ハウスドルフの集合論と位相空間論の誕生
— 現代，ないし (仮想的) 近未来の視点からの考察

本稿は,「数理科学」2022 年 6 月号特集に寄稿した論考の 2022 年 9 月 30 日 13:27 の時点での拡張版です.
本稿の最新版は，https://fuchino.ddo.jp/misc/hausdorff.html から download できます． この拡張版には，寄稿記事では，ページ数の制限のために割愛した引用文の原文が含まれています．また，最新版には，寄稿後の修正/拡張も，含まれてい（る可能性があり）ます.

渕 野　昌

1. 今，なぜ，ハウスドルフなのか

> *Every mathematician agrees that every mathematician must know some set theory; the disagreement begins in trying to decide how much is some.*
> — *P. Halmos* [12)]

ハウスドルフという名前は, 数学をいくらかでも勉強した人なら, 何度も遭遇しているはずである．位相空間論を勉強すると,「ハウスドルフ空間」というおまじないを，耳にたこができるくらい聞かされることになるだろうし，フラクタルの理論では，ハウスドルフの次元論が，主要な道具の一つとして用いられるので，この関連で，ハウスドルフの名前を聞いたことのある人も，多いかもしれない．

ドイツ語版の Wikipedia[35)] には，(日本語に抄訳すると)

> フェリックス・ハウスドルフ (1868 ブレスラウ生; 1942 ボン没)[*1)] は，ドイツの数学者である．
>
> 彼は，一般位相空間論の創立者の一人であると評価されており，一般／記述集合論，測度論，関数解析，及び，代数学で，本質的な貢献を果たした．彼の最後の講座はボンにおけるものだった．
>
> *Felix Hausdorff (geboren am 8. November 1868 in Breslau; gestorben am 26. Januar 1942 in Bonn) war ein deutscher Mathematiker.*
>
> *Er gilt als Mitbegründer der allgemeinen Topologie und lieferte wesentliche Beiträge zur allgemeinen und deskriptiven Mengenlehre, zur Maßtheorie, Funktionalanalysis und Algebra. Seinen letzten Lehrstuhl hatte er in Bonn.*
>
> — https://de.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff
> (22.01.13(木 21:57(JST)) に download)

とある．

後でも触れるような，ハウスドルフの悲劇的な最後を思い起こすと，ドイツ語の文章で，「ドイツの数学者である．」と言いきっているのは，政治的，ないし political correctness を配慮したステートメントのようにも読めてしまうし，「彼の最後の講座はボンにおけるものだった．」は，現在のドイツのボンが，数学研究の牙城と看做されていることとの関連で読めてしまうのだが，この項目の翻訳，ないしは翻案となっていると思われる他の言語での対応する項目では，これらの表明は直訳的に継承されている．

ハウスドルフの，[Hausdorff 1914[15)]] (大正 3 年) と，[Hausdorff 1927[16)]] (1927/1935, 昭和 2 年／昭和 10 年) は，20 世紀前半の数学に大きな影響を及ぼした，集合論の教科書である[*2)*3)]．表題だけを見ると[*4)]，[Hausdorff 1914[15)]] は，[Hausdorff 1927[16)]] のダイジェスト版のように思えるかもしれないが, 実際には, [Hausdorff 1927[16)]] は，[Hausdorff 1914[15)]] よりずっとページ数が少なく，順序 (現代の用語では線形順序) の理論や，測度論，一般位相空間など [Hausdorff 1914[15)]] では，ページ数をさいて扱われていたテーマの多くが省略されており，その代りに，[Hausdorff 1914[15)]] が書かれたときにはまだ存在していなかった，主に記述集合論に関連す

---

*1) 訳注: 明治元年，現ヴロツワフ (ポーランド) 生; 昭和 17 年，ボン (ドイツ) 没．

*2) ハウスドルフは，哲学や文学での書籍を Paul Mongré のペンネームで複数上梓しているが，数学では，本として出版したものは，この二冊のみである．

*3) 実は，後述するように，影響は前世紀前半を超えて，現代にまで及んでいる．

*4) „Grundzüge der Mengenlehre“ は「集合論提要」とでも訳すことができるだろう．一方 „Mengenlehre“ は，単に「集合論」である．

る，当時の最新の結果が，多く盛り込まれている．これは，改訂版が含まれることになった教科書のシリーズのコンセプトのため，ページ数の制限があったことが，その背景のようで，この事情を説明して，内容の取捨選択のアドバイスを請う，ツェルメロに宛てたハウスドルフの手紙が残されている．しかし同時に，この，抽象集合論から，“実数の集合論” *5) へ，という 1914 年から 1927 年の間に起こった，ハウスドルフの研究興味の焦点の移動も，このことの大きな背景になっているようである．

[Hausdorff 1914[15]] は，当時の東欧，特に，ロシア (主にモスクワ) と，ポーランド (ルヴフ，ワルシャワなど) の研究グループの研究に，大きな影響を与えた．この影響のありかたの精査は，ハウスドルフの 20 世紀数学における位置の (再) 評価で，大きな意味を持つことになると思うものだが，上で「ハウスドルフの研究興味の焦点の移動」と言ったものは，これらの研究グループの，1914 年から 1927 年の間での研究成果に，呼応するものでもあったようにも思える．

このように，[Hausdorff 1914[15]]，[Hausdorff 1927[16]] は，それらの発表当時の，集合論の視点からの数学研究の最前線と連動しており，[Hausdorff 1914[15]] の前書きにある，

> ここに上梓するのは教科書であって，研究報告ではない: 本書は，集合論の要点を，高度な前提なしに，その細部までに至る証明と共に記述することであり，その代り，関連する話題を網羅することは，断念している．
>
> *Das vorliegende Werk will ein Lehrbuch und kein Bericht sein: es versucht die Hauptsachen der Mengenlehre ohne Voraussetzung höherer Vorkenntnisse mit vollständig ausgeführten Beweisen darzustellen und verzichtet dafür auf Vollständigkeit des behandelten Stoffes.*
>
> — Vorwort (前書き), [Hausdorff 1914[15]]

という言明にもかかわらず，これらは，(少なくとも本の後半については) 教科書というよりは，モノグラフに近い性格を持つものだった．

しかし，現在，この二冊の「教科書」の，集合論の入門に関する部分を精査してみると，それらは，(言葉通りにとると) 議論が破綻しているものになっていることに驚く．もちろん，議論の全体としては，(ある意味で?) 破綻をきちんと回避している (つまり本の後半に書いてあることは，(多分) すべて (ほとんど何の修正も施さずに) 現代の視点からの議論に，厳密かつ整合的に再統合できる) のだが，巷でよく言われることのある，「カントルの素朴集合論は矛盾していた」という大変に誤解をまねきやすい評価の対象を，地で行くようなものにすらなってしまっているように思える (ただし，それは，以下に述べるように，巷で聞く「カントルの素朴集合論は矛盾していた」説の説くところとは，異る理由によるものなのだが).

[Hausdorff 1914[15]] も，[Hausdorff 1927[16]] も，執筆されたのは，不完全性定理や真理の定義不可能性定理より以前なので，その当時の読者が問題点を察知したとしても，「なんとなくおかしいのではないか」という疑問の域を出ることは難しかったかもしれないが，不完全性定理以降，真理の定義不可能性定理以降の時代に生きている我々は，それらを言葉通りにとると意味をなさない (つまり，厳密な形式的体系での議論に翻訳できない) ものになっていることを，示せてしまう (以下の第 2 節を参照).

調べてみると，現在，普通に使われている，学部生むけの “教科書” でも，似たようなものが沢山あることに気付く．[Halmos 1960[12]] は，ぎりぎりのところでセーフという感じがするが，他のものは，破綻しているか，あるいは破綻していないかもしれないものとして解釈できるのは，単に，「集合」を，他の数学理論の初歩的な部分を記述するための「用語」としてのみ導入していて，それ以上の事項については，議論していないからに過ぎない，ことが多い．

前世紀の初頭ぐらいの昔なら，このように誤魔化して教えていても別に良かったのかもしれないが，現代ではそうもゆかなくなっているのではないかと思う．というより，なぜ，皆，このような教科書たちの記述に，気持悪くならないでいられるのだろうか?

言葉通りにとると “論理” が破綻している「数学」の有名な例の一つには，$\varepsilon\delta$-論法を使わない微分積分もある *6)．日本では大多数の高校生が，大学受験と

*5) 現代の用語では，Cichón の図式を中心とした，実数体に関連する基数不変量に関する研究のことを “実数の集合論” と呼ぶことが多いのだが，ここで言っている “実数の集合論” は，記述集合論や関数解析なども含めた，解析学と関連を持つ数学研究全体のことを指している．

*6) 「破綻」の仕方には，18 世紀初頭のライプニッツ流の「無限小」を用いるものと，もう少し後の時代の，数列や連続変量の極限を「どんどん近づく」として，ある種の “運動” として理解するものの二種類がある．これらの「破綻」と，それらの現代的な

いう悪習の下に，この破綻した「数学」に準じるものを強制的に習わされるので，入学試験を経由して大学に入る日本人の大多数は，数学を言葉通りにとらない訓練の成果で，権威から押し付けられたものは，何でも受け入れられるようになっているのかもしれない．

[Hausdorff 1914[15)]] と，[Hausdorff 1927[16)]] での集合論の基礎の，第 2 節で細説することになる混濁は，解析学の発展途上でのそれと同様の，理論形成の歴史上の一コマとして取るべきだし，既に指摘したように，二冊とも，本の前半での問題点は，本の後半に，本質的な問題としては引き継がれてはいない．しかし，このことが，これらの本の前半の記述に，全く問題がないことの保証になっているわけでもない．第 2 節では，これらの本の前半に続けて，現代の集合論を展開しようとすると，矛盾に陥ってしまう，という (深刻な) 例についても述べることになる．

ハウスドルフの教科書での集合論の基礎は，歴史的教科書の扱いについての議論の入口としてのみでなく，数学教育ないしは教育全般に対する重要な問いを，なげかけるものにもなっているように思える．

ある事柄が，子供の，その発達段階での理解能力を超えている，と判断されたときに，意図的に嘘の答を与える，ということは，日常的に行なわれていることだろう．このこと自身の是非も，非常に重要な教育学上の問題となるかもしれないが，もっと特化して，数学教育で，同様のことをすべきか否かは，真剣に議論する必要のある問題であるように思える．例えば，上で挙げた，$\varepsilon\delta$-論法を用いない微分積分の問題は，この文脈で議論するべきことの一つだろう．この問題に関連する事項については，第 2 節の終りと第 4 節で再び取り上げることになる．

[Hausdorff 1914[15)]] と [Hausdorff 1927[16)]] の大きな特徴は，位相空間論，測度論，記述集合論といった，当時の最新の数学研究の各分野を，集合論の部分，ないしは，集合論の応用として含んでいることであろう．「集合論は，すべての数学を内包する，数学の基礎である」，という立場の有効性は，ブルバキにより広く知しめられるところとなったが，そのような捉え方のルーツの一つは，ハウスドルフのこれらの教科書にある，と言って間違いなさそうである．

上でも既に触れたように，[Hausdorff 1914[15)]] と [Hausdorff 1927[16)]] の後半で展開される，これらの理論は，当時の数学研究に，それまでになかった新しい視点と，更なる発展の可能性を示唆するものだった．特に，[Hausdorff 1914[15)]] は，第一次世界大戦後の，ポーランド学派の数学研究プログラムに決定的な影響を与えたと思われる．このことは，ポーランド学派の発行した学術誌であった Fundamenta Mathematicae の，最初の数巻での，ハウスドルフの名前や彼の仕事の引用の挙げられている論文の数の異様な多さからも見てとることができるし，名前が挙がっていない場合でも，論文の記法は，殆どすべて，[Hausdorff 1914[15)]] のそれに準ずるものになっていることからも，その影響の大きさは明らかである．この，ハウスドルフの研究から発展した数学が何だったのか，そして，それは現代にどう継承されているのか，ということに関しては，第 3 節で考察する．

本稿では，上で既に述べたような，諸点の考察を踏まえて，現在，ないし，近未来の教科，また，それに接続する研究分野としての，「集合と，位相，測度とカテゴリー [*7)]」に対して，ハウスドルフの，２つの教科書を含めた仕事が，過去のモデルケースとして，果たすことになるであろう役割についても考察したい．

本稿のもとの表題「ハウスドルフと位相空間論の誕生」は，『数理科学』の編集部から提案されたものだったのだが，この提案を書き記した email を受けとったときに，真っ先に頭をよぎったのは，岡潔の次のような逸話だった: [高瀬 2004[33)]] にもあるように，岡潔が奈良女子大で教えることになったとき，彼は，講義の準備のために，ハウスドルフの「集合論」を読み込んでいる．高瀬氏によると[34)]，これは，昭和 24 年 (1949) のことで，読んだのは 1927 年版の [Hausdorff 1927[16)]] だった，ということである．このとき，岡潔が選んだのが，その当時から 20 年以上も前に出版された [Hausdorff 1927[16)]] だったのは，なぜだったのか？というのは，筆者が長年抱いていた疑問だった (高瀬さんに聞くまでは，読んだのは，てっきり，[Hausdorff 1914[15)]] の方だと思っていたので，不思議の感はより大きなものだった)．この疑問に関連する話題につい

修復の仕方については，筆者による [渕野 2018[7)]] も参照されたい．

*7) ここで言うカテゴリーは，カテゴリー理論の意味のカテゴリーではない．第一種の集合 (set of the first category) は，現代の用語では痩集合 (meager set) と呼ばれることが多いが，その意味での “category” である — [Oxtoby 1971/80[29)]] を参照．

では，第 4 節で触れることになる．

2. 素朴集合論と，「カントルの集合論は矛盾していた」説

20 世紀の初め頃に見つかった，「集合論のパラドックス」の多くは，数学の対象には，集合として考えるには “大きすぎる” ものがある，ということを示すものだった．例えば，群の全体 $\mathcal{G}$ を集合だと考えると，そこから容易に矛盾が導けてしまう (演習!)．これは，集合論で，群の全体は考察できない，ということではない．例えば，群の全体の例では，群の全体を要素として含む集合を考えることができない，というのが，このことの帰結としての制限の一つである．

集合論を創始したカントルは，このような状況を正確に把握していたし，現在集合論のパラドックスとして知られるカントル以外の名前を冠して呼ばれているものの多くを，それらが (カントル以外の著者によって) 発表される前から，対応する集合の非存在証明として理解していた．

例えば，ヒルベルトに宛てた，1897 年 9 月 26 日の手紙[2] では，カントルは，

> 「集合」として我々が把握することのできない総体 (アレフたちの総体 *8)が，上で証明したように，そのようなものの例の一つになるわけですが) については，私は既に昔から 「絶対無限的」総体 *9) と呼んで，超限集合とは，明確に区別していました．

> *Totalitäten die nicht als „Mengen“ von uns gefaßt werden können (wovon ein Beispiel die Totalität aller Alefs ist, wie oben bewiesen wurde) habe ich schon vor vielen Jahren “absolut unendliche” Totalitäten genannt und sie von den transfiniten Mengen scharf unterschieden.*
>
> — [Cantor:Briefe 1991[2]], pp.388–389

と書いている．「カントルは集合論の公理化に興味を持っていなかった」と考えられていることも多いが，1899 年 5 月 9 日の，ヒルベルトに宛てた手紙[2] では，“算術的連続体” *10)が，このような，“矛盾しない集合” であることは，証明できる事実なのか，公理なのかを自問しているし，これより少し前の，1898 年 10 月 10 日の，やはりヒルベルトに宛てた手紙[2] では，ほとんどツェルメロ[38] の 1908 年の “公理系” の先駆と言える議論を展開している *11)．

G.H. ムーアは，[Moore 2002[28]] で，この手紙で，「カントルはツェルメロの公理化を殆ど先取りしているように見えるが，彼の議論は集合の定義であって，公理化ではなかった」と言っている (文言は筆者の意訳である)．

> *Cantor wrote again four days later, and on that occasion came close to formulating an axiomatization for set theory. It was not an axiomatization because, in trying to answer Hilbert’s critique, Cantor proposed to defne the notion of set rather than to axiomatize it.*
>
> — G.H.Moore [Moore 2002[28]]

しかし，カントルが，［集合の定義; 定義から導かれる定理］，と呼んだものの対は，用語の置き換えだけで，［集合論の公理設定のための指針; 公理］，という対として読み替えられるようにも思える．

[Zermelo 1908[38]] には，選択公理を含め，カントルの議論していない多くのディテイルが含まれているし，集合論の公理化を (1908 年の論文に続く数十年の研究で) 確立した人，としてのツェルメロのタイトルを剥奪するつもりが，あるわけでもないが，20 世紀初頭にセンセーションをまきおこした「集合論のパラドックス」をもって，「カントルの集合論は矛盾していた」と主張するのは，いずれにしても，単純化が過ぎるように思える．

今，ツェルメロの “公理系” として，引用符の中に入れて書いたが，ツェルメロが，1908 年に，[Zermelo 1908[38]] で確立したのは，現代のスタンダードからは，公理系と言えるものではなかった．それが，問題を残すものであったことは，ハウスドルフが [Hausdorff 1914[15]] を書いたときにも，十分に認識されており，[Hausdorff 1914[15]] の第 1 章には，

> このような状況から必要となってきている，際限のない集合の生成に，妥当な条件で制限を果す

---

*8) これは，現代の用語では，**基数の全体のクラス**と呼ばれ，Card という記号で表わされることが多い．

*9) 原文では，“absolut unendliche” Totalitäten (複数)．これは，現代では，**真のクラス** (proper classes) と呼ばれているものに，対応する．例えば，群の全体は真のクラスである．

*10) 原文では das “arithmetische Continuum (ママ: 現代ドイツ語のスペリングでは: Kontinuum)”．これは $\mathbb{Q}$ の代数閉包を指すのではないかと思うが，そうだとすれば，カントルが，ここで考えているものは，後出の無限公理を公理として捉えるべきか，という問題に対応することになる．

*11) この手紙では，置換公理に相当する主張が “定理” の一つとして考えられているので，ツェルメロの “公理系” どころか，ツェルメロ＝フレンケルの公理系を先取りするものにすらなっている．

ことの試みは，E. ツェルメロによって着手されている．この大胆な試みは，今のところまだ完結に至っておらず，初心者の集合論への入門の道筋としては，難しすぎるきらいもあるので，我々は，ここでは，ナイーヴな *12) 集合の概念の導入でよしとすることにして，その代り，(訳注: ツェルメロの理論でのような) 制限は厳守して，どのようなパラドックスへの道も断ち切るようしたい．

> *Den hiernach notwendigen Versuch, den Prozeß der uferlosen Mengenbildung durch geeignete Forderungen einzuschränken, hat E. Zermelo unternommen. Da indessen diese äußerst scharfsinnigen Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen gelten können und da eine Einführung des Anfängers in die Mengenlehre auf diesem Wege mit großen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, so wollen wir hier den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber tatsächlich die Beschränkungen innehalten, die den Weg zu jenem Paradoxon abschneiden.*
>
> —Kapitel I (第 1 章), [Hausdorff 1914[15]]

と書かれている．ちなみに，前にも述べたように，[Hausdorff 1914[15]] の後半や，[Hausdorff 1927[16]] の後半での，集合論の展開や，その応用は，現代の集合論の枠組の中で問題なく再論することができ，その意味では，この「どのようなパラドックスへの道も断ち切る」という目標は，達成されていると言ってよいだろう．

[Zermelo 1908[38]] の問題点は，現在の用語では，分離公理，または分出公理，と呼ばれる公理の適用範囲が，明らかでなかったことである．[Zermelo 1908[38]] では，ある集合 M と，確定的な性質 (definite Eigenschaft) $\mathfrak{E}$ に対し，M の要素で，$\mathfrak{E}$ を満たすもの全体からなる集合が存在する，という表明として，この分出公理が導入されているが，ここでの「確定的な性質」については，ある性質が確定的であることの十分条件については議論されているものの，確定的な性質が何なのかは明確に定義できていないため，公理系の外延が確定できていない．

スコーレムや，フレンケルが，公理系を一階の論理で厳密に記述し，その際に，確定的な性質とは，一階の論理の論理式 (で表現される性質) のこととする，という枠組を設定することで，この問題を解決したのは，いずれにしても，[Hausdorff 1914[15]] の出版より，後だった．また，この問題の解決が，問題の解決となっている，ということの真の意味を，現在の我々の理解に準ずる精度で理解できるためには，少なくとも，ゲーデルの完全性定理と，不完全性定理が確立されていなければならなかったし，それは，[Hausdorff 1927[16]] の出版より，更にずっと後のことであった．

このような歴史的背景を考慮すると，[Hausdorff 1914[15]] でも，[Hausdorff 1927[16]] でも，公理論的なアプローチがとられなかったこと自体は，当時としては，妥当だったと言うべきだし，少なくともこれらの本のカバーする結果の範囲では，そのことで，不具合が生じることはなかったと言っていいだろう．

しかし，ハウスドルフの集合論の基礎についての記述は，これとは別の，現代から見たときには，非常に大きな問題点となるものを抱えている．実際，現代の読者が，ハウスドルフの集合論の基礎を，そこに書いてある言葉通りに鵜呑みにして，その下に，20 世紀後半以降の集合論の成果を勉強しようとしたとすると，途端に，矛盾につき当たってしまうことになるだろう．

問題点の一つは，ハウスドルフが，世界の森羅万象を，集合の要素となりうる対象として想定していて，その中には，“既にそこにある” 個々の自然数も，すべて含まれていることにある．[Hausdorff 1914[15]] にあるハウスドルフの言葉を引用すると:

> ... 例えば，ある町の住人の全体の集合や，太陽に含まれる水素原子の全体の集合．これらは，どちらも有限個の対象からなる．2 つめのものは，とてつもなく大きな数の対象からなるものとなるにしても．無限の，つまり有限でない集合も考察の対象として含めることにして，これによって，一般の偏見と哲学の断定を乗り越えて，新しい研究領域である集合論を確立したのは，ゲオルク・カントルの貢献であった．なにしろ，有限の集合だけを考えていたのでは，算術や (訳注: 有限) 組合せ論を出ることはできないわけであるから．自然数の全体の集合や，空間の点の全体の集合は，無限集合の手近な例である．

*12) **ナイーヴ** (naïve) という語は，日本語では，純粋な，初々しい，というようなポジティヴな意味で使われることが多いが，欧米語では，対応する単語は，現代では，主に，おめでたい，御人好し，無知，というようなネガティヴな意味を持っていて，ここでは，むしろ後者の意味で使われている．

なお，ハルモスの [Halmos 1960[12]] の題での “naive” の内訳は，公理系を形式論理上で記述しない，という意味で，1960 年代には naivity の境界が大きく移動していることが分かる．

それで言うと，2020 年代での naivity は，さしずめ「反復強制法」を用いた議論はしない，というものにでもなるのだろうか．しかし，以下でも論じるように，一般の意識は，この naivity の境界の遷移について来られないでいるようである．

... wie etwa die Menge der Einwohner einer Stadt, die Menge der Wasserstoffatome in der Sonne. Diese beiden Mengen sind endlich, sie bestehen aus einer endlichen, die zweite freilich aus einer ungeheuer großen Anzahl von Gegenständen. Es ist das Verdienst Georg Cantors, auch unendliche, d. h. nicht endliche Mengen in den Kreis der Betrachtung gezogen und damit, über populäre Vorurteile und philosophische Machtsprüche hinwegschreitend, eine neue Wissenschaft, die Mengenlehre, begründet zu haben; denn eine bloße Theorie der endlichen Mengen wäre ja nichts weiter als Arithmetik und Kombinatorik. Die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der Punkte des Raumes sind die nächstliegenden Beispiele unendlicher Mengen.

—Vorwort (前書き), [Hausdorff 1914[15)]]

この視点からの議論では，有限と無限の概念は，集合論の外に “既にそこにあるもの” として与えられていることになるが，一方，集合論の内部では，集合の概念を用いて無限の定義をすることができる．現代の集合論では，無限集合の存在を保証する公理 (**無限公理**) として，

集合 U で，$\emptyset \in U$ で，すべての $a \in U$ に対し，$a \cup \{a\} \in U$ となるものが存在する

という主張を採用する．ここで存在の保証された集合 U を一つとり，集合の族 $\mathcal{F}$ を，

$$\mathcal{F} := \{W \subseteq U \ : \emptyset \in W,\ \text{すべての } a \in W \text{ に対し，} \ a \cup \{a\} \in W \ \}$$

と定義して (これは (真のクラスではなく) 集合である)，

$$\omega := \bigcap \mathcal{F} \tag{1}$$

とする [*13)]．この集合は，ここでの構成法から，

$$\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\{\emptyset\}\}\}, \ldots\} \tag{2}$$

となっている，と考えられる．現代の集合論では，$0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, etc. として，この集合 ω を**自然数の全体の集合**と看做すのだが，ハウスドルフの集合論では，これとは別に，自然数の集合

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{3}$$

が，“既にそこにあるもの”，として存在しているわけである．しかし，ここで，(2) での “...” と，(3) での “...” が同じ種類のものである，という保証はどこから出てくるのだろうか? これは，ハウスドルフの教科書でのようなナレーションで集合論を習う人が，当然突き当たる素朴な疑問だろう．この学習者が初心者なら，ここで何らかの乖離が生じているのか，そうではなくて，そうではないことが，何らかの方法で証明できるのかは，直ちには分らないはずである．

筆者の場合，集合論を勉強し始めたときには，このような疑問に答えてくれるような人が周りに誰もおらず，適当な教科書も手元になかったため，この疑問は，2 年間以上ペンディングになっていた．

読者にも 2 年間以上考えてもらうことはせずに，先回りをして，答を言ってしまうことにすれば，ここでは，実際に乖離が生じていて，(2) での “...” と，(3) での “...” が同じ種類のものである，ということは，(数学が矛盾していない限り) 証明できないし，これを仮定することもできない．つまり，この 2 つの “...” が同じ種類のものであることが何等かの意味で (定式化できて) 証明できた，とすると，そのことから矛盾が証明できてしまうことが示せる．言葉を変えると，ハウスドルフがここで考えている集合の世界は，それが，何らかの方法で妥当な公理系として定式化できたとすると，矛盾する体系にしかなりえないのである．

このことを理解するには，20 世紀の中盤くらいまでに得られた集合論や論理学での知見を持っているか，それを自力で再現することができることが必要になる．その意味では，筆者が，この答がわかるのに 2 年間以上を要した，というのも，必ずしも，筆者の能力不足のみに起因するものではなかった，と言えるのではないかと思う．

以下では，**Lévy-Montague の反映定理**と呼ばれる定理を，論理学での**コンパクト性定理**と，**不完全性定理**と組み合わせることで，ここでの状況の説明を試みてみることにする．なお，この反映定理に関する，より詳しい説明は，例えば，筆者が最近日本語で行なった講演のスライド [渕野 2021[8)]] を，参照されたい．定理の証明の詳細も，このスライドに埋め込まれているリンクをたどって，読むことができる．

今，ハウスドルフの集合論の基礎に対応する公理系 T^* が確立できて，それが，通常の集合論の公理を含むようなものになっていると仮定してみる．特に，T^* では，(2) の意味の自然数と，(3) の意味の自然数の間に乖離がない，とする．

T^* で，**ノイマン階層** $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathsf{On}\rangle$ を考える．

*13) $\bigcap \mathcal{F}$ は，$\mathcal{F}$ のすべての要素に，要素として含まれるような対象 a の全体からなる集合である．

ただし，On は順序数の全体からなるクラスで，V_α, $\alpha \in \mathsf{On}$ は，帰納的に，$V_0 := \emptyset$, すべての順序数 α に対し，$V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$, γ が極限順序数のときには，$V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ として導入されているものである．T^* に属する公理を，

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \qquad n \in \mathbb{N}$$

と枚挙する．このとき，Lévy-Montague の反映定理により，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\alpha \in \mathsf{On}$ で，

$$\langle V_\alpha, \in \cap (V_\alpha)^2 \rangle \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1} \tag{4}$$

となるものが存在する．ただし，ここでは，構造 $\mathfrak{A}$ と，その言語での文 ψ に対し，$\mathfrak{A} \models \psi$ で，“$\mathfrak{A}$ で ψ が成り立つ” ことを表わしている．T^* に関する仮定から，(4) は，すべての $n \in \omega$ に対し，成り立つ．特に，任意の $n \in \omega$ に対し，$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ は無矛盾である．したがって，(コンパクト性定理により)，T^* の無矛盾性 (矛盾しないこと) が，T^* で証明できてしまうが，これは，不完全性定理に矛盾である (つまり，T^* の無矛盾性の，T^* からの証明を変形して，T^* からの矛盾の証明が作れてしまう)．

ハウスドルフの集合論の基礎の問題点は，ある町の住人の全体の集合や，既にそこにある，数や，空間上の点の全体などを，集合論に取り込むことにしたことにある．集合論が実際に扱かうのは，数学的対象で，これらの数学の外にある，既にそこにある (と我々が認識 (ないしは錯覚) しているところの) 対象ではない．また，ω は，集合論の外で，“既にそこにある” $\mathbb{N}$ の理想化として，集合論の中で作られているが，これらの間の対応は，個々の具体的に与えられた数 n と，それに対応する集合としての ω の元 (を表わす集合論の言語での項) $\underline{n}$ のそれに限るしかない，という我々の置かれた状況を正しく認識することで，上の例で見たような，矛盾を導く誤った推論は，(すべて [*14]) 避けることができる．

[Hausdorff 1914[15]] の後半や，[Hausdorff 1927[16]] の後半で，実際に議論されているのは，ある町の住人の全体の集合や，太陽に含まれる水素原子の全体の集合などではなく，自然数の全体や，例えば，デデキントの “Stetigkeit und irrationale Zahlen” (1872)[4] のようなやり方で，この自然数の全体から出発して構成された実数の全体 $\mathbb{R}$ や，関数の全体 ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ などから構成される数学的対象であり [*15]，この構成の出発点となる自然数の全体は，(3) での (集合論の外から持ち込まれた) $\mathbb{N}$ ではなく，(1) で定義されたような ω である，と考えることで，上述のような種類の混乱を避けて，これらの本で展開された数学を，すべて [*16]，現代的な集合論の理解の枠組の中に再現することもできる．

(2) での ω から出発して通常の数学の対象を構成することで，集合でない対象は，数学的な議論の対象として，全く必要がなくなる．現代の集合論では，すべての対象は集合である，という立場から抽出された公理系で，議論をすることが標準となっている [*17]．

集合論の基礎を，当時可能だった枠組で公理的に論じた [Zermelo 1908[38]] では，集合でない数学的対象 (そのような対象は Urelemente (英語では: urelements) と呼ばれる) を，含んでいるが，一方，自然数の全体は，(1) に準ずる定義で導入された，集合の集合として，定義されているので，Urelemente は，そこでは，痕跡器官のような役割しかはたしていない．興味深いことに，この痕跡器官としての Urelemente は，ツェルメロの集合論の体系の改良を通じて，1930 年代の論文にまで生き残っている．

[Hausdorff 1914[15]] や [Hausdorff 1927[16]] は，上で見たように，集合論の基礎づけに関しては，[Zermelo 1908[38]] より一歩後退した，現代の視点からは，間違っていたと解釈さえできてしまうものになっていたのだが，他方，これらの教科書は，直積集合や関数の扱いに関しては，[Zermelo 1908[38]] を改良するものになっていた．

[Zermelo 1908[38]] では，直積集合は，互いに素な集合 A, B の間のみに，$A \times B = \{\{a,b\} : a \in A,\ b \in B\}$ として，定義され，そのような A から B への関数は，一意性の条件を満たす，この集合 $A \times B$ の部分集合のこと，として定義されている．また，その都度，A と B を調節して，互いに素な集合論で置き換えて，議論しなくてはならない，という煩雑さはあるもの，これによって，それまで，「対応規則」としてしか捉えられなかった，その外延の定かでなかった関数の概念

*14） 不完全性定理により，この “ すべて” は，‘?’ 付きの「すべて」である．

*15） ここでは，A, B に対し ${}^{A}B$ で，A から B への関数の全体の集合を表わしている (これはモダンな記法で，ハウスドルフが採用しているものではない)．

*16） こちらの “すべて” は経験則だが，このことは，個別には (理論的には) 実際にチェックすることができる．

*17） この立場では，真のクラスは，超数学的 (meta-mathematical) な対象として (つまり，真のクラスを定義する，集合論の外側の論理学の論理式の別名として) 扱われる．

が，集合の言葉で規定できるようになり，その結果として，「或定義域 A と値域 B を持つ関数の全体」が，確定的な性質を持つ $A \times B$ の冪集合の部分集合として，扱うことができることになり，この結果として，関数解析をはじめとする当時の新しい数学の研究分野の基礎づけが供されることになった．この意味で，これは，画期的な事件であったと言えるだろう．

[Hausdorff 1914[15)]] では，**順序対** (geordnete Paare) の概念が導入されて，対象 a と b の順序対を，そこでの記法で (a, b) と表わすことにすると，(必ずしも互いに素ではない) 集合 A, B の**直積集合**が，$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ と定義でき，A と B を，その都度，互いに素な集合論で置き換えて考えなければいけない煩雑さが回避されている．なお，順序対は，[Hausdorff 1914[15)]] では，$\{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$ として定義されているが，1 と 2 は固定された数 1, 2 ではなく，そこで考察している a, b の動く範囲の外側で取られた 2 つの互いに異なる対象である．このようなものがとれることは，既に [Zermelo 1908[38)]] で証明されているが，1 と 2 をその都度仕切り直さなければならない煩雑さが残されていた．この問題は，クラトフスキー[24)]により，a と b の**順序対**を $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ とすることで，解決されており，現在では，これが順序対の標準的な定義となっている．

[Hausdorff 1927[16)]] では，順序対の導入の仕方については具体的に触れることなく，順序対の満たすべき性質 ($(a, b) = (a', b')$ と $a = a'$ かつ $b = b'$ が同値になること) を満たすものとして扱われている．[Hausdorff 1927[16)]] の (おそらく 1935 年版に付け加えられたと思われる) 文献表には，フレンケルの，[Fraenkel 1928[6)]] が含まれており (第 5 節でのハウスドルフの 1924 年の葉書の引用を参照)，こちらの本の文献表には，[Kuratowski 1921[24)]] も含まれているが，[Fraenkel 1928[6)]] での順序対の説明も，[Hausdorff 1927[16)]] とほとんど同じもので，順序対の具体的な構成法については触れられていない．

順序対を用いた集合の積の定義により，$A^2 = A \times A$ も，考えられるようになる．[Hausdorff 1914[15)]] では，**順序**は，ある「規則」 (Vorschrift) として説明されているが，[Hausdorff 1927[16)]] では，集合 A 上の順序も，A^2 の部分集合で，順序としての必要な性質を満たすもの，として定義されており，これにより，関数に関してと同様に，A 上の順序の全体，A 上の順序型の全体などを，確定した集合論の対象として，扱うことができるようになった．

ケォプケとカノベイも [Koepke-Kanovei 2008[23)]] で指摘しているように，ハウスドルフは，フォン・ノイマンの 1920 年代の順序数の基礎付けの研究に気がついていなかったようである．その結果として，順序型の同値クラス (これは真のクラスになってしまう) のカノニカルな代表元を順序数や基数と定義する，というフォン・ノイマンの発見したトリックを [Hausdorff 1927[16)]] で採用できず，関連する箇所の記述がもたついたものになっている [*18)]．しかも，現代の集合論に翻訳して考えると，ここでは，同値類が真のクラスになるような同値関係での同値類の代表元をとる，という，もうひとひねり加えないとうまく実現できない [*19)] ことを，あたかも実行できているかのように扱って議論しているので，基礎付けが完全でないものになってしまっている．

3. 集合算，位相空間論，測度とカテゴリー [*20)]，記述集合論

[Hausdorff 1914[15)]] と [Hausdorff 1927[16)]] の，それぞれの前半で論じられている集合論の基礎は，現代の視点から見ると，前節で論じたような，問題点や，不備を，含むものだったが，そこで導入された記号法や，基礎的な考え方は，当時のポーランドやロシアの研究者に踏襲され，この時点でのスタンダードとなった．

しかし，[Hausdorff 1914[15)]] と [Hausdorff 1927[16)]] で，より注目すべきなのは，集合論の発展と応用を述べた，これらの本の後半の部分であろう．これらの本の前半が，集合論の発展の途上での，時代の制限に捉えられてしまっているように見えるのとは対照的に，ここでは，ハウスドルフは，楽々と時代を超えて，現代の数学者たちとも会話を始めようとしているように思える．

[Hausdorff 1914[15)]] のトポロジーや測度論の章は，これらの分野で，シュタイニッツの [Steinitz 1910[30)]] が，体の理論の統合で果たしたのと，相似か，または，それ以上の役割を果たしている．

距離空間の概念は，フレッシェの 1906 年の学位論

---

*18) フォンノイマンの集合論への貢献については，[渕野 2013[39)]] も参照されたい．

*19) 通常，このような状況を切りぬけるのには，現在，スコットのトリックと呼ばれることもある，rank が最小のもののみからなる部分集合を一意に指定して，この集合を代表元の代用として用いる，という手法を使うのだが (このやり方だと選択公理も必要にならない)，そのためには，[Hausdorff 1914[15)]] では考察されていない，基礎の公理を仮定する必要がある．

*20) “カテゴリー” という用語については，脚注 7 を参照．

文で導入されているが，「距離空間」（ドイツ語では metrische Räume）の用語自身は，(多分) ハウスドルフによるものである．また，[Hausdorff 1914[15]] では，ほとんど現代の意味の位相空間が，近傍系を基にして導入されているが，この章が位相空間論の始まりとなった．これは，一般向けの教科書の一章が，大きな研究分野の始まりとなる，という非常に稀なケースの一つである．ハウスドルフの位相の定義では，後に，T_2 と名付けられることになる分離公理 (任意の異る 2 点に対して，それぞれの近傍で互いに素なものがとれる) が，近傍系の基本性質 (公理) として加えられていた．現在では，この公理は一般的な位相空間の公理系からはずされていて，この公理を満たす位相空間は**ハウスドルフ空間**と呼ばれている．これが，本稿の最初に述べた「おまじない」の由縁である．

測度論についても，集合族上の測度，という設定は，フランスでの，関数に関する測度の研究というスタンスからの，大きな視点の転換だったし，これが書かれたのは，例えば，コルモゴロフの確率論の基礎が書かれる，20 年近くも前のことだった．[Hausdorff 1914[15]] 付録では，現在ハウスドルフのパラドックスと呼ばれる，$\mathbb{R}^3$ での球面の分割に関する定理が示されている．この定理の結論として，球面のすべての部分集合に対して，回転移動に関して不変な，有限加法的測度を定義することができないことが分かる．この定理は，$\mathbb{R}^3$ のすべての部分集合に対して，合同変換に関して不変な，有限加法的測度を定義することができないことを帰結する，バナッハ=タルスキーのパラドックスを系として導く．後に，これらの定理は，選択公理を仮定しなければ成り立たないことや，これらの定理は可算選択公理だけからは導けないこと，などがソロベイによって示されている (この証明には，やはりハウスドルフによって導入された概念である，(弱) 到達不可能基数の，存在の無矛盾性の仮定が用いられる．この仮定が，ソレベイの結果で必要であることは，後にシェラハによって証明されている)．

[Hausdorff 1927[16]] の後半では，**記述集合論**の，数学史上で最初の，まとまった記述が与えられている．記述集合論は，ラフな言い方になるが，(十分に大きな自然数 n に対する) $\mathbb{R}^n$ のボレル集合から出発して，射影をとる操作と補集合をとる操作を繰り返すことで得られる ($\mathbb{R}^m$ の部分) 集合 (射影集合) についての研究を行なう研究分野である．そのような集合が，すべてルベーグ可測になるか，また，ルベーグ可測性のカテゴリーでの (ある意味での) 双対概念であるベールの性質 (痩集合を除くとボレル集合と一致する) を持つか，カントル=ベンディクソンの定理を，これらの集合に一般化することができるか，といった問題は，この分野での中心問題の一つであった．ちなみに，この 3 つの性質は，対応する集合の族の**正則性**と呼ばれる．

「記述」集合論という名称は，もともとは，射影集合が，ある与えられたボレル集合の射影をとって，補集合をとって ... という構成の「記述」を持つもの，という意味合いの名称だったと思われるが，前世紀の後半に入って，実は，この射影集合は，あるカノニカルな構造で (一階の論理で) 定義可能な集合，という特徴付けがあることが分かり，数理論理学の手法が研究に持ち込まれることで，非常に魅力的で，普遍性を持った研究分野に変貌した．この分野では，他の集合論研究でと同様に，1960 年代以降 (つまり，強制法理論の導入以降) に大きな研究の進展があり，関連の研究は，現在も大きな速度で進んでいるので，[Hausdorff 1927[16]] で確立されたものが，何だったのかを議論するためには，少なくとも今世紀の集合論の視点に立った解説をする必要がある．本稿では，それを実行するだけのページ数の余裕は，いずれにしてもないが，[Kanamori 1994/2003[20]] の，Chapter 3 と Chapter 6 で，記述集合論の発展の歴史と，そこでの主要問題が，集合論の中心的な課題とどうかかわっているか，ということに関する，大きな眺望を得ることができるだろう．

[Kanamori 1994/2003[20]] でも述べられているように，ゲーデルの 1930 年代終わりの仕事[11] により，その段階までに得られていた記述集合論での正則性に関する結果は，通常の集合論で証明できることの限界に達していたことが判明する．ここでは，このゲーデルの研究が，それまで独立に進行していた，数学研究としての集合論と，集合論を数理論理学の下で考察する集合論の基礎づけの研究の統合の，必然性／必須性を示すものともなったことに，注意しておきたい．

多分，専門的すぎる，という判断から，[Hausdorff 1914[15]] や [Hausdorff 1927[16]] では言及されていない研究も含めて見てみると，ハウスドルフは，現代に至る集合論的数学の，重要な問題の提起となる，結果や概念の導入を，実に多く行なっていることに驚かされる．

彼の導入した，**正則基数**の概念や，それを用いた**基数算術**の基本性質，**一般連続仮説**や **(弱) 到達不可能基数**などは，今日では集合論での基礎知識となってい

る．特に，到達不可能基数は *21)，前世紀の後半以降に巨大基数の理論として大きく発展する分野での，研究の発端となる概念である．筆者の最近の研究は，この分野に属するもののことが多く，本特集の執筆者の，塩谷真弘氏や，酒井拓史氏も，これと関連する研究に従事されている．

20 世紀初頭のハウスドルフの研究での，順序の理論で考察されている**パンタチー**や**ギャップ**は，ゲーデルの最晩年の連続体仮説に関する研究で基本となる概念であったし *22)(ブレンドレ他の研究[1] は，現代の視点から，このゲーデルの未発表論文に答える研究である)，ギャップの順序型は，本特集の執筆者の一人でもある依岡輝幸氏の研究[36][37] でも考察されている．ハウスドルフの名前を冠した**ハウスドルフ・ギャップ**は，$\aleph_1$ を保存する，すべての強制拡大で保存される，数学的対象の重要な例の一つである．

思いつくままに挙げてみたが，「... 現代の数学者たちとも会話を始めようとしている」と上で書いたことの感覚が伝わったかどうか…

ハウスドルフのパラドックスやゲーデルによる，射影集合の正則性に関する結果でもそうだが，ハウスドルフの撒いた種は，現代の研究で (集合論の公理系からの) 独立性の結果として，実を結ぶことが多いように思える．通常の数学では，集合論の公理系のフラグメント内で安定して証明できる命題たちに注意を集中することが多いので，その視点から見ると，これは奇異に思えるかもしれないが，独立性命題は，旧来の公理系がまだ捉えきれていない，数学的無限の持つ，深い真理を内包しているものになっていると考えられるので，その意味で，それ自身として重要である

4. 数学の教科書としての，[Hausdorff 1914[15]] と，[Hausdorff 1927[16]]

第 2 節で述べたことからも，読み取れると思うが，[Hausdorff 1914[15]] と，[Hausdorff 1927[16]] は，現代の視点からは，歴史的教科書，という位置付けのされるべき書物であり，特に，現在の読者が，初心者が読む教科書として，これらの本の前半を読むことは，あまり推奨できない (記号法も，現在のスタンダードとは，かなり異なるので，歴史的文献を数学史の興味から読むときの助けになること以外では，役に立たない)．この状況は，遅くとも，不完全性定理[10] の発表された 1931 年以降には成立しているはずなので，1949 年に岡潔が講義のための参考として [Hausdorff 1927[16]] を選んだ (数学の入門的講義なので，この本の前半が主に問題となっていたはずである) というのは大変に奇異に思えたのである．しかし，よく考えてみると，その当時入手できた，研究書でなくて，一般向けの集合論の教科書で，集合論の基礎を，(その当時，既に得られていた知見から可能だった範囲での) 妥当性を持つやり方で，扱っているものは，全くなかったかもしれない．ブルバキの集合論の第 1 版が発刊されるのは 1950 年代だったが，これが，(当時としても) 時代錯誤的な問題を持つものであったこと (不完全性定理について全く触れられていないし，ツェルメロ＝フレンケルでなく，[Zermelo 1908[38]] の体系に準ずるものが公理系として用いられている) は，マサイヤスも [Mathias 1992[25]] で指摘しているところである．

1960 年代になると，強制法の導入により，集合論は更に大きな変貌をとげることになるのだが，この変貌の意味は不完全性定理の理解なしには，正しく把握できないだろう．[Halmos 1974[12]] は，第 2 節で述べたような，集合論の外の自然数と，体系の中での自然数の問題は回避しているように見えるが，不完全性定理についての言及は全く見られない．[Halmos 1974[12]] で，もう少し本格的な教科書として推薦されている [Suppes 1960[32]] も，不完全性定理の不在については同様である．同じ著者の一階の論理と集合論を扱った [Suppes 1957[31]] では，完全性定理と第 1 不完全性定理について述べられているが，第 2 不完全性定理の集合論の基礎に対する意味については，全く触れられていない．

[松坂 1968[26]] は，[Hausdorff 1927[16]] の前半と，[Hausdorff 1914[15]] の位相空間の章を “モダン” に書き直したような感じの本で，この本が書かれた時点で最新の結果だったコーエンの連続体仮説の独立性についての言及もあるが，この本の 295 ページには，「これらの集合論の公理系に矛盾がないことを証明するのは，数学基礎論の問題で，今日まだ確定的に解決されていない」という驚くべき記述もある (もちろん，これは，不完全性定理と照しあわせてみれば，ナンセンス以外の何ものでもあり得ない．なお，本拡張版では，補足として付け加えた，第 6 節で，これに関連したことについて，もう少し詳しく解説している．)．

*21) 基数 κ が，弱到達不可能であるとは，κ が，正則な極限基数であることである．

*22) カナモリ[21] は，ゲーデルがこれらの用語を継承していることから，ハウスドルフの [Hausdorff 1907[13]]，[Hausdorff 1909[14]] を熟知していたに違いない，と述べている．

このように，集合論を矛盾なく建設する目的から，現代数学の他の諸部門と同様に，集合論を公理的に展開しようとしたのが，Zermelo, Fraenkel von Neumann, Gödel などの**公理的集合論**である．(最近ではさらに Grothendieck や MacLane などの考案もある．) これらの集合論の公理系に矛盾がないことを証明するのは，数学基礎論の問題で，今日まだ確定的に解決されてはいないが，そのように展開された公理的集合論に少なくとも経験上矛盾は生じていないのである．

— [松坂 1968[26]]

以上，スッペスの [Suppes 1957[31]] を除くと，どの教科書も，論理体系への言及は全くなく，順序数や基数については，[Suppes 1960[32]] を除くと，どれも，それを読んだだけでは，整合的な導入ができるのかどうかは，不明な書き方になっている *23)．筆者は，2007 年に行なった学部学生向けの講演で，順序数と超限帰納法に関連する話題に触れたときに，同席されていた上野健爾先生から，「それはきちんと定式化できるものなのですか」と質問されて面喰った記憶がある．しかし，彼が，ここで挙げたような教科書で「集合論」を習っていたのだとすると，そのような感想が出てきたとしても，何の不思議もないと言えるかもしれない．順序数や基数については，[彌永 2002[18]] の 38 ページに，「濃度や順序数の一般論はその後それほど利用されることもなく，進展もなかった」と書かれるなど，(日本では?) 今だに，無理解と継子扱いに曝されているようである．

ハウスドルフの [Hausdorff 1914[15]] や [Hausdorff 1927[16]] は，一般の数学者には難しいことを教えるべきでない，と思った後世の著者たちや，集合論や数理論理学についての正しい展望を持たない著者たちによって，お手本として，間違った踏襲のされかたをしたことで，深刻な問題のある教科書が量産される，きっかけとなってしまっていたかもしれない．

しかし，上でも見たように，ハウスドルフにとっての集合論は，数学の研究の前線を包含するアクティヴな学問であった．その視点を現代に平行移動したとすれば当然なされたであろう，一般向けの集合論や位相に関する教科書の，現代の集合論研究の視点からの修正は，今でもほとんどなされていないように見える．

集合論が，多くの場合，他の数学の共通語彙を提供する「基礎数学」にすぎないものとして，誤解された／され続けていることも，このような問題のある教科書の量産に繋がっているのではないかと思われる．

5. 再論: ロジックの不在について

ここで議論しようとしている「ロジックの不在」は，「論理の欠如」の意味では，勿論ない．

ロジック (logic) = (数学での) 論理に関する，考察／研究

と規定したときの，そのような考察／研究の不在について言っているのである．

ハウスドルフは，フレンケルに宛た 1924 年 6 月 9 日の葉書で，「あなたの本があるので，これから書こうとしている本の第 2 版 ([Hausdorff 1927[16]] のこと) で，私の今の関心とはなっていない，公理化などの幾つかの重要な事項を，そちらに任せられるので大変助かる」と言っている (文言は筆者の意訳である)．

Für die freundliche Dedication der 2.Auflage Ihrer „ Einleitung i. d. Mengenlehre “ sage ich Ihnen herzlichen Dank, zugleich mit bestem Glückwunsch zu dem buchhändlerischen Erfolg Ihres Werkes. Sie haben mir für die 2. Aufl. meines Buches (die ich gänzlich neu bearbeiten will) einen grossen Dienst geleistet, insofern ich für verschiedene wichtige Dinge, die mir nicht liegen, auf Ihre ausgezeichnete Darstellung verweisen kann, z. B. für die Axiomatik (in der Sie einen wesentlichen Fortschritt über Zermelo hinaus erzielt haben betr, das Axiom der Aussonderung) und für die Behandlung der Antinomien.

— ハウスドルフのフレンケルに宛た，
1924 年 (大正 13 年) 6 月 9 日付けの葉書[17]

確かに，ハウスドルフの [Hausdorff 1914[15]] や [Hausdorff 1927[16]] が書かれた時点では，「集合論の基礎付け」は，誰かがやってくれればいいこと，と思えることだったかもしれない．しかし，不完全性定理の確立された 1931 年以降には，そのような “分業” は成立し得なくなっている．このことは，1931 年の時点では，まだ，可能性としてあるだけで，はっきりとは認識できなかったかもしれないが，遅くとも，1930 年代後半にゲーデルによって選択公理や一般連続体仮説の相対的無矛盾性証明がなされた段階では，このことは明らかになっていて，そのことは集合論の基礎付けの専門家でない人にとっても，理解可能であったはずである．

ハウスドルフは，亡くなる直前までアクティヴに研究を続けていたが，ナチスドイツを脱出することができず，1942 年に強制収容のための移動の命令を受けとった後，家族と共に服毒自殺を遂げている．

*23) [Suppes 1960[32]] では，順序数は，現在，英語圏ではスコットのトリックと呼ばれることもある手法 (脚注 19 を参照) を使った導入がされており，現在では標準的となっているフォン・ノイマンによる順序数の導入法 (本特集の酒井拓史氏による記事[44] を参照) を知っている者には，ひどく煩雑なものに見える．

これは，個人の悲劇で，ドイツと，それに連なる世界の悲劇だったが，数学にとっての悲劇でもあった．ハウスドルフは，1930 年代にはもう歳をとりすぎていて，いずれにしてもゲーデルの結果は理解できなかった，と言う人もあるが [*24)]，もし，彼が，1940 年代を生き延びることができていたとして，ゲーデルの 1930 年代後半の仕事 (ゲーデルの相対的無矛盾性の結果をまとめた赤い本[11)] は，1940 年にアメリカで出版されている) から，集合論 (= 数学) と数理論理学の分離不可能性に気付いて，研究方向，ないしは，集合論の教科書のありかたの，軌道修正をしていた，ということはなかっただろうか．もし，そういう歴史の流れがあったとすれば，彼の後の世の，一般向けの集合論の教科書は，上で見たような惨状を呈さずに済んでいたのではないだろうか．

最後に，個人的なコメントになってしまうが，本稿の筆者は，上で言ったような，「もう歳をとりすぎていて，いずれにしても ... の結果は理解できなかった」と言われてしまうかもしれない年齢に，だんだんと近づいているので，その意味でも，この，高齢でも，まだ軌道修正ができていたかもしれないハウスドルフを見て，心の励みとすることができなかったことは，大変に残念に思うものである．

6. 補足

以下で，紙数の関係で『数理科学』に寄稿した版には収録できなかった説明や議論を補足しておきたいと思う．

6.1 一階の論理と完全性定理

現在では，一階の論理で記述されたツェルメロ＝フレンケルの公理系 (ZF) に選択公理を加えたもの (ZFC) が標準的な集合論の公理系 (の一つ) と看做されている．

一階の論理は，[Hilbert-Ackermann 1928[43)]] で確立された形式的論理体系である．ツェルメロ＝フレンケルの公理系が，一階の論理で記述されている，とは，公理系 ZF (無限個の公理を含み，現在では，有限の公理からなる公理系で置き換えられないことが，上でも既に触れた，Lévy-Montague の反映定理の系として結論できることが知られている) の具体的な外延が確定できた，ということだが，一階の論理は，命題を記述するための言語であるだけでなく，形式的証明の体系を与えるものでもあるので，それにより，「集合論で証明できる命題」や「集合論の無矛盾性」というような概念が初めて明確に規定されたことになる．しかし，[Hilbert-Ackermann 1928[43)]] が書かれたときには，そこで導入された証明の体系での形式的推論が，論理的な推論の可能性をすべて包含しているかどうかはまだ示されていなかった．これが示されたのは，ゲーデルの [Gödel 1930[42)]] においてだった．ゲーデルのこの結果は，完全性定理とよばれている．

ちなみに，完全性定理の証明では，論理の解釈を考察しなくてはならなくなるので，そのために，何らかの "集合論" の中で議論しなくてはならなくなる．このため，集合論の基礎付けに関しては，ある種の，回避不能な循環が起ってしまうのだが，現在では，完全性定理の証明は，集合論の非常に弱い部分 (フラグメント) の上で実行できることが分っており，この循環の (小ささの) 正確な評価も (このフラグメントの評価という形で) できている．

6.2 不完全性定理

完全性定理によって，一階の論理の上に構築された公理的集合論 ZFC が何か，ということの現代的評価が可能になり，「集合論で証明できる命題」や，「集合論の無矛盾性」というような概念が初めて明確に規定された．つまり，集合論で証明できる命題とは，一階の論理の証明の体系上の公理的集合論で，形式的証明を与えることのできる命題で，集合論の無矛盾性とは，この体系で，例えば，$\exists x\,(x \not\equiv x)$ という閉論理式の形式的証明が，存在しないことである [*25)]．また，この体系，ないしは，ZFC がそうでないにしても，これの何らかの拡張が数学の命題の真偽を決定してくれるようになっていてほしい (集合論の公理系の完全性)．

集合論が矛盾するか，しないか，矛盾していないなら，(もし必要なら) これを更に拡張して，上の意味で

*24) ハウスドルフより 3 才若かったツェルメロは，最初，ゲーデルの不完全性定理を受け入れられず，1931 年のバート・エルスナーでのドイツ数学会の集会で，ゲーデルと激しく衝突して，ゲーデルが，最後には説明の匙を投げた，というのは有名な話である．しかし，エビングハウス教授[5)] によると，1933/1934 の冬学期には，ツェルメロは，数理論理学の講義に付随したセミナーで，(恐らく自分自身の理解のために) ゲーデルの不完全性定理を取り上げている，ということである．

*25) この閉論理式の否定 $\forall x\,(x \equiv x)$ は，論理の体系に同等性の公理の一つとして含まれているか，あるいは論理体系体系で (数学的な公理を付加しなくても) 証明できる (一階の論理の証明の体系は，様々な導入の仕方があるので，それに依存して，このどちらかになっている)．

完全なものにできないか，というのは，一階の論理，という有限的な記号の操作の体系に関連した問題なので，直観的には，絶対に白黒のつくもののであるように思えてしまうが，実は，これが，そうではないことが，ゲーデルの 2 つの不完全性定理[10] として証明されている [*26)]．

第 1 不完全性定理． 初等数論の展開できるような，任意の具体的に与えられた公理系は，それが無矛盾なら，完全でない．つまり，その公理系の言語で記述できる命題 φ で，φ も φ の否定もこの体系から導けないようなものが存在する．

第 2 不完全性定理． 初等数論の展開できるような，任意の具体的に与えられた公理系 T では，一階の論理の証明の体系を，(そこで展開することのできる初等数論を使って) 体系の中に再現することができる．また，T をコード化することで，T の理論の中に，(集合論で $\mathbb{N}$ に対応する対象 ω を作ったのと同じように) T に対応する対象 $\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner$ を構成することもできるので，この対象 (公理系) が，T で再現された一階の論理の意味で無矛盾である，という命題を T の言語での論理式として書き下すことができる．この論理式を $consis(\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner)$ と表わすことにすると，T が無矛盾である限り，T では，$consis(\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner)$ は証明できない．

以上が第 2 不完全性定理の内容であるが，このことは，もう少し正確には，次のように言い換えることもできる: 初等数論の展開できるような，任意の具体的に与えられた公理系 T で，上のような論理式 $consis(\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner)$ を考えることにすると，もし T で $consis(\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner)$ が証明できたとすると，この証明を変形して，T からの $\exists x\,(x \neq x)$ の証明が得られてしまう．つまり，T が矛盾することが結論できてしまう．

このような，ある程度正確な記述をすると，この定理の意味がかえって分りにくくなってしまうかもしれない．ここでも，難しすぎることは，言わずに，わざと嘘を教える，という “教育的配慮” が働くため，第 2 不完全性定理の解説は，多くの場合，ここでとは違った言い方の，厳密に言うと正しくない表明として説明されることが多い．この定理の意味することを巷で言われる，この第 2 不完全性定理の嘘の説明と関連づけるために，次の補足説明を加えておくことにする:

T を再び，初等数論の展開できるような，任意の具体的に与えられた公理系とする (例えば，T を ZFC とする)．

今，T が矛盾しないことの証明が得らえたとしてみる．このとき，この証明は，ヒルベルトの言ったような，確定的な立場からの証明になっているはずなので，T が ZFC のような数学的な議論をすべて内包するような体系だとすると，当然，この証明は，T の理論の中での，論理体系に関する証明に，翻訳できるはずである．この翻訳の結果得られるのは，T からの $consis(\ulcorner\ulcorner T\urcorner\urcorner)$ の証明であるが，第 2 不完全性定理により，このような証明があることから，T からの矛盾の証明が得られてしまう．対偶をとると，T が矛盾していないときには，そのことを，T での数学議論に翻訳できるような論法で，T の無矛盾性を証明することはできない．これが，本文で，[松坂 1968[26]] の 295 ページに書かれたコメントが，ナンセンスである，と書いたときの内訳である．

そういうわけで，集合論の無矛盾性は，原理的に証明できない，と言いきってしまっていいわけだが，これは，集合論の矛盾が証明された，ということでは，全然ない．また，証明できないにしても，集合論が矛盾していないことの，状況証拠のようなものをいくつも挙げることはできる．本文で触れた，Lévy-Montague の反映定理は，そのような状況証拠の一つと見ることも可能かもしれない．また，この矛盾の証明ができないことの難易度 (consistency strength) が大きいことは，数学の未解決問題に，十分に短い (たとえば，太陽に含まれる水素原子の数よりずっと小さな行数で書ける)，現実的な証明をつけられる可能性が高くなる，ということでもある (ゲーデルの加速定理 — [渕野 2018[41]] を参照)．

6.3 相対的無矛盾性と独立性

第 2 不完全性定理により，集合論を含む (無矛盾であることが予想される) 十分に強い公理系の無矛盾性が原理的に (確定的 (finitary) な方法で) 証明できないとしても，その ような公理系の 2 つ T, T' について，T が矛盾しないと (仮定) すると，T' も矛盾しない，という関係が，確定的な方法で証明できる，という可能性は残っている．このような関係が成り立つとき，T' は，T 上相対的に無矛盾である，という．

T' が T を拡張する公理系になっていて，T' が T 上相対的に無矛盾であることが証明できたときには，T' が，実は T と同値な公理系になっている場合と，

*26) ここでの議論を裏付けるためには，厳密に言うと，ロッサー (J,Barkley Rosser) による改良が必要となるので，最近では，ゲーデル＝ロッサーの不完全性定理と呼ばれることも多い．

そうではなくて，T' は T を真に拡張する体系になっている場合がありえる．

特に，T' が T に一つの新しい公理 φ を付け加えて得られる公理系の場合には，T から，φ が証明できるとき，T と T' は同値な体系となり，そうでないときには，T' は，T を真に拡張する体系となっている．後者の状況が，確定的に証明できるのは，T に φ の否定 $\neg\varphi$ を付け加えて得られる公理系 T'' が T 上相対的に無矛盾であることが，確定的に証明できる，ちょうどそのときである．ここでのような，T' と T'' が T 上相対的に無矛盾なとき，つまり，(T が無矛盾である，という仮定から) φ が T から証明できないことと，$\neg\varphi$ が T から証明できないことの両方が証明できるとき，φ は T 上独立である (ことが証明された) という．

連続体仮説 (酒井拓史氏の論説[44] を参照) は，ZFC 上で独立である (ことが証明されている) 命題の一つである．

6.4 順序数と超限帰納法

これについての入門的な解説も，酒井氏の論説[44] を参照されたい．より詳しい解説は，[渕野 2007[40]] でも述べられている．

参考文献

1) Jörg Brendle, Paul Larson and Stevo Todorcevic: Rectangular axioms, perfect set properties and decomposition, Bulletin de l’ Académie serbe des sciences et des arts − Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématiques, Vol.CXXXVII, No.33, (2008) 91–130.
2) Georg Cantor: Briefe (書簡集), Eds.: H. Meschkowski and W. Nilson, Springer-Verlag (1991).
3) Munibur Rahman Chowdhury: Hausdorff’s Grundzűge der Mengenlehre, GANIT J. Bangladesh Math. Soc. 34 (2014), 1–4.
4) R. デデキント; 渕野 昌 (訳／解説): “数とは何かそして何であるべきか”, (Richard Dedekind: „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (1872) と „Was sind und was sollen die Zahlen“ (1888) の日本語訳および解説), ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2013/2021), 1–336.
5) Heinz-Dieter Ebbinghaus (in cooperation with Volker Peckhaus): Ernest Zermelo, An Approach to His Life and Work, Springer-Verlag, (2007).
6) A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin, (1928).
7) 渕野 昌: 間違いと真理: 解析学と集合論の場合, 数学セミナー, Vol.57, No.9, 36–42, (2018). 記事の拡張版: https://fuchino.ddo.jp/articles/susemi2018-x.pdf
8) ______: 無限と有限の硲 (はざま) にて，数学基礎論若手の会 2021 での講演．講演のスライズのプリンター版: https://fuchino.ddo.jp/slides/wakate-fuchino-2021-12-pf.pdf
9) ______: ハウスドルフの集合論と位相空間論の誕生, このテキストの最新版．https://fuchino.ddo.jp/misc/hausdorff.html
10) Kurt Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, (1931) 173–98.
11) _________: The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Princeton University Press (1940).
12) Paul R. Halmos: Naive Set Theory, reprinted by Springer-Verlag (1960/1974).
13) Felix Hausdorff: Untersuchungen über Ordnungstypen, IV,V. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse 59, (1907), 84–159, 1907.
14) _________: Die Graduierung nach dem Endverlauf, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse 31 (1909), 295–334.
15) _________: Grundzüge der Mengenlehre, Veit& Comp., Leipzig (1914).
16) _________: Mengenlehre, de Gruyter (1927/1935).
17) _________: Gesammelte Werke, Band III, (全集第 III 巻), Springer-Verlag, (2008).
18) 彌永昌吉: ガロアの時代ガロアの数学, 第二部 数学篇, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002).
19) Akihiro Kanamori: The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen, The Bulletin of Symbolic Logic Volume2, Number1, (1996), 1–71.
20) _______________: The Higher Infinite, Springer-Verlag (1994/2003).
21) _______________: The Set Theory in Gödel’s Resultate Grundlagen, preprint.
22) Peter Koepke: Metamathematische Aspekte der Hausdorffschen Mengenlehre, in: Felix Hausdorff zum Gedächtnis Band I: Aspekte seines Werkes, Ed.: Egbert Brieskorn, Vieweg+Teubner Verlag, (1996).
23) Peter Koepke, Vladimir Kanovei: Anmerkungen der Herausgeber (編集者のリマーク), [Hausdorff 2008 [17]] に収録.
24) Casimir Kuratowski: Sur la notion de l’ordre dans la Théorie des Ensembles, Fundamenta Mathematicae, Vol.2 No.1, (1921) 161–171.
25) A.R.D. Mathias: The Ignorance of Bourbaki, the Mathematical Intelligencer Vol.14, No.39 (1992), 4–13.
26) 松坂和夫: 集合・位相入門, 岩波書店 (1968).
27) Gregory H. Moore: Early history of the generalized continuum hypothesis: 1878-1938, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol.17, No.4 (2011), 489–

532.
28) ______________: Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolution of Hilbert's Thought, Historia Mathematica 29 (2002), 40–64.
29) John C. Oxtoby: Measure and Category, Second Edition Springer-Verlag, New-York (1971/1980).
30) Ernst Steinitz: Algebraische Theorie der Körper, Journal für reine und angewandte Mathematik, 137 (1910), 167–309.
31) Patrick Suppes: Introduction to Logic, Van Nostrand Reinhold Company (1957).
32) ____________: Axiomatic Set Theory, Van Nostrand Company (1960).
33) 高瀬正仁: 評伝 岡潔 花の章，ちくま学芸文庫，筑摩書房 (2004/2022).
34) _______: 私信 (2021).
35) Wikipedia (ドイツ語版): Felix Hausdorff, https://de.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff
36) Teruyuki Yorioka: Distinguishing types of gaps in $\mathcal{P}(\omega)/fin$, Journal of Symbolic Logic, Vol.68, No.4, (2003) 1261–1276.
37) ______________: The diamond principle for the uniformity of the meager ideal implies the existence of a destructible gap, Archive for Mathematical Logic 44, (2005) 677–683.
38) Ernst Zermelo: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen, 65, (1908), 261–281. 日本語訳: 集合論の基礎に関する研究 I, [デデキント 2013/21[4]] に付録 B として収録.

追加文献 (拡張版での引用のために追加したもの):

39) 渕野 昌: フォン・ノイマンと公理的集合論，現代思想，(寄稿), 2013 年 8 月増刊号 (2013), 208–223. https://fuchino.ddo.jp/papers/vonNeumann-Mengenlehre.pdf
40) _____: 構成的集合と公理的集合論入門，in: “ゲーデルと 20 世紀の論理学 (ロジック) 第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007).
41) _____: 数学と集合論 — ゲーデルの加速定理の視点からの考察，科学基礎論研究，Vol.46, No.1 (2018), 33–47.
42) Kurt Gödel: ”Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls”. Monatshefte für Mathematik. 37 (1), (1930) 349 – 360.
43) David Hilbert and Wilhelm Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Springer-Verlag, (1928).
44) 酒井拓史，順序数と基数，数理科学，2022 年 6 月号 特集/集合・位相の考え方—数学の基礎をなす概念，to appear.

（ふちの・さかえ）