考えてもそれらは高々有限個である．しかも，この「有限個」というのは，集合論の内部の有限の概念によるものであるばかりでなく，集合論の外

[12)] M が $\in$-モデルとは，モデルでの要素関係の解釈が本物の要素関係を M に制限したようになっているモデルのことである．集合 X が ($\in$-関係に関して) 推移的であるとは，任意の集合 x, y について，$x \in X$ かつ $y \in x$ なら $y \in X$ が成り立つことである．

[13)] ZF に選択公理 (Axiom of Choice) を加えた体系は ZFC とよばれる．

側の meta mathematics での意味での有限である．それらの有限個の公理を Γ に付け加えたものを Γ' とすると，レヴィの絶対性補題とモストウスキーの崩壊補題から，Γ' を満たすような可算で推移的な $\in$-モデル M が存在することが示せる．この M に対し，$M[G] \models \Gamma + \neg\mathrm{CH}$ となることが示せるが，このことから，$\Gamma + \neg\mathrm{CH}$ は矛盾しないことが示せたことになる (もし $\Gamma + \neg\mathrm{CH}$ が矛盾するなら，ここでの議論と合せると ZFC から矛盾が示せたことになり，仮定に反する)．Γ は任意だったので，このことから $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$ は無矛盾であることが帰結できる．

ただし，今日，強制法を用いるとき，このような,「正しい」記述をすることはまずない．普通に「M を ZFC の可算推移的モデルとする」として議論を始めるか，さらには，集合の全体のユニヴァース V 自身をこの M のようなものとしてとって V の強制拡大について議論をする，という書き方をすることすら少なくないし[14)]，そのことの「正しい」読み替えの仕方についてあらためて断ることもない．[7] では，このことに関して，

> We follow current set-theoretic fashion — those who object to the fact that some of our arguments are not formalizable in ZFC ae referred to the texts, where it is shown how to overcome such difficulties via circumlocutions.

という注意書きがあるが，この論文はこのような注意書きがわざわざ書いてある最後の論文の 1 つと言えるかもしれない．

4 “コーエンの強制法” と強制法

コーエンが定理 4 (a) の証明を行ったときに彼の導入した強制法は，今日強制法として知られている一般的な手法の特殊例の 1 つで，今日では彼の名前を冠してコーエン強制 (Cohen forcing) と呼ばれるものだった．今日の意味での一般的な強制法は，初期にはコーエン自身も含み，当時コーエンの手法をいちはやく取り入れて新しい結果を次々に得ていったソロベイ，レヴィ，スコット，シェーンフィールドといった人たちによって 1970 年代ころまでに整備されたものである．

現代的な強制法の理論では，議論の出発点としてとった推移的な集合論の $\in$-モデル (ground model) M の中で最大元を持つ半順序集合 $\mathbb{P}$ をとり，$\mathbb{P}$

14) 巨大基数の存在のもとで強制法の議論を行なうときに，このような書き方が自然なものになる．

の部分集合として generic-集合 G をとって $M[G]$ を構成する．ここで G が (M 上) generic であるとは，(a) G は上方向に閉じていて，(b) G の任意の二つの要素の下には G の要素が共通にあり，(c) M の要素で $\mathbb{P}$ の (下方向に) 密な部分集合は常に G と共通の要素を持つ，ということとして定義される．特に，ここで最後に述べた性質 (c) は G の M 上の genericity とよばれるもので，決定的な役割をはたすことになるものである．

$\mathbb{P}$ が無原子的なとき，つまり，ある無原子的なブール代数の正の要素の中の (下方向に) 稠密な部分集合に対応するようなものになっているとき，このような G は M の要素にはなり得ないことが簡単に示せる．

集合論の言語で表現のできる命題 φ と $p \in \mathbb{P}$ に対し，“p を要素として含むすべての generic-集合 G に対し，$M[G]$ で φ が成り立つ” という関係 (このことを $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “φ” と表す) は M で記述できる (強制定理)．また任意の M 上の generic-集合 $G \subseteq \mathbb{P}$ に対し，$M[G]$ で φ が成り立つなら，$p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “φ” となるような $p \in G$ が存在することも示せる．M が可算なら，M の要素になっているような $\mathbb{P}$ の稠密部分集合の全体も可算なので，これらをならべておいて対角線論法を用いて構成することで，$\mathbb{P}$ に関する M 上の generic-集合 G が容易に得られる．M が可算でないとき (たとえば M として本物の集合論のユニヴァースをとるとき) には，このような構成は一般にはもはやできないのだが，このときにも関係 $\Vdash_{\cdot}$ “ $\cdot$ ” は M で定義できるので，generic-集合 G を用いる議論を $\Vdash_{\cdot}$ “ $\cdot$ ” を用いる議論に翻訳しなおすことで，同様の独立性証明の議論が可能になる．

ここで述べたような強制法の現代的な枠組から見たとき，コーエンの導入した強制法は，次のような半順序集合 $\mathbb{C}_\kappa$ に特化したものになっていた: κ を (M での) ある基数として，$\kappa \times \omega$ から $\{0,1\}$ への有限部分関数の全体を $\mathbb{C}_\kappa$ とする[15)]．$\mathbb{C}_\kappa$ 上の半順序としては，(関数の) 包含関係の逆を考える．G を M 上 $\mathbb{C}_\kappa$-generic とすると， (b) から，G の要素となっている部分関数は互いに共存可能なものとなっているので，G の関数を全部はりあわせた $\kappa \times \omega$ から $\{0,1\}$ への (部分) 関数 $\bigcup G$ が考えられる．さらに (c) により，$\bigcup G$ は実は $\kappa \times \omega$ 全体で定義されたものとなり，$\bigcup G(\alpha, \cdot)$, $\alpha < \kappa$ は互いに異る ω から $\{0,1\}$ への関数となることが分る．一方，$\mathbb{C}_\kappa$ が countable chain condition と呼ばれる性質を持つことから，M の基数はすべて $M[G]$ でも基

15) 集合論では ω で (0 を含む) 自然数の全体に対応する集合をあらわす．

数になっていることが証明できる．これらのことから，$M[G]$ では，$2^{\aleph_0} \geq \kappa$ が成立していることが分る．

強制法は，コーエンの 1963 年の論文での導入から非常に短い期間の間に，現在に用いられるものとほぼ同じ形の理論にまでに整備されていることに驚かされる．1967 年に UCLA で開催された集合論のシンポジウムのプロシーディングスとして出版された [16] を見ると，ソロベイの実可測基数に関する論文 [19] (選択公理を含む集合論の公理の下でルベーグ測度をすべての実数の集合上の σ-加法的測度に拡張できることと，実可測基数の存在の同値性，さらにこれらのことと可測基数の存在との無矛盾等価性が証明されている) や，サックス強制の導入されているサックスの論文 [15]，クレパ仮説とチャング仮説についての古典的な結果の証明を与えているシルバーの論文 [21] などの歴史的な文献と一緒に，シェーンフィールドの強制法の定式化に関する論文 [20] が載っていて，この論文での記述は，既に現在の強制法の理論の展開とほぼ同じ形のものになっていることが認められる．現代の強制法で多用される重要な手法に対応するもので，ここでまだ現れていないのは，このすぐ後にソロベイとテンネンバウムによってその基礎の最初の部分が導入されることになる強制法の超限回繰り返しの理論くらいなものである．

このプロシーディングス [16] にはコーエン自身の論説 [6] も含まれているのだが，ここでのコーエンは，集合論の基礎付けについての “哲学的” な，しかも懐疑主義者の視点からの考察のように見えるものに終始していて，強制法の理論の数学としての発展に対しては全く興味を失なっているように見える．この少し前に上梓された [4] ではこの論文で見られるような集合論の研究の進展に対する否定的な姿勢はそれほど見られないので，コーエンのこの数学に対する立場の激変はこの間の時期に起こったものだと思われる．[4] には,「ロビンソンのエルサレムでの講演が自分の思想に大きな影響を与えた」というような表明もあるが，これがどういう種類の思想の変化だったのかはより子細に検証／考察してみる必要があるように思える．

コーエンはこの後集合論の発展に積極的にコミットすることはなかったようである．コーエンのフィールズ・メダル受賞にもかかわらず，彼の導入した強制法の意義が数学のコミュニティーに広く認識されていないのは，前に書いたように，連続体仮説という重要な問題の解決という点に注目が集まってしまったからでもあろうし，強制法が，その理解に数理論理学の深い理解

を必要とするということもあるのだろうが，それ以外にも，唯一のフイールズ・メダルの桂冠集合論研究者コーエンがその後この理論の発展に関して積極的な発言をほとんどしていなかったことも影響しているのかもしれない．

強制法の理論の発展とこの理論による成果に戻ると，上にも何度も名前のあがったソロベイの強制法の導入直後からの活躍が目をひく．コーエンは初め上記のコーエン強制 $\mathbb{C}_\kappa$ による強制拡大での連続体の大きさを確定できないでいたが，ソロベイとコーエンは独立に，κ の (M での) 共終数が ω より大きいときには，$M[G]$ で $2^{\aleph_0} = \kappa$ が成り立つことを証明している．また，コーエンは彼の強制法の議論の出発点で $V = L$ の仮定を必要としていたが，ソロベイはこの仮定が落せることを証明して，強制拡大の反復の可能性への道を開いている．[18] では，ソロベイは 到達不可能基数 κ を持つ M から出発して今日レヴィ崩壊と呼ばれる強制拡大で， κ 未満の順序数をすべて可算なものに “崩壊” させることで $M[G]$ の内部モデルで，弱い選択公理を満たし,「すべての実数の集合がルベーグ可測でベールの性質を持つも」 のがとれることを証明した．つまりこの「すべての …」という主張を，弱い選択公理とあわせたものは ZF と無矛盾であることを証明している．このモデルは現在ではソロベイモデルと呼ばれていて，コーエン以降の集合論の結果で集合論以外の分野の数学者から引用されることのある数少ない結果の一つになっている．[18] や [19] の結果の，数学全般に対するインパクトの大きさから，ソロベイが二人目の集合論でのフィールズ・メダリストになってもおかしくなかったように思えるのだが，そのような流れは起こっていなかったようである．当時は集合論の専門家の中にさえ巨大基数に対して懐疑的な人がいた，ということがソロベイの仕事が十分に評価さなかった原因の一つだったたかもしれない．[19] での可測基数は，当時の感覚としては矛盾している可能性の高い概念だったかもしれないし，[18] では，到達不可能基数の仮定が本当に必要かどうかがまだ判っていなかったために，巨大基数不審のバイアスがかかった視点からは余計に最終的でない結果であるように見えてしまっていたかもしれない．

[18] での到達不可能基数の問題は，1980 年代にシェラハによって意外な解決が与えられることになる: 「すべての実数の集合がルベーグ可測」の無矛盾性には到達不可能基数が必要だが,「すべての実数の集合がベールの性質を持つ」には到達不可能性基数は必要ない ([17])．

5　連続体問題

コーエンの結果から連続体仮説は集合論の公理系から独立であることが分ったわけだが，このことは，現在の集合論の公理系 ZFC がまだ拡張を必要としていることを示している，と解釈することもできる．こう解釈する立場からは，そもそも集合論の "正しい" 拡張が何かが議論できるのか，が問題となってくるが，巨大基数の理論と強制法の理論は，集合論の公理系の拡張の可能性をさぐるための思考実験の手法と見ることもでき，20 世紀末以降に得られつつある集合論でのそのような思考実験の厖大な成果は，そのような議論の可能性を強く示唆しているし，ウディン (Hugh Woodin, 1955(昭和 30) –) らによる研究は，そのような研究の成果による連続体問題の真の解決が手のとどくところにまで近づいていることを予感させるものですらある．

1980 年代に製作された "Horizon, A Mathematical Mystery Tour" と題された BBC の教育番組の中で，デュドネ (Jean Dieudonné, 1906(明治 39) – 1992(平成 4)) は,「(連続体仮説の独立性のような結果は) そのような方向で研究をすることが無意味だということを数学者に教えてくれる，という意味で役に立つ」と言っている．このような視点からは，集合論での独立性命題の研究はコーエンがフィールズ・メダルを受賞したのでもうそれで十分だ，ということになるのかもしれない．しかし，コーエン以降，現在までに得られている，そして現在も得られつつある多く独立性証明を含む二十一世紀の集合論の成果を背景に数学を眺望するとき，この発言はいかにも皮相的なものとしか思われないのである.[16)]

筆者の知っている限りでは，数理論理学の研究分野から二人目のフィールズ・メダリストが生れていたかもしれなかった状況が生じたことが一度だけある．それは，上にも何度か名前のあがったシェラハが 1982 年にワルシャワで開催された世界数学者会議でのフィールズ・メダル受賞者の候補にあがったことが話題になったときである — ただし可能な受賞対象として議論されたのは，彼のモデル理論での仕事であったと思われる．しかし，結局シェラハは最終候補としては残らずフィールズ・メダルを受賞するにはいたらなかった．風の噂では，シェラハの「醜い」数学のスタイルを理由に彼の受賞に強く反対する委員がいたためだ，ということである．シェラハの異様とも言え

[16)] 一方，例えば連続体仮説はその設問自体が間違っている，あるいは "definite" な主張を扱っている問題ではない，という立場もありえる (たとえば [9] を参照).

る数学のスタイルが，彼の人間業とは思えない数学の業績[17] のための不可欠な舞台設定であることを多くの常人[18] が理解できるには，1980 年代初頭はまだ早すぎた，ということなのだろうか．

いずれにしても，シェラハがフィールズ・メダルを受賞しなかったことで，彼の偉大さを理解している人が感じるであろう，シェラハがもらえなかったフィールズ・メダルをもしもらったとしたときのばつの悪さを考えると，数理論理学の分野の人たちがフィールズ・メダルをもらえないことの自然な流れができあがってしまっているように思える．この意味では，脚注 11) で触れた [14] での断定的なリマークが現実味をおびても見えてくる．

6　表彰の文化

「何々賞を受賞した」というのは，軍隊の階級や会社の役職などと同じように,「一般の人」にとって分りやすい評価基準なのだろう．また，日本の新聞には「日本人の (A 県出身の) B 氏が国際的な C 賞を受賞した」というような一文の記事が載ることが多いが，国際的な賞の日本人の受賞に関しては，そういうような国威 (県民意識) 高揚 (?) の効用も期待されているようである．

自分で価値判断をしようとしない人やできない人にとっては，権威のある賞はとりあえずの信頼できる価値判断の基準を与えてくれるものにもなるだろうし，それを唯一の価値基準と思っている人も少なくないのではないだろうか．

また，受賞の可能性の範囲内にある人にとっては，賞の存在は前に進むためのモティヴェーションの一つを与えることになりえる．

しかし，ある賞による評価がある分野を広く網羅しているように見えるときには，逆にその賞を通してすべてを見てしまうことで，重要な項目や視点を見逃してしまうかもしれない，という危険にも十分に留意する必要があるのではないだろうか．

このことは，数学のように十分に客観的な価値評価のできるように見える分野でも言えることだし，むしろ,「客観的な価値評価ができるように見える」ということが重大な見落としを誘発する要因になってしまっている，という可能性すらあるのではないかと思う．

---

[17] 現在では彼の論文番号は 1000 を越えているが，それらは，少数の例外を除くとどれもその一つ一つが驚異的なアイデアを含むものである．

[18] 「常人」とはこの場合シェラハ自身と他の数人を除いた全人類というような意味である．

参考文献

1) 足立 恒雄，フェルマーの大定理 — 整数論の源流，ちくま学芸文庫，(1996/2006).

2) Paul J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 50, (1963), 1143–1148.

3) ____________, The independence of the continuum hypothesis II, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 51 (1964), 105–110.

4) ____________, Set Theory and the Continuum Hypothesis, Dover Books on Mathematics (2008); edition originally published by W. A. Benjamin (1966).

5) Solomon Feferman, Is the Continuum Hypothesis a definite mathematical problem?, Draft of paper for the lecture to the Philosophy Dept., Harvard University, Oct. 5, 2011 in the EFI project series.

6) ____________, Comments on the foundations of set theory, in [16], (1971), 9–16.

7) Alan Dow, Franklin D. Tall and William A.R. Weiss, New proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture I, Topology and its Applications 37, (1990), 33-51.

8) 渕野 昌, 現代の視点からの数学の基礎付け: in: リヒャルト・デデキント著， 渕野昌 翻訳／解説，数とは何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫，(2013) に付録 C として収録.

9) Solomon Feferman, Is Continuum Hypothesis a definite mathematical problem?, draft of paper for the lecture to the Philosophy Dept., Harvard University, Oct. 5, (2011) in the EFI project series.

10) ______, フォン·ノイマンと公理的集合論，現代思想，2013 年 8 月増刊号 (2013), 208–223.

11) Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Corrected Second Edition, Springer (2004): 日本語訳: A. カナモリ (著)，渕野 昌 (訳): 巨大基数の集合論，シュプリンガー・ジャパン (1998).

12) ________________, The mathematical developement of set theory from Cantor to Cohen, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.2, No.1 (1996), 1–71.

13) ________________, Cohen and set theory, The Bulletin of Symbolic Logic Vol.14, No.3 (2008), 351–378.

14) Michael Monastyrsky, Some Trends in Modern Mathematics and the Fields Medal, CMS Notes, Vol. 33, No. 2, (2001), 3–5, and Vol. 33, No. 3, (2001), 11–13.

15) Gerald E. Sacks, Forcing with perfect closed sets, in [16], (1971), 331–356.

16) Dana S. Scott (ed.), Proceedings of Symposia in pure mathematics, Vol. XIII, Axiomatic Set Theory, Part I, (1971).

17) Saharon Shelah, Can you take Solovay's inaccessible away?, Israel Journal of Mathematics, 48 (1984), 1–47.

18) Robert M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics, vol. 92 (1970), 1–56.

19) ________________, Real-valued measurable cardinals, in [16], (1971), 397–428.

20) J.R. Shoenfield, Unramified forcing, in [16], (1971), 357–382.

21) Jack Silver, The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory, in [16], (1971), 383–390.

(ふちの・さかえ， 神戸大学大学院システム情報学研究科)