フォン・ノイマンと公理的集合論[1]

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

28. Mai 2017 (14時10分)

以下の文章は、「現代思想」2013年8月増刊号に，渕野 昌，フォン・ノイマンと公理的集合論 (2013)，208–223. として収録された論説である。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も再収録した。また、投稿／校正後の加筆訂正も含まれている。

1 ジョニーがヨハン フォン・ノイマンだった頃

ジョン フォン・ノイマン (John von Neumann) は、1903年 (明治36年) ハンガリー生れである。もともとの名前は、マルギタイ ノイマン ヤノシュ (Margittai Neumann János) で、[2] ドイツ語圏では、ヨハン フォン・ノイマン (Johann von Neumann) と名乗っていた。外国で自分の名前を同系列のその国の言葉の名前に読み替えるというのは、[3] 当時の (「主流国」の出身でない) 国際人が行なうことが稀ではなかったことのようだ。これは、子供に、外国の名前や、外国風の綴りの名前をつけることがちょっとしたモードにさえなっている現代から見ると、時代の隔たりを感じさせる習慣と言えるかもしれない。

—1926年にフォン・ノイマンはチューリヒ工科大学で化学工学のディプロマを取得した、

—1926年にフォン・ノイマンはブタペスト大学で数学の博士号を取得した、

(1) 名古屋大学の松原 洋氏、および戸大学での筆者の同僚の菊池誠氏からは、本稿の草稿に対する幾つかの有用なコメントを頂いた。ここに感謝の意を表す。

(2) ハルモシュ [27] によると、マルギタイの「イ」は日本語の「の」に相当する助詞で、von Neumann の「von」はこの「イ」から来ているということである。ドイツの当時の記録には、von Neumann Margitta という表記も見られる。

(3) フォン・ノイマンは爵位を含めた苗字をドイツ語綴りから変えなかったが、ベルンシュタインがバーンスタインになったり (もっともこれは発音の違いだけだが) シュタインヴェックがスタインウェイになったり、というように苗字が変更される場合もある。

―1926年から1927年にかけてフォン・ノイマンはゲォティンゲンに滞在した、

というようなフォン・ノイマンの伝記に出てくる記述を読んでいると、彼は同時に複数の場所に存在する能力を持っていたのではないかという気さえしてくる。

さらには、

> ―(1930の秋にケーニッヒスベルクでゲーデルと会った後) 彼はプリンストンの高等研究所に帰り、ケーニッヒスベルクで聞いたこの驚異的な宣言 (第1不完全性定理のこと) について考え続けた。
>
> ―([26])、筆者訳。括弧内は筆者による補足

> ―ベルリンでは特にフォン・ノイマン氏と数理論理学に関する仕事を行った。
>
> ―1930/31の冬学期にベルリン大学に留学していたエルブランのロックフェラー財団への報告、([35])

に至っては、本当に同時に複数の場所にいたことになってしまっている。(4)

実際には、1926年に関しては、フォン・ノイマンがブタペストで数学の博士号を取得したのは同年3月で、チューリッヒで化学のディプロマを取得したのは、1926年10月である([9])。フォン・ノイマンがロックフェラー財団のフェローシップのサポートを受けてゲォッティンゲンに滞在していたのは、1926年秋から1927年夏にかけてで、1927年12月にベルリンでハビリタッチォン (Habilitation, 教授資格) を得て([29])ベルリン大学の私講師になっている。

一方、フォン・ノイマンがプリンストンの高等研究所に滞在のためベルリン大学から休暇をとっていたのは、1930年の1月1日から9月30日まで([9])、

---

(4) ゴルドスタイン[26]は、読みものとしては大変に魅力的な本であるが、数学史、あるいは数学的な内容に関しては、見てきたような脚色が加えられていたり、不正確だったり、間違っていたりして唖然とさせられる箇所がいくつもある。数学の内容では、たとえば、無限基数と順序数の区別がついていなかったり、数学と超数学の違いを取りちがえていたりしていところがある。書かれているべき内容が既に分っている人が読むのなら、こういう間違いも、とても面白い、で済ませてしまえばそれでよいのかもしれないが…。

ケーニヒスベルクの学会で同年の9月7日にゲーデルと会っているのは、むしろアメリカからベルリンへの移動の途上だったと思われる。

1930/31 年の冬学期にはフォン・ノイマンはベルリンで、積分方程式、無限変数解析、および証明論について講義をしていて、1931 年の夏学期には、集合論の講義を、1932 年の夏学期には公理的集合論の講義を行なっている ([28])。

前記のエルブランのロックフェラー財団への報告にもあるように、フォン・ノイマンは、1930/31 年の冬学期には、この半年ほど後にアルプスでの事故で死んでしまうことになるエルブランと数学の基礎に関する議論をしている。この時期に、フォン・ノイマンは、ゲーデルとの議論で当時まだ未発表だった第一不完全性定理について完全に理解し、第二不完全性定理をゲーデルと独立に発見している。1930/31 年の冬学期の証明論の講義も、ゲーデルの不完全性定理についての考察やヒルベルト学派、特にアッカーマンにより完成されていたと思われていたペアノ算術の無矛盾性証明の問題点についての考察などがなされていたのではないだろうか。

「フォン・ノイマンが、ある日、彼の証明論の講義に現れて、『ゲーデルの定理により数学の無矛盾性は証明できないことが判ったのでこの講義をこれで打ち切る』、と言った」、という伝説も、多分、この 1930/31 年の冬学期の証明論の講義に関するものだろう。

この学期にエルブランはフォン・ノイマンからゲーデルの不完全性定理の証明について教わっていて、ゲーデルとの文通も始めている ([35])。エルブランの死後に発表された、現在彼の名前で呼ばれている定理を含む論文は、不完全性定理の知識を前提に書かれていたわけである。

なお、1930/31 年の冬学期には、ゲンツェンもベルリン大学に学生登録している。しかし、このときフォン・ノイマンとゲンツェンとの間にコンタクトがあったかどうかについては判っていないようである ([34])。

1931 年からフォン・ノイマンは半年はアメリカで過し、それ以外にもベルリン

には不在のことも多かったが（たとえば 1929 年夏学期にはベルリンから休暇をとってハンブルク大学で公理的集合論の講義をしている）1933 年（昭和 8 年、ヒットラーが政権をとって「第三帝国」が発足し、焚書運動がドイツの学生の間に広がったりした年である）の夏学期の前まで、少なくとも書類上はベルリン大学の私講師であり続けていて、アメリカに移住して高等研究所の教授に就任するのはその後である（[9]）。

それにしても、フォン・ノイマンはこの頃、ヨーロッパ内やアメリカとヨーロッパの間を頻繁に移動していたようである。ドイツ語のこの頃のスラングに、「アメリカに渡る」という意味の、「大きな池を越える」[5] というように直訳できる表現があるが、この表現は 1920 年代（日本の大正時代から昭和初期に対応する）の「国際人」を象徴しているように思える。フォン・ノイマンは生涯の終り近くには飛行機も移動手段として使っているが、1920 年代から 1930 年代初頭にかけての大陸間の移動手段が船に限られていたことを思うと、彼が何度も「大きな池」を越えてヨーロッパとアメリカの間を行き来していることに驚嘆させられる。

2 公理的集合論の研究者としてのフォン・ノイマン

そもそもフォン・ノイマンの公理的集合論への貢献について考察することが、本稿の目的なのだが、ベルリン大学時代のフォン・ノイマンについての話から始めたのは、十代の終りに集合論研究の先鋭として数学研究の世界に足を踏み入れたフォン・ノイマンが、その後集合論や数学の基礎付けに関する研究をアクティヴに行なっていた時期と、主にドイツ語圏で研究活動を行なっていた時期とが、ほぼ一致しているからである。

フォン・ノイマンの集合論に直接関係する最後の論文は、1929 年（昭和 4 年）の [42] で、この論文以降、彼の論文リストには、直接に集合論や数学の基礎付けに

（5）„den großen Teich überqueren"

関連するような文献は一つも含まれていない。これは、たとえば、フォン・ノイマンが 1926 年頃から始めた量子力学の数学的基礎付けや、それに関連する数学理論の論文が生涯に渡って発表され続けていることと対比してみると、異様にも思える。

フォン・ノイマンに関する伝記的な著作のいくつかには、フォン・ノイマンが集合論や数理論理学の研究論文を書かなくなってしまったことの理由として、ゲーデルの不完全性定理によって、数学の健全性を数学の体系の無矛盾性や完全性を有限の立場から証明することにより保証する、というヒルベルトプログラムの実行が原理的に不可能であることが示されたため、この分野への興味を失なってしまったから、というような説明がされている。

実際、第二不完全性定理について、フォン・ノイマンはゲーデルに比べてそのヒルベルトのプログラムに対する否定的な効果を、より決定的なものと捉えていたらしいことが、1931 年前後の手紙などでの彼の幾つかの表明などから垣間見られる。

数学とその形式化に対する立場は、三つに大きく分類できるように思われる：一つの立場は、数学は「実存するもの」であり、形式的な体系は、実存する数学に関する検証のために付随しているものにすぎないと考えるものである。これに対して、第二の立場は、数学は形式的な体系で展開される記号列の操作にすぎないが、数学的な思索の遂行のために我々はフィクションとしての「実在する数学」を信じておく必要があると考える、乃至は、確信犯的に信じて数学する、というものであろう。一方、もっと極端には、第三の立場として、このフィクションとしての実存する数学も原則認めない、あるいは必要としない、という立ち位置があり、この立場から見たときの数学とはあくまで形式的体系での記号の操作にすぎない。

ゲーデルの多くの（数学的な内容の）論文の記述からは、彼が一番目の立場に近い立ち位置から数学を考えていたことが窺われる。

二番目の立場は、多分、一番無難なもの、と言えそうであるが、これは例えば、ベルナイスが［1］で表明しているものである。

一方、フォン・ノイマンにとっての数学は第三番目の立場に近いものだったようである。あるいは、フォン・ノイマンにとっての「実存する数学」は、記号の操作の体系、あるいはそれをさらに抽象化したようなものだったのではないだろうか？

ウラムによる、フォン・ノイマンの亡くなった次の年に出版された追悼記事［36］には次のような記述がある：

> 不思議なことに、集合論やそれに関連する分野について話しているとき、フォン・ノイマンは多くの場合形式的に思考しているようにみえた。大多数の数学者はこれらの分野で議論をするとき、抽象的な集合や写像などの、幾何学的な、あるいはほとんど触覚的なイメージによる直観的な枠組で考えているように思える。一方、フォン・ノイマンは、純粋に形式的な演繹を直列的に行なっているように思えるのである。私が言いたいのは、新しい定理や証明を作りだす彼の直観は、もっと生れながらの直観も含めて、より純度の高いタイプのもののように思えたのである。ポアンカレが主張したことがあるように、視覚的な直観を持つものと聴覚的直観を持つものという二つのタイプに数学者を分類するとすれば、ジョニーは後者に属していたのではないだろうか。彼の中の「聴覚的感覚」は、しかし大変に抽象度の高いものだった。そこで介在しているのは、言わば、記号の集まりの形式的な表徴とそれらによって行なわれるゲームと、それらの意味の解釈との相補関係であった。ここでの相互関係にあるものの違いは、例えてみれば、物理的なチェス盤の思考上のイメージと、その上での指し手の列を代数的な記号で書きあらわしたものの間の関係のようなものと言えるだろう。 (S. Ulam［36］、p.12)

このウラムの文章にある「視覚的」、「聴覚的」、という分類は思考のメカニズム

に関するものであり、私の述べたプラトニズムに対する三つの立ち位置の分類[6]と は視点が異るが、ここで書かれていることは、フォン・ノイマンが私の分類での三番目のものに対する資質を十二分に持っていたことの示唆と解釈することはできそうに思われる。

ここで私の指摘したかったことは、このような立場の違いから、第二不完全性定理の意味の評価も当然違ってくる、ということである。

一番目の立場では、数学は既に「そこにある」ので、形式的な、ヒルベルトの立場での無矛盾性証明は望ましいことではあるが、それが原理的に不可能だとしても、そのことが決定的な数学の基礎付けの終焉には結びつかないだろう。ここでは、ヒルベルトの立場を弱めた様々な土台の上での数論の体系やその拡張に関する無矛盾性証明や、相対的無矛盾性のネットワークを構築することで得られる無矛盾性の状況証拠を積上げてゆくことに、自然に積極的な評価を与えることができる。

一方、三番目の立場では、狭義の有限の立場に立つ数学の無矛盾性証明が原理的に不可能であることは、もっと致命傷に近いものと考えざるを得ない。ここでの究極の無矛盾性の保証は、厳密な狭義の有限の立場に立つものでしかあり得ないわけだが、不完全性定理は、そのようなものの存在の可能性を完全に否定しているわけである。そのような無矛盾性の保証が原理的に得られない、ということは、しかし、この第三の立場では、証明の体系としての数学自身の、存在理由の保証の欠如、と理解せざるを得ない。

これらの三つの立場の説明で、フォン・ノイマン、ベルナイス、ゲーデル、という次の節で取り上げることになる集合論の公理系の名前に現れる三人が挙がっていることに注意しておきたい。

不完全性定理にいたる展開でも、選択公理や一般連続体仮説の集合論の公理系

(6) 数学におけるプラトニズムに関しては、筆者の[18]も参照されたい。

からの相対的無矛盾性の証明にむけての展開でも、この三人はそれぞれ同じような役割をはたしていることが注目される。フォン・ノイマンは、それぞれの展開で先駆的な仕事をしている。不完全性定理にむけての展開では、フォン・ノイマンの［40］では、ヒルベルトの証明論のとらえ方やその意義についての、ある意味ではヒルベルト自身の説明より明確と言えるような記述を与えているし、1930年のゲーデルとの議論では、まだ結果は完成版にいたっておらず、第二不完全性定理も得られていなかった段階でのゲーデルに、この仕事の最終版にむけての駆動のきっかけの一つを与えたと考えてよさそうである。フォン・ノイマン自身は、その後ゲーデルとは独立に第二不完全性定理を発見しているが（もし第一節で述べた「伝説」が本当にあったことだとすれば、これは、フォン・ノイマンが第二不完全性定理を発見したときのことであろう）、ゲーデルに送った、この発見について書いた手紙と行き違いに届いたゲーデルの論文の最終版を見て、第二不完全性定理の発見者としての主張を取りさげている。一方、ベルナイスは、［30］で、ゲーデルの不完全性定理を数学の基礎付けの（当時に得られていた最新の）全体像の記述の枠の中で記述したが、この本は、不完全性定理が数理論理学の古典的定理として、きわめて早い段階で一般に広く認められるようになることを促す一つの要因となった。

集合論の研究では、フォン・ノイマンは［38］、［39］、［40］、［41］、［42］などの仕事で公理的集合論の現代的な公理的扱いの基礎を築いた（このことについては次の節でさらに分析することにする）が、これらの論文はきわめて読みにくく[7]、見通しの悪いものだった。この見通しの悪さの理由と思われる背景の一部についても次の節で触れる。

（7）筆者は、近刊の［15］の最初の案では、ツェルメロの［43］とともにフォン・ノイマンの［38］の翻訳を付録として収録することを考えていたのだが、翻訳を始めてみて、この論文の翻訳が現代の読者を袋小路に導いてしまう危険を感じて、この計画を放棄した。この結果［15］には、最終的にはツェルメロの論文の翻訳と、筆者自身の書いた数学の基礎付けの現代的な理論の解説が付録として付けられることになった。

ベルナイスは、このフォン・ノイマンの仕事を整理して、現代的な集合論の基礎と言えるものを、連作の論文［2］、［3］、［4］、［5］、［6］、［7］、［8］として発表している。これらの論文は、［2］の前書きにもあるように、ベルナイスのゲォッティンゲンでの1929/30年の冬学期の講義に基くものである。ゲーデルは、このベルナイスの集合論の体系の細部を1931年にベルナイスがゲーデルにあてた長い手紙の中の説明で知ることになった（［25］）。一方、1935年の夏に、ゲーデルとベルナイスは、アメリカに向う船に乗り合せていて、この船旅の間にベルナイスは第二不完全性定理の細部についてをゲーデルから教わっており、この成果がヒルベルトとベルナイスの［30］での第二不完全性定理の記述に生かされているようである（［11］）。ちなみにこの船旅は、時期的にはゲーデルの集合論に関する仕事に前後するので、このときにもベルナイスの集合論の体系の細部についての議論が出ていてもおかしくないのだが、1939年にゲーデルが、モノグラフ［24］の記述の正確を期すためにベルナイスに集合論の体系について質問をしている手紙では、「少し前にあなたから手紙で教わった体系」というような書き方がされていて、船旅のことについては言及されていない。

フォン・ノイマンとゲーデルの間に交された書簡を読んでみると、フォン・ノイマン(8)の1939年4月22日にゲーデルにあてた手紙では、ゲーデルの構成可能集合による選択公理や一般連続体仮説の相対的無矛盾性の証明の細部についてのいくつもの鋭いコメントをしており、このプレプリントの証明を精読していることがわかる。またこの手紙より少し前の1939年2月28日の手紙では、ゲーデルの構成的集合のユニヴァースで成り立つ射影集合の可測性やベールの性質などの可測性に対しての制限に関連して、Kondô（近藤基吉、1906–1980）の日本の雑誌に載った結果（もちろんこれは後にKondô-Addisonの一様化定理として知られることになる結果である）が関連するのではないか、という指摘もしている（Kondô-Addisonの定理に関連して、その後、集合論で得られるに至った結果については、［31］の

(8) ことのきフォン・ノイマンは既にアメリカに移住しており、ゲーデルはまだウィーンにいた。

13.19 とこの後にあるリマーク、15.14 等を参照されたい）。

このように、フォン・ノイマンは、ここでもゲーデルの結果に関する深い洞察を示しているわけだが、実のところ、ゲーデルがこの結果のために導入した構成可能集合の階層 $L_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ は、現在ではフォン・ノイマン階層と呼ばれることもある。[42] で考察されている累積的階層 $V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ のバリエーションとして導入されている。この意味では、ゲーデルの証明の基本方針は、いずれにせよフォン・ノイマンにとって当然すんなりと理解のできるものであったはずなのである。

前にも述べたように、フォン・ノイマンの集合論本来の仕事は [42] が最後になっているが、彼の仕事には、この論文の後にも、測度論に関するものや作用素環に関するものなど、集合論的な議論がされていたり、問題の集合論的な一般化が考察されているものもいくつかある。しかしそのような仕事で用いられている「集合論」は、古典的なものに留まっていて、集合論のフルパワーが要求されるような議論が展開されることはなかったように思える。

ゲーデルの構成可能集合に関する議論を見ても分るように、集合論からフルパワーを引き出すのは、超限帰納法の活用と論理の集合論内での展開である。超限帰納法の基礎付けはフォン・ノイマンの [38] で初めてなされているのだし、フォン・ノイマン・アーキテクチャーのフォン・ノイマンなのだから、論理を体系の中で展開することの意味を深く理解していたはずでもある。それにもかかわらず、選択公理や一般連続体仮説の相対的無矛盾性の結果を得たのはフォン・ノイマンではなくまたしてもゲーデルだったし、フォン・ノイマンは、ゲーデルのこの仕事に触発されて集合論のアクティヴな研究を再開することもなかった。

ここには、フォン・ノイマンの視点からの、不完全性定理のより強く否定的な意味付けの結果として、無矛盾性の保証のしようのない集合論を自在に操ることに対する躊躇いのようなものがあったのかもしれない。

前出の ウラム [36] には、

数学の基礎付けの現在の状況に関して、ごく最近に交した会話の中で、フォン・ノイマンは、彼の見るところでは、「それはもう片のついてしまった話、ということでは全くない。ゲーデルの発見は、このテーマの終りと理解するべきではなく、むしろ、数学での形式的議論の役割に関しての新しい理解のアプローチを導くべきものにならなくてはならないのだ」、ということを言っているように思えた。

（[36]、p.12, 日本語訳は筆者による。）

という記述も見られる。しかし、フォン・ノイマンが論理との関連で晩年に研究したのはオートマトンの理論など、集合論よりずっと無矛盾性の強さの弱い体系であるか、または論理の計算機科学への応用のような問題に限られていた。

3 素朴公理的集合論と公理的集合論

集合論の公理化は、ツェルメロの 1908 年（明治 41 年）の論文 [43] で初めて確立された、と考えられることが多い。実際この論文では、集合論の公理系をうまく設定することにより、それまでに知られていた、すべてのパラドックスがパラドックスとして成立しなくなる一方、この公理系から必要な数学の結果をすべて導きだせるようにする、というアイデアが明確に提示されており、この論文で導入された体系で、デデキントが、[12]、[13] で行ったような数論や解析学の展開や集合の濃度に関する初等的な議論が可能になる一方、知られていたパラドックスは回避されている。たとえば、自分自身を含まないような集合の全体からなる集合のパラドックスは、この体系での、そのような集合が存在しないことの背理法による証明として理解されることになる。

しかし、この論文で導入された「体系」は、いくつかの重大な欠陥を含んでいた。その一つは、この体系では、カントルの超限帰納法がうまく展開できない、という点であった。しかし、これについては、そもそも超限帰納法の公理的な枠組での扱いをどのようにすればよいのかがはっきりとしてくるのは、フォン・ノイ

マンの 1923 年の論文［38］からなので、1908 年の段階では超限帰納法を公理的な枠組でどう扱かったらいいかは、まだ全く分っていなかったというのが実状だったと言えるだろう。

一方、その当時でも直ちに明らかな、そしてもっと深刻な欠陥は、この体系に既に含まれている分出公理の扱いであった。この論文では、分出公理は、

> **公理 III.** クラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ がある集合 M の要素のすべてに対して確定的なら、M の部分集合 $M_{\mathfrak{E}}$ で、$\mathfrak{E}(x)$ が真になるような M の要素のすべて、しかもそれらのみを要素として含むようなものが存在する。
>
> —［43］、筆者の［15］での訳による。

として導入されている。ここで、命題 $\mathfrak{E}(x)$ が確定的 (definit) であるとは、どの x に対してもこの命題の真偽が確定できることであると説明されているが、まさにこの「この命題の真偽が確定できる」というような曖昧な表現でこの概念が導入されていることで、この確定的という概念に確定的な定義が与えられていない、ということが大きな問題として残ってしまっていたのである。これは、この論文［43］の発表直後から批判が集まった点でもあった。(9)

一方、ツェルメロが［43］で分出公理を用いるときに、そこで問題となっている命題が確定的かどうかの判定をしている議論を見てみると、そこでの判定は非常に明確に書かれていて、きちんと定式化のできる判定条件が背後に隠れているに

(9) 実はカントルもほとんどツェルメロと同程度と言ってもいい精度の集合の構成原理の公理的な扱いに関する明確なアイデアを持っていて、このことが 1899 年 7 月 28 日のデデキントにあてた手紙で述べられていることが知られている［10］。カントルの集合論は、「素朴集合論」とよばれることがあるが、「確定的」の素朴な定義による、ツェルメロの 1908 年の論文の立場での集合論も「素朴公理的集合論」とでも呼ぶべきであろう。［32］によると、このカントルのデデキントにあてた 1899 年の手紙は、ツェルメロが 1932 年にカントルの全集の編纂をするまで、一般には知られていなかったということであるが、「カントルの素朴集合論は矛盾を含んでいた」というような 20 世紀の前半に書かれた文献（たとえばフォン・ノイマンの［39］）に主張されていることのある表明は、少なくともこの手紙をふまえて考えたとき、不正確なものと言わざるを得ないことがわかる。

違いないという印象を受けるものになっている。

もちろん我々の後知恵によれば、この確定的な命題は、「一階の論理の論理式で書ける命題」であるべきものなわけだが、そう思って、ツェルメロの命題が確定的であることの判定の記述を読みなおしてみると、この論理式の部分論理式の組成にそって論理式を組み立ててゆくことに対応するような議論がなされていることがわかる。

フォン・ノイマンの集合論の論文のうちの初めの方のものでは、この「確定的」であることの、論理学を経由しない判定の公理化が試みられている。この途中段階として、これらの論文では命題が確定的であることの判定原理の集まりが手探りされており、これが非常に読みにくい原因の一つになっている。現代の我々にとっては、読みにくい、というより、これはもうすでに何であるべきか分っていることなので、この検証にわざわざ付き合う気が起こらないと言った方がよいだろう。

フォン・ノイマンの集合論の論文の読みにくいもう一つの理由は、公理的集合論について論じている彼の論文で、関数が基本概念として選ばれていることであろう。これはフォン・ノイマンが[39]、[41]、[42]で何度も強調しているように、本質的な違いではなく、集合を基本概念として選んだ記述と相互書き換え可能であるが、この方が理論の技術的な展開が容易になる、というフォン・ノイマンの主張にもかかわらず、このことによって公理や議論の(想定された)意味が非常に捉えにくいものになってしまっている。

この感想は筆者だけのものではないようである。たとえば、ゲーデルは既に触れた 1939 年 6 月 19 日のベルナイスあての手紙で、ベルナイスの公理系での基礎の公理がフォン・ノイマンの体系からとられたものなのか、それともベルナイスが新しく導入したものかを聞いていて、これに対してベルナイスは 1939 年 6 月 21 日の手紙で

(あなたの言っているような意味での) 基礎の公理のアイデアは、まったくすべてフォン・ノイマンから継承したものです。

と、返事をしている ([25]) のだが、このことをベルナイスにわざわざ聞いているということは、とりもなおさず、ゲーデルはフォン・ノイマンの論文に全く目を通していなかったか、目を通してはいたとしても技術的な細部を読み込んでいなかった、ということを示していると言えるのではないだろうか。勿論、もしフォン・ノイマンの論文がゲーデルにとって読みやすいものだったのなら、読んで確かめればいいだけの話なので、いずれにしても、わざわざこのことをベルナイスに聞くまでのことはなかったのではないだろうか。

フォン・ノイマンが作った集合論の公理系は、ベルナイスによって整理されて、ゲーデルはこれを [24] で用いて、この公理系の上で選択公理も一般連続体仮説も相対的無矛盾であることを示した。つまり、この公理系が無矛盾だと仮定すると、それに選択公理と一般連続体仮説を加えたものもまた無矛盾であることを示した。[10] このため、この体系 (実質的にはゲーデルが用いた体系のヴァージョンに選択公理を加えたもの) は現在では、ノイマン・ゲーデル・ベルナイスの体系と呼ばれて、NBG と略記される。

フォン・ノイマンの集合論の仕事は、不完全性定理以前になされたものなので、不完全性定理を知っている我々が読むと、不適切に思えるリマークや、実現不可能な予想が書かれていることを発見することもある。しかし、さらに、彼の集合論の研究は、一階の述語論理のきちんとした定式化よりも前に、あるいは最後の段階では、それとほぼ平行して、行なわれているということも留意すべきだろう。このため、フォン・ノイマンは、この「確定的な命題」の問題の解決には、後でツェルメロ・フレンケルの体系を精密化するためにとられた「確定的とは一階の

(10) 有限の立場で表現すると、ゲーデルの結果は、もしこの集合論の体系に選択公理と一般連続体仮説を加えたものから矛盾が証明できたとすると、その矛盾の証明を変形して、この集合論の体系だけからの矛盾の証明が得るためのアルゴリズムが存在することを示している。

述語論理の論理式として表現できていることだ」とするという、論理学を使う解決法を採用することができなかった。[11]

フォン・ノイマンが彼の体系で採用した方法は、クラスも理論の基本対象として扱い、クラス（のクラス）が、たとえば共通部分をとったり射影をとるなどのいくつかの基本操作に関して閉じていることを主張する公理を加えることであった。[12] これは、前に述べたツェルメロの1908年の論文［43］での確定性の判定での議論の背後に隠れていると思われる判定条件やフォン・ノイマンが［38］などでさらに付け加えた判定方法をクラスの演算に関する公理の形で定式化したものになっている。この結果フォン・ノイマンの体系、あるいはそれを整理して得られたNBGは、一階の述語論理を用いずに（たとえば群の公理や、環あるいは体の公理と同じような）有限な公理系としての定式化ができている。

ツェルメロやフレンケルによる集合論は、現在では二人の名前の頭文字をとってZFと表され、これに選択公理を加えたものは、ZFCと表されるが、この体系の（「確定的な命題」の問題が一階の述語論理の使用によって解消された）最終的な形が確立されるのは、フォン・ノイマンの論文が書かれた時期よりもっと後である。たとえば、1930年のツェルメロの最終的な集合論に関する論文［44］では、置換公理もフォン・ノイマンの基礎の公理に対応する公理も含まれているが、ここでもまだ我々の知っているZFCの最終的な形は確立されておらず、二階の論理のようなものをベースにするような議論がなされているようにも見え、選択公理は論理からの帰結として考えられている、といった、ちょっと怪しげな基礎付けによる論文になっている。[13]

（11）一階の述語論理を用いて集合論の公理系を記述することで、「確定的な述語」の問題を回避する、というアイデアは、フレンケルやスコーレムによって提案されている。

（12）フォン・ノイマンのもともとの定式化では、クラスではなくクラス関数が対象として扱かわれている。

（13）これに対して、スコーレムやフレンケルは同時期に集合論を一階の述語論理の上に構築することの妥当性に対するもっと確かな理解に至っていたようである（［32］）。

フォン・ノイマンの論文［42］など（すべて1930年以前の論文である）で言及されているツェルメロやフレンケルによる集合論は、したがって、現在我々が知っているZFCではない。フォン・ノイマンは、［42］で彼の集合論を、当時の未完成のZFCと比較してその違いについて論じているわけだが、現在整理された形のZFCとNBGの関係については、NBGはZFCの保守拡大になっている、ということが知られている（このことの証明は、たとえば［20］を参照されたい）。つまり、ZFCの言語で記述できる命題φについては、φがZFCで証明できることと、φがNBGで証明できることは同値である。

現在では、デフォルトでは（一階の論理で展開することで精密化された）ZFCが、集合論の基礎理論として採用されるが、歴史的には、そのような厳密化されたZFCが確立されるまでの、1920年代中半から、1930年代後半にかけては、ノイマンの集合論の公理系や、それを整理したNBGが唯一の厳密な（あるいな素朴でない）集合論の公理化となっていたのである。

ちなみに、クラスを基本対象として用いる集合論の公理系には、モース・ケレイ集合論のように、ZFCの言語で表現できる部分についても、ZFCの真の拡大になっているような体系も存在するが、たとえばモース・ケレイ集合論の場合には、V_α, $\alpha \in On$で集合の累積的階層[14]（フォン・ノイマン階層）を表すことにすると、κが巨大基数のときには、構造$\langle V_{\kappa+1}, V_\kappa, \in \rangle$[15]はモース・ケレイ集合論のモデルになるので、このことから、ZFCに巨大基数が（順序数のクラスの中に）共終的に存在することを付加した理論は、ZFCの言語で記述できてモース・ケレイ集合論で証明できる命題をすべて導くものになっていることがわかる。同様にして、クラス（やハイパークラス）を用いた集合論は（それが妥当なものであれば）、すべて体系ZFC（に巨大基数の公理を加えたもの）に埋め込んで考えることができ

（14）フォン・ノイマン階層は［42］で基礎の公理に関する議論の中で導入されているが、この階層のここでのような議論での扱いは、むしろツェルメロの［44］に始まる（［32］）。

（15）これはκが到達不可能基数であれば成り立つ。

るのである。

集合論で考察する性質には、グローバル・チョイス[16]（大域的選択関数）やユニヴァースの内部モデルへの初等的埋め込みなど、一般的な原理としては、クラスをオブジェクトとして記述できるような言語でしか表現できないものも存在するのだが、現代の集合論研究では、これらの概念は、超数学での概念のようなものとして扱って ZFC に留まるか、一時的に NBG 集合論に公理的枠組を拡大して議論するなどの応急処置で対処されることが多いようである。

4　フォン・ノイマンと公理的集合論

悄也不争春
只把春来報
待到山花爛漫時
她在叢中笑

—毛沢東、詠梅（1962 年 12 月）から[17]

フォン・ノイマンの研究の多くは、ほとんどまだ何もないところに新しい研究分野を確立する、という破天荒[18]の仕事であった。

集合論でも、まだ、一階の述語論理（とその完全性）も不完全性定理も得られていなかった 1920 年前半には、彼が遂行することになる、ツェルメロの [43] やフレンケルの初期の結果を補完する形での集合論の公理化の仕事は、ほとんど無謀な試みと言ってもいいものであった。

（16）ちなみに、NBG にグローバル・チョイスの存在の主張を付け加えた体系も ZFC の保守拡大になっている ([16])。

（17）高橋悠治のピアノ曲『毛沢東詩三首』の二曲目は、この毛沢東による、役割を終えた先駆者（毛自身のことか?）について歌った詩をテキストとする高橋自身の歌曲に基く美しい小品である。

（18）現代日本語では、「破天荒」という単語が、「滅茶苦茶」の類語のようなものとして用いられることが多いが、この用法は現代日本での破天荒な仕事に対しする否定的な価値評価を引きずっているのではないかと思う。ここで言っている破天荒はもちろん本来の意味である。

フォン・ノイマンのこの仕事は、その後ベルナイスによって整理され、それを用いたゲーデルによる選択公理や一般連続体仮説の集合論の他の公理からの無矛盾性の証明は、現代的な集合論につながる最初の大きなブレークスルーとなった。

フォン・ノイマンの行った、順序数や超限帰納法の公理的集合論での定式化や、基礎の公理や累積的階層の理論などは、現在では既に集合論の基礎の基礎となっていて、フォン・ノイマンの名前すら引用されずに使われることが多い。先日、あるドイツ人の計算論の専門家と昼食を一緒にしたとき、今フォン・ノイマンと集合論に関する作文で死ぬ思いをしている、という話をしたところ、この人は、フォン・ノイマンが集合論の研究者だったことを全く認識していなくて、“NBG”のNがフォン・ノイマンのことだということすら気がついていなかったことが判明して、びっくりしてしまったのだが、フォン・ノイマンの集合論や数理論理学での研究結果は、今日では、そのくらい「一般知識」として匿名化されてしまっている、ということなのだろう。

本稿の執筆の依頼で編集部から頂いた email には、フォン・ノイマンの集合論における功績だけでなく、その後の新局面を、集合論の研究者としての私の現在の研究からの視座からも論じて欲しいという趣旨のことも書かれていた。しかし、これを実行しようとすると、フォン・ノイマンの集合論での仕事が、今日この分野では、あまりに普遍的な基礎的となっているため、集合論の現在のすべてについて書くしかなくなってしまうだろう。勿論、ここで与えられた紙数では、これはいずれにしても不可能である[19]。

こういう種類の先駆的な仕事には、後になってからの視点からは、「彼がやらなくてもやがて誰か別の人がやっていたのではないか」というような過小評価が下されてしまいがちであるかもしれない。

しかし、フォン・ノイマンの集合論での仕事に関しては、彼のおかげで20世紀

(19) そのような試みがどのような規模のものになってしまうかは、たとえば、全部で2000ページを越える2010年刊の Handbook of Set Theory [17] をながめてみると納得できるだろう。

の集合論研究は急速に進展することができ、その結果として、現在の私も、フォン・ノイマンを含む巨人たちの肩の上に乗って地平の彼方を見渡すことで、すばらしく発展した、しかも更にエキサイティングな展開が無限に待っているように思える、この豊饒[20]な研究分野としての集合論の研究の末席を汚すことができる栄誉に預かることができたわけである。

この意味でも、フォン・ノイマンの集合論のパイオニアとしての仕事を、今一度、讃美してこの小文を終えたいと思うのである。

リファレンス

[1] Paul Bernays, Le platonisme dans les mathématiques, L'Enseignement Mathématique, Vol.34, (1935), 52–69.

[2] ———, System of axiomatic set theory, Part I, The Journal of Symbolic Logic, Vol.2, (1937), 65–77.

[3] ———, System of axiomatic set theory, Part II, The Journal of Symbolic Logic, Vol.6, (1941), 1–17.

[4] ———, System of axiomatic set theory, Part III, The Journal of Symbolic Logic, Vol.7, (1942), 65–89.

[5] ———, System of axiomatic set theory, Part IV, The Journal of Symbolic Logic, Vol.7, (1942), 133–145.

---

(20) 「豊饒な研究分野としての集合論」、ということについては、ここでは具体的に述べる余裕がなかったが、筆者がこれまでに書いてきた集合論の現代的研究ついての一般向きの文章のうち、たとえば、少し古いが、本誌のために執筆した[19]や、最近のものとしては、[22]などを参照されたい。もう少し本格的なものでは、Kanamori [31] には、集合論、特に巨大基数の集合論に関連する現代の研究成果の広い視点からの俯瞰が与えられている。

[6] ————, System of axiomatic set theory, Part V, The Journal of Symbolic Logic, Vol.8, (1943), 89–106.

[7] ————, System of axiomatic set theory, Part VI, The Journal of Symbolic Logic, Vol.13, (1948), 65–79.

[8] ————, System of axiomatic set theory, Part VII, The Journal of Symbolic Logic, Vol.19, (1954), 81–96.

[9] Kurt-R. Biermann, Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933, Akademie-Verlag (1988).

[10] Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit Erläuterungen, Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind, Ernest Zermelo (ed.), Verlag von Julius Springer, Berlin (1932).

[11] John W. Dawson jr., Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel, A K Peters, (1997).

[12] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedr. Vieweg und Sohn (1872/1927).

[13] ————, Was sind und was sollen die Zahlen?, Friedr. Vieweg und Sohn (1888/1930).

[14] デデキント著、河野 伊三郎 訳、数について — 連続性と数の本質、岩波文庫 (1961).

[15] ————、淵野 昌 訳、数とは何かそして何であるべきか、ちくま学芸文庫、近刊 ([12] と [13] の日本語訳と [43] の日本語訳を含む)。

[16] Ulrich Felgner, Comparison of the axioms of local and universal choice, Fundamenta Mathematicae 71 (1971), 43–62.

[17] Matthew Foreman and Akihiro Kanamori (Eds.), Handbook of Set Theory, Springer (2010).

[18] Sakaé Fuchino, The Set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous Platonism viewpoint, Annals of the Japan Association for the Philosophy of Science Vol.20 (2012), 49–54.

[19] 渕野 昌、連続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙（ユニヴァース）、現代思想、2007年2月臨時増刊号 (2007)、94–116.

[20] ———、構成的集合と公理的集合論入門、[37] の第IV巻に収録、(2007).

[21] ———、現代の視点からの数学の基礎付け、[15] に付録として収録。

[22] ———、公理的集合論 — これから学ぶ人のために、数学、Vol.65, No.4 (2013), 411–420.

[23] Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.

[24] ————, The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the axioms of set theory, Annals of Mathematics Studies #3, Princeton University Press, Princeton (1940).

[25] ————, Collected Works, Vol IV, V (2003).

[26] Rebecca Goldstein, Incompleteness, the Proof and Paradox of Kurt Gödel, W.W. Norton & Company, 2006.

[27] Paul R. Halmos, the Legend of John von Neumann, American Mathematical Monthly, Vol.80, 4 (1973), 382–394.

[28] Ulf Hashagen, Johann Ludwig Neumann von Margitta (1903–1957), Teil 2: Ein Privatdozent auf dem Weg von Berlin nach Princeton, Informatik Spektrum, 29,3 (2006), 227–236.

[29] ———————, Die Habilitation von John von Neumann and der Friedrich-Wilchelms-Universität in Berlin: Urteile über einen ungarisch-jüdischen Mathematiker in Deutschland im Jahr 1927, Historia Mathematica 37 (2010), 242–280.

[30] David Hilbert und Paul Bernays, Grundlagen der Mathematik Band II, Springer–Verlag (1939/1970).

日本語訳（抄訳）: 渕野 昌、吉田 夏彦 訳、数学の基礎、シュプリンガー・フェアラーク東京（株）(1993/2007).

[31] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/2003).

日本語訳：A. カナモリ著、渕野 昌 訳、巨大基数の集合論、シュプリンガー・フェアラーク東京（株）(1998).

[32] ——————————, The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol 2, No.1 (1996), 1–71.

[33] ——————————, Bernays and Set Theory The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.15, No.1 (2009), 43–69.

[34] Eckart Menzler-Trott, Gentzens Problem — Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland, mit einem Essay von Jan von Plato, Birkhäuser Verlag (2001).

[35] Wilfried Sieg, Four Introductory Notes to the Correspondence of Kurt Gödel with R. Biichi, J. Herbrand, E. Post, and J. von Neumann, in [25]、2001.

[36] Stanisłav Ulam, John von Neumann 1903–1957, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.64, No.3, Part 2 (1958), 1–49.

[37] 田中一之 (編)、ゲーデルと20世紀の論理学(ロジック)、I–IV、東京大学出版会 (2006–2007).

[38] J. von Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum 1, (1923), 199–208.

[39] ———, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik 154, (1925), 219–240.

[40] ———, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Mathemathische Zeitschrift, Vol.26, (1927) 1–46.

[41] ———, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Mathematische Zeitschrift 27, (1928), 669–752.

[42] ———, Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol.160, (1929), 227–241.

[43] Ernst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281.

日本語訳：[15] に付録Bとして収録。

[44] ——————, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Fundamenta Mathematicae, Vol.16, (1930), 29–47.