巨大基数と巨大な巨大基数、超数学での無限と集合論的無限、それらに対する有限の諸相

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

20年3月20日 (14時18分) 版

以下の文章は、現代思想 **2019** 年現代思想 **12** 月号「特集＝巨大数の世界」に収録された論説の拡張版である。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も復活させている。また、投稿後／校正後の加筆訂正も含まれる。

このテキストの最新版は、`https://fuchino.ddo.jp/misc/large-cardinals-2019-x.pdf` として download することができる。

Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

(ヤコビ (C.Gustav Jacobi) が 1830 年にルジャンドルにあてた手紙の中の文章) [1)]

1 有限と無限と大きな数

これから始めようとしている議論は、有限と無限の概念と密接な関係を持つことになるものである。この「有限」や「無限」には幾つもの異なる語義があるので、それらの間の区別をきちんとしておかないと、議論が破綻してしまう。この作文が載ることになっている文集にも、この区別があいまいで論理的な整合性が

---

0) 本稿は、主に、筆者が 2019 年秋にポーランド、カトヴィツェのジレジア大学数学科に滞在した期間に執筆された。Aleksander Błaszczyk 名誉教授や Wojciech Bielas 講師をはじめ、同数学科の集合論／トポロジー研究グループのメンバーと交した会話や、彼等の質問への答として考えたことは、本稿の内容にも反映されている。また、本文でも名前を挙げた酒井拓史氏は原稿に目を通して幾つかの指摘をして頂いた。本稿の校正の後、高田正之氏から更に幾つかの typos の指摘やコメントをいただいた。ここに感謝の意を表したい。

1) [著者訳]: フーリエ氏が、数学の主要目的は、一般の用に供することと、自然現象の解明にあると言ったといふのが本当だとしても、彼ほどの哲学者が、科学の唯一の目的が人類の知性の尊厳にあることを知らぬはずはないし、だから、その意味で数に関する問題が多体系の問題と同じくらい重要なことも知らぬはずはないであらう。

欠けた文章がいくつか掲載されることになるのではないか、という危惧を抱いてしまう。

たとえば、「宇宙は無限／有限である」と言ったときには、それは、宇宙の時空としての広がりに上限がない／上限がある、というような意味だろう。この意味の無限はいわゆる無限記号 ∞ と関連する無限であることが多いが、これに対して、「宇宙に存在する素粒子の数は有限である／無限である」と言ったときの有限／無限は個数としての有限／無限である。この二組の有限／無限は互いに関連が全くないわけではないとしても、ほとんど独立な概念である。「宇宙」の例で考えることにすると、この宇宙の事象の全体 E がある自然数 n に対する $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれる多様体 M の中の離散な閉集合として実現されているとすると、M の埋め込まれた先が $\mathbb{R}^n$ の有界集合だったとしても、M がコンパクトでなければ、E は無限集合でありえる。

また、同じ「数」の有限性／無限性を言っているときにも、基数としての有限性／無限性が言及されているのか、それとも順序数としての（つまり数えあげるプロセスとしての）無限性／有限性が言及されているのかによって、その内容は微妙に異なるものになりうる。先程、無限記号 ∞ は領域の無限性に関連した記号だと言ったが、$\lim_{n\to\infty} a_n$ というような使い方では、自然数による数え上げのプロセスとしての無限（極限）が問題となることもある。これは後で述べることになる超限順序数の極限の特別な場合と考えることもできる。

集合論との関連（これは実は数学との関連と言いなおしてもいいのだが[2]）では、同じ個数の有限性／無限性でも、もっと微妙な種類の区別が必要になってくることもある。集合論は（つまり数学は[2]）つきつめて考えてみればフィクション

[2] ここで、「言いなおしてもいいのだが」「つまり」などとちょっと持って回ったような言い方になってしまっているのは、旧来の数学では、それをフィクションと認識することになる数学の外側の世界に踏み出て議論をする必要を感じることがほとんどなく、そのような視点の移動に関連する議論がそこで重要になることもほとんどないため、ここで言っている意味での「数学がフィクションである」という状況を、旧来の数学の研究者が、理解していなかったり、誤解していた

にすぎない。集合論で証明される数学的な事実は、それが得られたとき、そのことを集合論の外側から見ると、それは「証明」と呼ばれる、ある規則にそった（あるいは、ある種の文法にかなった）記号列（の有限列）が具体的に得られた、ということにすぎない。この「集合論を外側から見る」というときの、その「外側」の視点は **超数学** (meta-mathematics) と呼ばれるものだが、そこでは、集合論はもちろん使うことができない。たとえば、集合論の中では、$0^\#$ とよばれる、自然数の無限集合を考えることができる。$0^\#$ は、（公理的集合論の枠組の中で）後で述べることになる、ある程度以上の大きさの巨大基数の存在を仮定すると、その存在が証明できるが、通常の集合論の公理系だけからでは、その存在を証明することはできない。超数学では通常の集合論ですら仮定していないのだから、$0^\#$ は、そこでは扱うことのできない対象であることがわかる。

逆に、「自然数の全体」「記号の有限列の全体」など、超数学で（ある一定の制限のもとに）扱うことのできる対象は、集合論（つまり数学）の中でも扱える。実際、超数学での（本物の）各自然数 n に対し、後で述べるように n に対応する集合論内での自然数を表わす項 $\underline{n}$ をとることができる。しかし、集合論内での自然数の全体（集合論では、これは集合として扱うことのできる対象となっている）が、超数学での具体的な数の総体の全体になっていてそれ以外の要素を持たない、と言うことはできない。仮に今展開されている集合論が超数学で見たときにある理論 T で展開されるものになっていたとして、c を T の記述に含まれない新しい定数記号として、公理 “c is a natural number” および、すべての（本物の）自然数 n に対する公理 $c \neq \underline{n}$ を T に加えた公理系を T' とすると、コンパ

りすることが多いことに気兼ねしてしまったからである。旧来の数学は、集合論のごく弱いフラグメントの中で展開できるが、集合論の現代的な研究では集合論の公理系に含まれる公理を縦横に活用する数学も展開されており、これを数学に含めない理由はないし、むしろ[6]でも論じたように、そのような数学研究は、旧来の数学の延長線上にある数学の研究にとっても重要な意味を持つ。本稿で前提としている「集合論 = 数学」という表明はそのような背景を持って述べられているものである。

クト性定理により、Tが無矛盾ならT'も無矛盾である。T'またはT'の更なる拡張では、もとの理論Tでの議論はすべて有効であるが，ここで定数記号cに対して、ある性質φが証明できたとしても、超数学でφに対応する性質を持つ具体的な数nが見つかる、という保証は全くない。

集合論=数学と同じように、物理的「宇宙」も我々にとってフィクションである。そうでないとするなら、我々は「宇宙」を認識するための実験や我々の知覚の「現実性」を盲信しなくてはならないし、実験と言っても自分で実際に実行できる実験は限られているから、どの瞬間にも共同幻影でしかないことが露見してしまうかもしれないところの人類の共通知識の多くの「正しさ」をも盲信しなくてはならなくなる。

超数学では、集合、言わんや無限集合はフィクションでしかなく、正当に扱える対象は具体的なものに限られるので、そこでは、ある性質を持つ対象が無限にある、ということは、その性質を持つ対象が（有限個）具体的に与えられたときに、その中に含まれない別の対象でこの性質を持つものを作るアルゴリズムが存在すること、としてしか捉えようがない。素数の無限性は、このような意味での無限性の典型的な例である。素数の集まり $p_0, \cdots, p_{n-1}$ が具体的に与えられたとき、それらのうち最大のものをpとすると、$0, 1, 2, \cdots, p! + 1$ を順番にチェックしてゆくことで、この素数の集まりに属さない新しい素数が必ず見つかる。このアルゴリズムを実行すると、必ず与えられた集まりに属さない素数が得られ、作業は「有限のステップ数」の後に終了するが、この「有限のステップ数」はそれが物理的に実現可能 (feasible) な大きさのものになっているかどうかは、ここでは問われていないことに注意する。

先程の多様体を宇宙のモデルとして考察する議論は、$\mathbb{R}$ などが議論を組み立てるために必要となっていることから、何らかの集合論の仮定のもとでしか展開できないので、そこで述べている有限性／無限性は既に超数学でのそれではあり得ない。

超数学は、数学を外から見るための視点として、設定されたものだが、これを物理現象（を含む『現実』）（の記述）を見るための視点としても捉えてよいのか？もしよいのなら、物理現象の数学モデルを考察する立場は、この超数学を操作する自我(Ich)と考えればよいのか？ 等々、認識論として興味のある問いが連鎖反応的に思い浮ぶが、ここでの主題からは離れてしまうため、これらについての議論は別の機会に譲ることにしたい。

2 プロセスとしての無限性と可算順序数

ゼノンの逆理の一つである「アキレスと亀」を思い出してみよう。表現を簡単にするために、亀とアキレスは実数直線 $\mathbb{R}$ の上を正の方向に歩く／走る、とする。たとえば実数 r は原点の右 r フィートにある点の表現である、と考える。時刻 t_0 にアキレスは原点 0 を出発するが、ハンディーキャップを作って、亀は点 s_0 $(0 < s_0)$ を出発する。亀は正の方向に歩み始め、アキレスは s_0 を目標に走る。時刻 t_1 にアキレスは s_0 に到達するが、その間に亀は s_0 より先の地点 s_1 に到達している。つまり、$s_0 < s_1$ である。ここでアキレスは s_1 に向って走りを進めるが、その間に亀も歩みを進めている。アキレスが時刻 t_2 に s_1 に到達したときには、亀はその先の s_2 まで進んでいる。これを続けたときに、認識された時刻の系列 $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ とこれらの時刻での亀の位置の系列 $s_0 < s_1 < s_2 < s_3 \cdots$ が得られるが、これは物理的にはナンセンスである。亀の進む速度はアキレスの走る速度より遅いから、$t_{n+1} - t_n$ はどんどん 0 に近づき、その結果、$s_{n+1} - s_n$ は、十分に大きな n に対しては、たとえば水素原子の直径（約 3×10^{-9} フィート）より小さなものになってしまう。このアキレスと亀の競争がイデアの世界での出来事だとして、物理的な制限を無視できることにすれば、無限に続く、意識された瞬間の列 $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ を考えることができるが、「私」は列 $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ が生成されてゆくことの認識から上空移動して、この列の

全体を俯瞰できる。この視点で、$t_\omega = \lim_{n\to\infty} t_n$，とすれば、運動の連続性から、亀もアキレスも地点 $s_\omega = \lim_{n\to\infty} s_n$ にいる。したがって、この次の意識された瞬間 $t_{\omega+1}$ には足の早いアキレスは亀より先の地点に到達している。

では、亀がすべての意識の上空移動の瞬間に[3] 少し先の点にワープする能力を持っていたとしたらどうだろうか。時刻 t_ω にアキレスは地点 s_ω にいるが、亀はワープして $s_{\omega+1}$ ($s_\omega < s_{\omega+1}$) に移動している。ここで、亀は正の方向に歩み始め、アキレスは $s_{\omega+1}$ を目標に走る。時刻 $t_{\omega+1}$ にアキレスは $s_{\omega+1}$ に到達するが、その間に亀は $s_{\omega+1}$ より先の地点 $s_{\omega+2}$ に到達している。つまり、$s_{\omega+1} < s_{\omega+2}$ である。ここでアキレスは $s_{\omega+2}$ に向って走りを進めるが、その間に亀も歩みを進めている。アキレスが時刻 $t_{\omega+2}$ に $s_{\omega+2}$ に到達したときには、亀はその先の $s_{\omega+3}$ ま

---

3) 高田正之氏から、この「すべての意識の上空移動の瞬間」という表現に対して、「意味がわかりません」というコメントを頂いたが、ここの話はかなりあやしいアナロジーの上での記述なので、この感想は当然である。ただし、やはり本稿を精読してくれた酒井拓史氏からは、この表現に対して特に何のコメントもなかったので、集合論の研究者の直観に訴える表現にはなっているのではないか、と思う。ここで言おうとしているのは、後で説明することになる順序数の理論の用語を用いて言うと、「すべての極限順序数 γ で」ということである。

なお、高田氏とはこの点に関して更にメールのやりとりがあったのだが、氏からの許可を受けて、高田氏のメールへの筆者の返信のテキストに少し推敲の手を入れたものを次に引用しておく：

>> 「上空」のところ，極限順序数なわけね。やはり僕の語感だとピンと来ません。
>> 気持ちは伝わったので別に拘りませんけれども。

— 岡潔の、現代の用語で言うと sheaf を使う議論では、彼は「上空移動の原理」という言いかたをしていたと思います．「上空移動」はここでは「抽象度を上げる」ということとある種の「次元」をあげた世界のプロジェクションとしてもとの現象を見る，ということを示唆しているのだと思います．

本稿では、これにかけて言っているわけですが、順序数の limit を認識するためには、超越の世界 (transcendency) に一歩近づかなくてはいけないので、ここでは、それを上空移動と表現したのです．だから、ここでの上空は物理的な意味での地表からの距離の違いではなく、transcendence の度合いの違いで「天国が上にある」というときの「上」です．上にあるのは sky ではなくて firmament です．

ところでテキストの拡張版の脚注に上の架空の対話をつけ足してはいけないでしょうか？というテキストも含めてゲーデル的自己言及付きで，つけ足したいと思ってるんですが．

で進んでいる。これを続けてゆくと、意識された時刻の系列 $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_\omega < t_{\omega+1} < t_{\omega+2} < \cdots < t_{\omega+\omega} < t_{\omega+\omega+1} < \cdots$ とそれに対応する、位置の系列 $s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_\omega < s_{\omega+1} < s_{\omega+2} < \cdots < s_{\omega+\omega} < s_{\omega+\omega+1} < \cdots$ が生成される。これらの系列が何になるかは、最初のハンディーと亀のワープの仕方に依存するが、ワープの仕方によっては、この系列がどこまでも伸びてゆくことはありうるのだろうか？実は、亀がどんなワープの仕方をしても、これらの系列は、非可算回のステップを持つことはなく、[4] 可算な、ある回数 γ で、$\lim_{\alpha<\gamma} t_\alpha = \infty$ となって、それ以上伸びることはできなくなってしまう。[5] これは次のようにして証明できる：これらの系列が非可算回ステップ繰り返されたとしてみる。たとえば、このときの時刻の系列が $t_\alpha, \alpha < \gamma$ となっているとして、各 $\alpha < \gamma$ に対し、有理数 $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ を $t_\alpha < q_\alpha < t_{\alpha+1}$ となるようにとる。このとき、$\alpha < \gamma$ となる α は非可算個あり、有理数は可算個しかないので、ある $\alpha < \alpha' < \gamma$ で $q_\alpha = q_{\alpha'}$ となるものがなければならない。ところが、$t_\alpha < q_\alpha < t_{\alpha+1} \leq t_{\alpha'} < q_{\alpha'} < t_{\alpha'}$ だから、これは矛盾である。

3 超限順序数の理論

今までの話は、物理的な実存の影を背負っている $\mathbb{R}$ での逐次遂行だったが、$\mathbb{R}$ の縛りから離れて逐次遂行をしたときには何が可能なのだろうか？この極限操作を超える逐次遂行の理論は**超限順序数**の理論と呼ばれ、これは集合論の中で厳密に展開できる。この理論の一部はツェルメロ (Zermelo) の集合論 (Z) でも展開できるが、現代的な枠組で超限帰納法の理論を展開しようとすると、ツェルメロ＝フ

---

4) ここで非可算回と言っているのは、ステップの添字の全体が自然数の全体と一対一に対応がつかないような状況が生じていることである。

5) ここでの $\lim_{\alpha<\gamma} t_\alpha = \infty$ の意味は、"どんな $r \in \mathbb{R}$ をとっても、ある $\alpha < \gamma$ に対して、$t_\alpha > r$ となる" である。

レンケル (Zermelo-Fraenkel) の集合論 (ZF) を理論の枠組として採用する必要が出てくる。以下の議論では、この ZF に更に選択公理を加えて得られる体系 (ZFC) を集合論の公理系として仮定することにする。

ここでは順序数の理論を証明の細部にわたって説明するだけの余裕はないので、要点をほとんど証明なしで述べるにとどめる。内容を理解したい読者は自分で証明を再現するか (以下は数学的能力のある読者が再現可能な書き方にはなっていると思う) [4]、[11]、[12] などの教科書を参照されたい。

アキレスと亀の喩えで添字 $\alpha, \alpha+1, \gamma$ などとして出てきた拡張された数を、**超限順序数** (transfinite ordinal numbers) あるいは単に **順序数** (ordinals) と呼ぶことにして、これを数学的に厳密に再導入したい。順序数が何であるべきか、という議論から、その、一見技術的に見える定義に至る道程を見てみることにする。

ある超限順序数 α より小さい順序数の全体を考えたとき、[6] それらの上の順序は帰納法の議論が行えるようなものでなければならない。全順序集合上で帰納法の議論が行えることは、それが「すべての部分集合は最小元を持つ」という性質を満たすことと同等である。実はこの性質は、既に「ある超限順序数 α までの順序数の全体」を完全に特徴付けるべき性質になっている。これは次のようにして見ることができる。

全順序集合 $(X, <)$ が **整列順序** (well-ordering) であるとは、X のすべての部分集合が $<$ に関する最小元を持つこと、とする。この性質から、整列順序は最小元を持つこと、整列順序の要素 a は、それが、この整列順序の最大元でないなら、その次の元が存在すること、つまり $a < b$ で a と b の間に入るような元は存在しないようなものがあること、が直ちに導ける。$(X, <)$ の最小元を 0_X, $a \in X$ の $<$ に関する次の元を $a+1$ と書くことにする。

次の定理 1 から定理 3 は、この順序で容易に示せる。

6) ここで行なおうとしているのは、順序数が既に厳密に導入されていると仮定したとき、それがどんな性質を持ったものになっているべきか、という視点からの議論である。

定理１．（帰納法）$(X, \lhd)$ を整列順序として、$Y \subseteq X$ とするとき、「$Z \subseteq Y$ が X で有界なら、Z の最小上界は Y の要素である」が成り立つなら、$X = Y$ である。

定理２． $(X, \lhd)$ を整列順序とするとき、f を X の $<$ に関する始片 I から始片 I' への任意の順序同型とするとき、$I = I'$ で、f は恒等写像である。[7]

定理３． $X = (X, \lhd)$ と $Y = (Y, \lhd)$ を整列順序とするとき、次の３つのうちのちょうど一つが成り立つ：(1) X を Y の真の始片に順序同型に埋め込むような関数 $f: X \to Y$ が存在する。(2) X から Y への順序同型 f が存在する。(3) X のある始片から Y への順序同型 f が存在する。

前に述べたように、ある順序数より小さい順序数の全体は（それが定義されたときには）整列順序であるべきなので、このことと定理１から定理３により、整列順序の順序型（順序同型で順序を同一視したときの同値類あるいは同値類の何らかの代表元）の全体と、ある順序数より小さい順序数の全体の作る順序の順序型の全体は、一致しなければいけないことがわかる。

したがって、順序数を整列順序の順序型のこととして、A と A' をこの意味の順序数とするとき、$A \lhd A'$ を、A の代表元の一つが、A' の代表元の一つの真の始片と順序同型になること、として定義すればよい。実際、カントルの順序数の理論での順序数の定義は、このようなものだったし、ツェルメロの集合論での順序数の扱いも、これに近いものにならざるを得ないのだが、このような順序数の扱いにはいくつかの問題がある。その一つは、与えられた整列順序と順序同型な整列順序の全体が真のクラスになってしまうことである。ZF では、この問題を回避するために、フォン・ノイマンによるトリックにより、これらのクラスから部分集合を一律なやりかたで選ぶことができるのだが、そのようにして真のクラスの問題を解決できたとしても、同値類はやはり扱いにくい。一方で、一般には、クラス個ある同値類たちから代表元を選ぶには、通常の選択公理より強い何かの原

7) $(X, \lhd)$ を順序構造とするとき $Y \subseteq X$ が x の始片であるとは、Y が $<$ に関して下方に閉じていること、つまり、すべての $a \in Y$ に対し，$b \lhd a$ なら $b \in Y$ が成り立つこと、とする。

理が必要になる。

これらの困難を回避する方法は、やはりフォン・ノイマンによって1920年代に発見されている。それは、各々の順序数 α は，それ α より小さい順序数の全体である、と再帰的に定義することである。この再帰的定義は、実際にはうまく機能しないので以下のような代替を用いる必要があるのだが、もしこの再帰的定義が定義として機能していたとすると、最小の順序数は、(それより小さい順序数がないので) 空集合 $\emptyset$ でなくてはならず、その次の順序数は空集合を集めた $\{\emptyset\}$, その次の順序数は，この二つの順序数を集めた $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 等々、とならなくてはいけないことがわかる。一般に、α の次の順序数は、集合としての α ($=$ α より小さい順序数の全体) と要素としての α を含むものにならなくてはいけないので、$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ である。また、このとき、順序数の大小関係は、$\in$ と一致しなくてはならず，大小関係は推移的なので、このように定義された順序数 α は、(a)「すべての $\beta \in \alpha$ と $\gamma \in \beta$ に対し $\gamma \in \alpha$ が成り立つ」を満たし、[8] (b)「$\in$ は α 上の整列順序である」。ここで、順序数の公式の定義を (a) と (b) を満たすような集合のこと、として定義し、順序数の間の大小関係を $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$ で定義すると、これが、これまで考えてきた順序数の満たすべき性質をすべて満たすものになっていることが次の定理5により確かめられる。まず、この意味の順序数の全体が、次の順序数をとる演算と、順序数の極限をとる演算について実際に閉じていることを調べておく:

補題 4. α が順序数なら、$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数である。$\alpha + 1$ は ($\in$ に関して) α の次の順序数となっている。A を順序数の集合とするとき、$\bigcup A = \{\beta :$ ある $\alpha \in A$ に対し $\beta \in \alpha\}$ も順序数である。

次の定理は、定理2と補題4を用いると定理3と同じようにして証明できる:

定理 5. 任意の整列順序 $(X, <)$ に対し、$(X, <)$ と $(\alpha, <)$ (つまり $(\alpha, \in)$) が順序

---

8) このことを、α は ($\in$ に関し) 推移的である、と表現する。

同型になるような順序数αが一意に存在する。

したがって、定理5と定理3により、ここで定義した順序数は、$\in$により線形に順序づけられ、すべての整列順序に対し、それと順序同型な順序数が丁度一つ見つかるようなものになっていることがわかる。これは、整列順序を順序同型で同一したときの同値類の代表元、という順序数に対する要請を満たすものになっている。

順序数 (ordinals) の全体を、On であらわすことにする。On は集合ではない：もし、On が集合だったとすると、On は推移的で、$\in$に関して整列集合になるから、順序数である。したがって $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$ が成り立たなくてはならないが、しかし、このことから、$\in$は On 上で整列順序でなくなってしまう ($\{\mathrm{On}\}$ は$\in$に関する極小元を持たない) ので、矛盾である。

4 累積的集合世界像とグロタンディェク宇宙

順序数の厳密な導入ができて，順序数上，また，順序数の全体の上の，帰納法や関数の再帰的定義の理論が確立されるとると、現代の集合論の基礎と言える、累積的階層について議論することができるようになる。すべての順序数αについて、α番目の累積的階層V_αを、再帰的に $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ とし、[9] 極限順序数[10] γに対しては、$V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ として定義すると、V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は包含関係に関して上昇列になる。現代の集合論では、V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ がすべての集合を被覆することを公理として仮定する (基礎の公理)。集合の全体のなすクラスをVであらわすことにすると、基礎の公理は、$\mathsf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ という等式として表わすことができる。

順序数の全体の中で、ある意味での節目となっているようなもののクラスをいくつも考えることができる。そのようなものの最初のものは、基数と呼ばれる順

9) 集合aに対し，$\mathcal{P}(a)$ でaの冪集合（aの部分集合の全体からなる集合）をあらわす。

10) 順序数γが$\alpha+1$という形に書けないとき、γを極限順序数とよぶ。

序数の全体である。基数は、それより小さい順序数のどれとも、全単射で対応づけることのできないような順序数、として定義される。すべての自然数は基数で，ωが最初の無限の基数となる。選択公理を仮定すると、すべての集合に対して、その集合と全単射で関連づけられるような基数がちょうど一つ存在する。このような基数を、この集合の濃度と呼ぶが、このことから、基数は、集合の全単射対応の存在の意味での，大きさの尺度を与えるものになっていることがわかる。どんな順序数αに対しても、それより大きな基数が存在することが示せるので、基数の全体は、On の部分となっている真のクラスである。このことから、無限基数を、順序数を添字にとって小さい順に枚挙することができることがわかるが、そのような枚挙を、$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots \ \alpha \in \mathrm{On}$ と表わす。$\aleph_0 = \omega$ である。基数の中には、$\aleph_1$ や $\aleph_2$ のようにある基数の次のものになっているものと、$\aleph_0$ や $\aleph_\omega$ のようにそれまでの基数の極限になっているものがあるが、後者を**極限基数**とよぶ。極限基数の全体も真のクラスである。

$\aleph_\omega$ は、$\aleph_0 = \omega \ni n \mapsto \aleph_n$ という $\aleph_0$ $(< \aleph_\omega)$ で添字づけされた基数の列の極限となっているが、このように、自分より小さな基数で添字づけされた基数列の極限となっているような基数を、特異基数とよび、そうでないものを正則基数とよぶ。極限基数でない基数はすべて正則基数だが、極限基数で正則なものの存在は ZFC では証明できない。これは、もしそのような極限基数κが存在すると、それから ZFC のモデルが作れてしまい、[11] 第二不完全性定理に抵触するからである。[12]

---

11) ここで、ZFC のモデルと言っているときの ZFC は超数学での ZFC ではなく、ZFC の内部で公理系 ZFC に対応する集合としての ZFC のことである。これをとり違えると、集合論が矛盾しているという錯覚を呼びおこすような結論が容易に導けてしまう。これは、まだ広く用いられるに至っている記号ではないが、筆者は、[6] などで、後者の ZFC を、「⌜ZFC⌝」という記号で表わして区別している。

12) V_κ の中で構成可能集合の クラス (例えば [3]、[4] を参照) を作ると、それがそのようなモデルになる。ある理論にモデルが存在するときにはその理論は 無矛盾なので、もし正則な極限基数の存在が ZFC から証明できるとすれば、ZFC の無矛盾性が ZFC の中で 証明できてしまったことになるが、不完全性定理により、このことから ZFC が 矛盾することが導けてしまう。

任意の集合 X に対し、X とその冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の間には全単射が存在しないことは、カントルによって示されている。したがって、ある基数 λ に対して、λ の冪集合の濃度（これを 2^λ とあらわす）をとると、$\lambda < 2^\lambda$ が成り立つ。正則基数となっている極限基数 κ が $\lambda \mapsto 2^\lambda$ に関して閉じているとき、つまり $\lambda < \kappa$ なら $2^\lambda < \kappa$ が常に成り立つとき、κ は**到達不可能基数**であるという。到達不可能基数は、巨大基数のなかで一番小さい[13]ものである。到達不可能基数の存在が ZFC から証明できないことは、正則極限基数の存在が証明できないことより更に直接的に得られる。κ が到達不可能基数なら、V_κ が ZFC のモデルになることが示せるからである。κ が到達不可能基数のときの V_κ は**グロタンディエク宇宙**と呼ばれることもある。[14]

累積的階層の重要な性質の一つに、モンタギュー＝レヴィの反映定理 (Montague-Levy Reflection Theorem) がある。これは、

> 集合論の言語での任意の論理式 $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1})$ をとったときに、[15] 順序数 α で、任意の集合 $a_0, \dots, a_{k-1} \in V_\alpha$ に対し、$\varphi(a_0, \dots, a_{k-1})$ が（V で）成り立つことと、$\varphi(a_0, \dots, a_{k-1})$ が V_α で成り立つことが同値になるような α がたくさん存在する[16]

というものである。このような α を、この性質に関する反映点 (reflection point) とよぶことにする。モンタギュー＝レヴィの反映原理は、集合の宇宙の満たすべ

---

13) ここでの「一番小さい」というのは基数の大小ではなく、「巨大であることの性質の一番弱い」という意味である。

14) グロタンディエク宇宙の通常の定義は英語版ウィキペディア [15] でのようなものだが、これが V_ω または到達不可能基数 κ に 対する V_κ と一致することは、見落とされることが多いように思われる。

15) ここでの論理式は、集合論の中での「集合」としての論理式ではなく、超数学での、具体的に与えられた論理式である。

16) ここでの「たくさん」は、集合論で「club many に存在する」と表現されるものである。

き強い反映原理のプロトタイプとなっており、以下での巨大基数の存在に関する議論での基準として重要な役割を果たすことになる。

厳密には不正確な記述になってしまうことを覚悟で言えば、φが、ある集合の存在を主張するもののときには、αが性質φに関する反映点になっている、というのは、$a_0, \dots, a_{k-1} \in V_\alpha$ に対し、$\varphi(a_0, \dots, a_{k-1})$ が主張する集合が存在するときには、そのような集合を V_α の中にとることができる、ということである。

5 巨大基数は存在する

巨大基数とは、到達不可能基数を始めとする超越的な性質を持つ基数の総称である。巨大基数であることの明確な定義があるわけではないが、少なくともその基数の存在から集合論の無矛盾性が導き出されることが、巨大基数であることの必要条件の一つであると言っていいであろう。特に、不完全性定理により、その存在は ZFC からは証明できない。

集合論や数理論理学をあまりよく知らない人たちから、巨大基数に関して「そんなあるかどうか分らないものを研究してもしょうがない」というような意見を聞くことは稀ではない。しかし、同様の否定的意見は、数学に対しても言えてしまえそうである:「数学のような矛盾しないかどうか分らないものを研究してもしょうがない」我々の存在自身の否定も容易にできてしまう:「人生なんて何の意味があるかわからないものを過してみてもしょうがない。」

巨大基数の研究については、「あることが ZFC で証明できないことは、ないことの証明が得られた、ということではないのだから、とりあえずその存在の仮定から何が出てくるかを研究してみても悪くないだろう。最悪、その非存在が証明できてしまったとしても、それはそれで興味深い数学的知見だろう」というような消極的な擁護はいずれにしても可能だろう。[17]

17) 実際、筆者が集合論の勉強を始めて間もなかった 1980 年代に、巨大基数の研究に疑問を抱い

しかし、集合論を深く研究してゆくと、巨大基数の存在は、もっと積極的に肯定してよい集合論的な要請であるように思えてくる。到達不可能基数の場合には、その存在を擁護する次のような議論が可能であるように思える。V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ を、V を生成してゆくプロセスと見たときには、このプロセスはまだ生成の途中で、実はこの生成は更に先に進むものであるべきである、と考えてみる。生成のプロセスが On を超えて先に進むとすると、このもとの On は更に生成が進んだときの On の中で到達不可能基数になっていなければならない。もとの On がその生成の段階で「順序数の全体」であったということは、この On は更に先に生成が進んだ世界の中での強い反映の原理の反映点になっていなければならない。したがって、もとの On の中にも到達不可能基数が存在する。同様の議論で到達不可能基数が On の中に共終に存在することの「論証」も可能になる。勿論、ここでの議論は、数学的な「証明」ではない。「生成のプロセスが On を超えて先に進む」云々は、モデルの end-extension を頭に置いて議論しているものではあるが、何の定式化もされていない戯言にすぎないとも言える。しかし、このような「思考実験」の積み重ねから、集合論の研究者たちの多くは、巨大基数公理を単なる暫定的な仮定ではなく、正しい公理、つまり「巨大基数は存在する」という提唱として理解している、と言っていいだろう。[18)]

て質問したときの Jean-Pierre Levinski 氏の答はこのようなものだったと思う。

18) 集合論の公理の妥当性や正当性についての更に詳しい議論は［1］を参照されたい。ただし、筆者が本稿で述べている正当性の議論は筆者自身のもので［1］とは若干異なる点もある。［1］でも窺われるように、この巨大基数の存在に関する「思考実験」は、多くの場合、巨大基数公理のもとでの数学的研究結果がベースとなるので、議論が擬似哲学的な外観を持つことはなく、それはむしろ数学的でテクニカルなものである。

[補筆] この箇所を書いたときには、文献を参照せず、筆者自身の直観で書いていたのだが、後で、K. Hrbáček, and T. Jech, Introduction to set theory (3rd ed., 1999) にも筆者の議論と類似の到達不可能基数の正当性付けの議論が書かれていることを発見した。

6　中程度の巨大基数から巨大な巨大基数へ

到達不可能基数は巨大基数の中で一番小さいものであるが、[19] 集合論の研究の歴史の最も早い時期に導入されたものでもある。[20] 同様に比較的早く研究されはじめた巨大基数の概念としては、可測基数がある。この概念は 1930 年代に、測度論の研究からウラム (Stanisław Ulam) によって導入されている。可測基数のもともとの定義は、「κ が**可測基数**とは、κ 上に κ-加法的な $0, 1$ 値をとるトリヴィアルでない測度が存在することである」というもので、この定義自身は直接には基数の巨大性に言及していないようにも見える。ウラムは可測基数が到達不可能基数であることを示しているが、1960 年代初めのスコットらの仕事により、可測基数の次のような特徴付けが得られて、それにより、可測基数が、小さな巨大基数とは異なる世界に属す巨大基数であることが判明する: 基数 κ が可測基数であるのは、ある内部モデル M と初等的埋め込み $j : \mathsf{V} \to M$ で[21]、κ 未満の順序数は動かさず、$j(\kappa) > \kappa$ となるようなものが存在する、[22] ちょうどそのときである。このような初等的埋め込み j の存在は、κ から、それより小さな基数への強い反映原理が成り立つことを主張するものになっている。これは次のようにして見ることができる。κ に対してある性質 φ が成り立つとする。この性質の記述には、V_κ の要素 $a_0, \ldots, a_{k-1}$ がパラメタとして含まれていてよい。φ がある程度単純な性質なときには、κ は M でも φ を満たす。したがって、$\kappa < j(\kappa)$ により、M で「基数

19) ここで「小さい」と言っているのは、脚注 13) でも述べたように到達不可能基数を定義する性質が他の巨大基数の概念のそれより弱い、ということである。例えば、すぐ後で述べる可測基数は到達不可能基数よりこの意味でずっと大きな巨大基数であるが、ある可測基数 κ が、ある到達基数 λ より基数として小さい、という状況は十分にあり得る。

20) 到達不可能基数は、ハウスドルフの 1908 年 (明治 41 年) の論文で導入されている。

21) 写像 $j : \mathsf{V} \to M$ が初等的埋め込みであるとは，任意の $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathsf{V}$ に対し，$a_0, \ldots, a_{n-1}$ が論理式で書ける性質を V で満たすことと、同じ性質を $j(a_0), \ldots, j(a_{n-1})$ が M で満たすことが、常に同値になることである。

22) このようなとき、κ は j の**臨界点**であると言う。

$\lambda < j(\kappa)$ で性質 φ を満たすものが存在する」という主張が成り立つ。j は V_κ の要素であるパラメタ $a_0, \cdots, a_{k-1}$ を動かさないから、j が初等的埋め込みであることから「基数 $\lambda < \kappa$ で性質 φ を満たすものが存在する」が結論できる。

この特徴付けから、可測基数の存在がゲーデルの構成的集合の公理 $(\mathsf{V} = L)$ と共存できないことや、可測基数が到達不可能基数の極限になっていることなどが直ちに導かれる。特に、可測基数が構成的集合の公理と共存できないことは、中程度以上の巨大基数を小さな巨大基数から区別する主な区分線の一つになっている。

可測基数の場合には、反映の性質は κ からそれ未満へのものだが、On から κ 未満への同様の反映の性質を考えると、巨大な巨大基数の概念が得られる。たとえば、巨大な巨大基数のうちの超コンパクト基数とよばれるものは、次のような反映の性質により特徴づけられる: すべての基数 $\lambda \geq \kappa$ に対し、V の内部モデル M で、λ-列について閉じているようなものが存在して、[23] 初等的埋め込み $j : \mathsf{V} \to M$ で κ 未満の順序数は動かさず、$j(\kappa) > \lambda$ が成り立つようなものが存在する。

これらの巨大基数の存在の正当性は、到達不可能基数での議論でも述べたような、集合論の宇宙の生成 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ では、生成が成就したように見える通過点が無数にあり、そこでは強い反映の性質が成り立つはずだ、という直観によって擁護できるだろう。巨大基数には、この巨大な巨大基数より更に強い、ひょっとすると矛盾しているかもしれない巨大基数[24] もある。これらの巨大基数や他のものについては、[10] や、そこに付されている巨大基数のチャートを参照されたい。

初等的埋め込みに関しては、少し前に「数学セミナー」に書いた記事の拡張版 [5] にもう少し詳しい解説があるので参照されたい。

---

23) M が λ-列について閉じている、とは、すべての M の要素の λ-列が再び M の要素になる、ということである。この「λ-列について閉じている」という M の性質を他のもので置き換えることで、いくつかの他の巨大な巨大基数の概念が定義できる。

24) 巨大な巨大基数 (large large cardinal) という、typo と間違えられてしまいそうな表現はかなり定着していると思われるが、「ひょっとすると矛盾しているかもしれない巨大基数」の方は、筆者による暫定的な名称である。

7　巨大基数と連続体問題

連続体問題とは、連続体（実数の全体やカントル空間などそれと類似の構造）の集合としての濃度（この濃度は $2^{\aleph_0}$ と表される）を決定する問題のことである。連続体問題は、集合論の研究の発足以来、集合論研究での最も中心的な問題の一つと考えられてきた。カントルは、1873年に連続体の濃度が非可算であることを証明しているが、彼はこの濃度が $\aleph_1$ であることを確信して（この主張 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ は連続体仮説（Continuum Hypothesis）と呼ばれ、CH と略記される）、その証明を試み続けた。ヒルベルトは、1925年の論文に、「ヒルベルトのプログラムにそった研究が成就した暁には連続体仮説の証明が完成する」と解釈できる主張の証明のスケッチのようなものを与えている。ゲーデルの不完全性定理により、ヒルベルトのプログラムは、ヒルベルトの思っていたような仕方では成就されないことが示されたが、ゲーデルは、この証明のスケッチと類似のアイデアを用いて、ZFC が矛盾しないなら、ZFC に CH を加えた体系も矛盾しないことを証明した。

一方、1960年代になって、コーエン (Paul Cohen) は、ZFC が矛盾しないなら、ZFC に CH の否定（つまり、不等式 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ が成り立つという主張）を加えたものも矛盾しないことを示し、これらの結果から、連続体仮説は、ZFC 上相対的に独立であることが分った。[25] このことから、特に、通常の数学的手段では、連続体仮説の真偽を決定することができない。しかし、このことは、何等かの方法で、「正しい」公理を見出して、集合論の公理系を拡張し、この拡張された公理系で連続体仮説の真偽を決定し、もし連続体仮説が正しくない、というのがその結論なら、更に $2^{\aleph_0}$ が何になるのかを決定することができる可能性を否定しているわけではない。このことについては、ゲーデルが［9］で早い時期に指摘していて、このよう

25) コーエンの強制法による相対的無矛盾性の証明は、集合論の推移的なモデルが与えられたとき、それをジェネリック拡大と呼ばれる（ある意味で架空の）モデルに拡張して、たとえば、CH の否定の場合には、このジェネリック拡大が、不等式 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ を満たすようなものにすることで得られる。

な立場から連続体問題を解決する、という研究方針は、今日では「ゲーデルのプログラム」と呼ばれている。ZFC を拡張する公理としては、巨大基数のうちのどれかの存在を主張する公理（巨大基数公理）が考えられるが、これらの公理は、連続体のサイズを全く決定しない。これらの巨大基数の存在のもとでも、コーエンの方法を使って連続体の濃度が $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_{2020}, \aleph_{\omega+1}$ など、巨大基数より小さい基数で非可算な共終数を持つもののどれかになるようなジェネリック拡大によるモデルを作ったときには、巨大基数はこの拡大モデルの中で同じ種類の巨大基数として生き残っているからである。しかし、巨大基数の存在は、連続体の他の性質については影響を与えることが知られている。可測基数が存在するときには、実数で構成可能でないものが存在する（たとえば前に触れた $0^{\#}$ がそのようなものである）。もっと大きな巨大基数（たとえば超コンパクト基数）が存在するときには、すべての射影集合（$\mathbb{R}^n$ のボレル部分集合から出発して射影と補集合をとる操作の（有限回の）繰り返しで得られる集合）はルベーグ可測になる。[26)]

巨大な巨大基数の満たす反映原理と類似の反映原理が，$\aleph_1$、$2^{\aleph_0}$ といった小さな基数で成り立つ、という状況に関してもこれまで多くの研究がなされてきた。巨大基数が通常の数学の行なわれる世界を遙か下に見ているのに対し，$2^{\aleph_0}$、$\aleph_1$ は、旧来の数学に自然な関わりを持つ基数である。[27)] しかし、$2^{\aleph_0}$ は連続体の濃度として、連続体が豊かな数学的実体である（べきである）という直観からは、この濃度の下への反映に関する強い反映原理が成り立つ、という要請は自然なものに思えるし、$\aleph_1$ が非可算性の状況を反映する基数である（べきである）という直観からは、この濃度への反映に関する強い反映原理が成り立つ、という要請は自然なも

26) これは、マルティン (D. Martin)、スティール (J. Steel)、ウディン (H. Woodin) らによって 1980 年代に確立された結果の一部である。一方、ゲーデルの構成的集合の公理からは、射影集合でルベーグ可測でないような集合の存在が導かれる。

27) $\aleph_1$ については、第 2 節で述べたことから、順序数としての $\aleph_1$ は、$\mathbb{R}$ に順序同型に埋め込めない最初の順序数である、という特徴付けが可能である。

のに思える。

小さな基数κが、Vから、Vのあるジェネリック拡大の内部モデルMへの初等的埋め込みの臨界点になっている、ということは可能である。このようなときκは**ジェネリック巨大基数**である、という。巨大基数のときと同じように、Mの満たす性質を調節することで、様々な強さのジェネリック巨大基数の条件が得られる。特に、$\aleph_2$や$2^{\aleph_0}$がジェネリック巨大基数になっているという主張は、$\aleph_1$や$2^{\aleph_0}$の回りで強い反映原理が成り立つ、という主張を強化するようなものになっていると考えられるので（超コンパクト基数に関する議論を参照）、これも自然な要請であることの範疇で考えることができる。

筆者は、最近、同僚の酒井拓史とドクターの学生の André Ottenbreit Maschio Rodrigues との共同研究で、強い反映原理がこれらの小さな基数で成り立つときには、連続体の濃度は、$\aleph_1$か（つまり連続体仮説が成り立つか）$\aleph_2$かあるいは非常に大きなものになる、ということを示す結果を得た。これらの3つの場合の標準的なモデルはいずれも超コンパクト基数の存在から出発して類似のジェネリック拡大をとることで得られるのだが、我々は、この状況の分析から、レイバー（Laver-）ジェネリック巨大基数と名付けた新しいタイプのジェネリック巨大基数の存在公理群を導入して、これらの公理群のパラメタを自然なものに設定すると、そこから直接に、この三分律が導かれ、強い反映原理の成立もそこから導けることを示した。[28)]

この三分律が最終的なものなのか、それともこの3つの可能性から一つあるいは二つがより自然なものとして残ることになるのか？これらの結果の無矛盾性の強さは何か？これら結果とウディンの連続体問題の研究とは整合的につながるも

---

28) これらの三分律は、「十分に強い妥当な反映原理が成り立つなら」、「妥当なパラメタを持つレイバー・ジェネリック巨大基数が存在するなら」という付帯条件のもとで成立するもので、特に、この「妥当な」というところに恣意性が生じている可能性がある。この二つの「妥当な」の妥当性の評価は今後の大きな課題の一つでもある。
なお、ここで述べた結果については、[8] を参照されたい。

のなのか？など多くの未解決の問題が残っており、我々は非常にエキサイティングな研究の入口に立っていると言える。

8 ミニマリストとメガロマニア

数学は可能な限り制限された枠組の中で行なうべきだ、とする立場と、考えられるかぎりの数学的対象をすべて取り込んで、存在する可能性を持つ数学的対象はすべてその存在を公理として認めて先に進んでゆこうとする集合論でのような立場は、近代の数学史の中で鋭い対峙の瞬間を何度か持っている。クローネカとカントルの確執や、ブラウワーとヒルベルトの確執などは、このような立場の間の対立として理解できるだろう。[29] ゲーデルの不完全性定理、ゲンツェンの矛盾性証明の後の時代の我々にとっては、この可能な限り制限された枠組の中で行なう数学は、無矛盾性の保証のある公理系で数学を展開する、という意味付けを与えることすらできる。フェファーマン (S. Feferman) は、正確な文言を思い出せないのだが、[30] 応用可能な数学はすべてペアノ算術と無矛盾等価な体系で行える、というような表明をしていたと思う。これは確かにそうかもしれないし、そのことをきちんとチェックしてみる、ということは人類の科学全体にとって大きな意味を持つことでもあろう。

---

29) これは「ミニマリスト」と「メガロマニア」の間の論争と言うことができるだろう。ここで例として挙げた二組の論争では、「メガロマニア」の側が勝利しているように見えるが、現代の数学者はどちらかというと「ミニマリスト」側に肩入れしていることが多いようにも思える。

30) [投稿後の補筆] この原稿の投稿版の校正は，第３回環太平洋トポロジーとその応用国際学会 (中国語では: 第三届泛太平洋拓扑与應用国際大会) の参加のため中国の成都に滞在の折に行なった。成都ではインターネットへの接続が制限されていたため、文献の確認が十分にできなかったのだが、この主張に関する議論は、たとえば、ウエブページ `https://math.stanford.edu/ feferman/papers.html` にリンクされている故 Feferman 先生の論文や未完原稿、特に Introduction to Foundations of Explicit Mathematics (book in progress by S. Feferman, G. Jäger, S. Strahm, with the assistnace of U. Buchholtz) で見ることができる。

しかし数学の進歩ということで言えば、制限された枠組にとどまっている、ということが創造的な行為とは言えないことが多い、ということも長い数学の歴史が示していることである。数学の進歩は、制限された枠組での数学と、開かれた、どこまでも拡張する集合論的世界観での数学の間の自由な精神の往復運動の中で発展するべきだし、脚注2) でも述べたような、超数学と集合論的数学との間の視点の移動という、旧来の数学にはなかったスタンスももっと積極的に取り込んで先に進んでゆくべきだろう。

ヤコビの言ったように、人類の知性の尊厳を守ることが数学の最終使命であるのなら、それが人類の終りに臨んで、健全な数学的発展のもとにはたされることを望むものである。

参考文献

[1] Joan Bagaria, Natural axioms of set theory and the continuum problem, In: Proceedings of the 12-th International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science, King's College London (2005), 43-64.

[2] Sakaé Fuchino, The Set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous Platonism viewpoint, Annals of the Japan Association for the Philosophy of Science Vol.20 (2012), 49–54.

[3] 渕野 昌、連続体仮説とゲーデルの集合論的宇宙(ユニヴァース)、現代思想、2007年2月臨時増刊号 (2007)、94–116.

[4] ———、構成的集合と公理的集合論入門、[14] の第IV巻に収録、(2007).

[5] ———、間違いと真理: 解析学と集合論の場合、数学セミナー (寄稿), Vol.57, No.9, 36–42, (2018). 拡張版: https://fuchino.ddo.jp/articles/susemi2018-x.pdf

[6] ———、数学と集合論 — ゲーデルの加速定理の視点からの考察、科学基礎論研究、Vol.46, No.1 (2018), 33–47.

[7] Sy-David Friedman, Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On set-generic multiverse, Lecture Notes Series, Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore, Vol.33, Sets and Computations, eds.: Sy-David Friedman, Dilip Raghavan and Yue Yang, World Scientific Publishing (Aug., 2017), 25–44.

[8] Sakaé Fuchino, André Ottenbreit Maschio Rodorigues, Reflection principles, generic large cardinals, and the Continuum Problem, to appear in: Proceedings of the Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018.
論文の拡張版：
https://fuchino.ddo.jp/papers/refl_principles_gen_large_cardinals_continuum_problem-x.pdf

[9] Kurt Gödel, What is Cantor's Continuum Problem?, American Mathematical Monthly 54, 515–525; errata 55, 151 (1947); Revised and expanded version in: P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall (1984).

[10] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/2003).
日本語訳： A・カナモリ著、渕野 昌 訳、**巨大基数の集合論**、シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998).

[11] Kenneth Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980).
日本語訳: K. キューネン著, 藤田 博司 訳, 集合論 — 独立性証明への案内, 日本評論社 (2008).

[12] ————————, Set Theory, College Publications (2011).

[13] John R. Steel, Gödel's program, in: Juliette Kennedy (ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, Cambridge University Press (2014), 153–179.

[14] 田中一之 (編)、**ゲーデルと20世紀の論理学**、I–IV、東京大学出版会 (2006–2007).

[15] Wikipedia (英語版)、Grothendieck universe, `https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_universe`