無限と有限の硲(はざま)にて

Sakaé Fuchino (**渕野 昌**)

Kobe University, Japan

https://fuchino.ddo.jp/index.html

(2021 年 12 月 12 日 (20:03 JST) printer version)

2021 年 12 月 3 日 (17:00–17:45 JST), 数学基礎論若手の会 2021

The following slides are typeset by upLATEX with beamer class, and presented on UP2 Version 2.0.0 by Ayumu Inoue running on an ipad pro (10.5inch).

The most up-to-date version of these slides is downloadable as
https://fuchino.ddo.jp/slides/wakate-fuchino-2021-12-pf.pdf

The subjects of the talk are related to the research supported by Kakenhi Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 20K03717

Berry's paradox revisited

(Berry の paradox の twitter verion)　全角１４０文字* 以内の日本語で定義できない数のうちの最小の数

歴史的背景

- 全角 140 文字以内の日本語表現は有限個しかない.
  - これらのうち数の定義となっているものも有限個だから (定義なので指定されている数は一意に決まる), それらの数の全体も有限個である (この有限集合は $\mathbb{N}$ の initial segment ではないかもしれないが, それはここでは問題にならない).
  - いずれにしても, そのような数の集まりに含まれない最小の数が取れるが, この数は, 上の文 (全角 29 文字) で定義できてしまう. これは矛盾でないか?

* Twitter の字数制限.

Berry's paradox revisited (2/3)

- 次の定理は，Berry の paradox と相似な構造を持っているように思える:

定理 1. 関数 $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で，原始帰納的でないが，具体的に計算できるようなもの (帰納的なもの) が存在する．

証明. 原始帰納的な関数を $f_0, f_1, f_2, \ldots$, と枚挙する (無限個ある!). $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，$f^*(n) := f_n(n) + 1$ により定義すると，これが求めるようなものになっている． □ (定理 1.)

- Berry の paradox でも，

(*) 140 文字以内で表わせる (有限個の) 日本語の語句を s_0, $s_1, \ldots, s_{n-1}$ と並べて，最初の s_0 から，1つひとつ調べていって，それがある数の定義になっているときには，その数をとり，そうでないときには，次に進む，という作業を行なうと，n 回のステップの後で，140 文字以内で表わせる日本語の語句で定義できる数の全体が，求まる．

Berry's paradox revisited (3/3)

(*) 140 文字以内で表わせる (有限個の) 日本語の語句を s_0, $s_1, \ldots, s_{n-1}$ と並べて，最初の s_0 から，１つひとつ調べていって，それがある数の定義になっているときには，その数をとり，そうでないときには，次に進む，という作業を行なうと，n 回のステップの後で，140 文字以内で表わせる日本語の語句で定義できる数の全体が，求まる．

- このプロセスのどこかで，語句：

(**) 全角１４０文字以内の日本語で定義できない数のうちの最小の数

が現れるが，ここでは，この語句の意味は，(まだ) 確定していないので，その段階では，読み飛ばされることになる．

- n ステップの後，"140 文字以内で表わせる日本語の語句で定義できる数の全体" が，確定した後で，(**) の解釈が決まるが，このときの解釈は，同じ語句 (**) の意味が，まだ確定していなかったときとは，異なり，(*) の結果を refer するものになっている．
- Cf. 定理 1 での，再帰的 vs. 具体的に計算可能

Is it really so?

(*) (有限個の) 日本語の語句を $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ と並べて，最初の s_0 から，１つひとつ調べていって，それがある数の定義になっているときには，その数をとり，そうでないときには，次に進む，という作業を行なうと，n 回のステップの後で，140 文字以内で表わせる日本語の語句で定義できる数の全体が，求まる．

- ... と言ったが，実は， このプロセスは，そもそも，実行可能ではないのではないか？
- 以下のような例が，(*) の実行可能でないことの確証となっている:

有限時間で，どの数の定義となっているかが，判定できる語句

$R(3,3,3,3)$

- $R(3,3,3,3)$:　n 個の頂点を持つ完全グラフの頂点の，4 色塗り分けに対し，常に，少なくとも 3 点が同じ色で塗られた部分グラフが，存在するような，最小の n.

- $51 \leq R(3,3,3,3) \leq 62$ が知られている．62 個未満の頂点を持つグラフの 4 色塗り分けは，有限個しかないから，原理的には，この有限個のグラフを，すべてチェックすれば，$R(3,3,3,3)$ の値は，確定する．特に，R(3,3,3,3) は，ある数を定義する表現となっている．

- しかし，この，有限個の場合の数は，しらみつぶしに調べるには大きすぎる．数学的な何らかの証明で，この数が確定する可能性はあるが，それが実現するか，実現するとしてもいつ実現するかは，何とも予測できない．

数の定義ではあるが，どの数が定義されているのかは不明な語句

Hadwiger-Nelson 数 $\chi(\mathcal{U})$

- Hadwiger-Nelson 数 $\chi(\mathcal{U})$: $\mathbb{R}^2$ のすべての点を頂点として，

  2 点が隣接している $:\Leftrightarrow$ 2 点の距離が 1

  により，てグラフ $\mathcal{U}$ (unit distance graph of the plane) を定義したとき，このグラフの彩色数 (chromatic number)

- $5 \leq \chi(\mathcal{U}) \leq 7$ が知られている．
- この数を “しらみつぶし” で決定しようとすると，$2^{2^{\aleph_0}}$ 個の彩色を調べなければならなくなる．
- 実は，弱い選択公理の仮定のもとでは，$\chi(\mathcal{U}) > n$ なら，$= n$ でないことの反例となる有限の部分グラフの存在することが，示せる (de Bruijn-Erdős の定理)．したがって，調べなくてはいけないものは，可算無限個に落せるが，この一般定理には，実際に選択公理が必要となるので (Shelah-Soifer)，そのことは，$\chi(\mathcal{U})$ の値が，集合論の公理に依存する可能性さえ，示唆する．
- “$4 \leq \chi(\mathcal{U}) \leq 7$” は比較的簡単に証明できる．

数の定義となっているかどうかが決定できない語句

PA からの $0 \equiv 1$ の証明のゲーデル数のうち最小のもの

- もし，この語句が数の定義となっていないとして，そのことが確定的に証明できるなら，この証明から，不完全性定理の証明をたどって，“$0 \equiv 1$ の証明のゲーデル数のうち最小のもの” が，具体的に作れてしまう．これは矛盾である．
- そうでないとすると，この文言は，ある数の定義となっていなくてはならないが，この場合には，その数が具体的に決定した瞬間に，PA を含む全数学は，(それが矛盾する，という) dead end に陥ってしまう．

  そういうことがないかぎり，この数が決定されることは，有り得ない．

140 文字以内で定義できる数の全体の決定 とそれに含まれない最初の数

- 以上のような例を見ると，

(*)　(有限個の) 日本語の語句を $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ と並べて，最初の s_0 から，１つひとつ調べていって，それがある数の定義になっているときには，その数をとり，そうでないときには，次に進む，という作業を行なうと，n 回のステップの後で，140 文字以内で表わせる日本語の語句で定義できる数の全体が，求まる．

は，作業時間の物理的な実現可能性や，リソースの制限を，すべて無視したとしても，机上の空論でしかないように思える．

- しかし，

(**)　全角１４０文字以内の日本語で定義できない数のうちの最小の数

にも，次のような決定的な問題が絡んでいることが，わかる．

真理の定義不可能性 (Tarski)

定理 2. (Tarski の真理の定義不可能性定理)　T を，初等算術の十分に大きな部分を含む，具体的に与えられた理論とする．T が無矛盾なら，T の言語 $\mathcal{L}$ の論理式 $\chi = \chi(x)$ で，すべての $\mathcal{L}$-文 φ に対し，

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi(\ulcorner \varphi \urcorner) \qquad \cdots (\dagger)$$

が，成り立つようなものは，存在しない．

- ($\dagger$) となるような論理式 χ を，「真理の定義」と呼ぶことにすると，この定理は，真理の定義の非存在を，主張するものとなっている．

定理 2. の証明:　$\chi = \chi(x)$ を，任意の $\mathcal{L}$-論理式として，$\psi := \neg\chi$ とする．このとき，Fixed-point Theorem (Diagonal Lemma) により，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる $\mathcal{L}$-文 φ が存在する．つまり，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ だから，χ は，真理の定義でない．

□ (定理 2.)

真理の定義不可能性 (Tarski) (2/2)

定理 2. (Tarski の真理の定義不可能性定理)　T を，初等算術の十分に大きな部分を含む，具体的に与えられた理論とする．T が，無矛盾なら，T の言語 $\mathcal{L}$ の論理式 $\chi = \chi(x)$ で，すべての $\mathcal{L}$-文 φ に対し，

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi(\ulcorner \varphi \urcorner) \qquad \cdots (\dagger)$$

が，成り立つようなものは，存在しない．

- Berry の paradox での語句

(**)　全角１４０文字以内の日本語で定義できない数のうちの最小の数

を，形式的体系 (たとえば PA) での自然数の定義の自然言語への翻訳だと思って，もとの厳密な論理式が何であるか考えてみると，その記述には，Tarski の定理でのような，真理の定義が，必要であることが分かる．

- ところが，真理の定義は存在しないので，語句 (**) の厳密な記述も，存在し得ない．

集合論と真理の定義不可能性 — 準備

- Tarski の真理の定義不可能性定理 (定理 2.) は，集合論でも煩雑な状況の原因になりうる． 以下でこれについて見てみる．
- 累積的階層 (ノイマン階層) とは，以下のように，帰納的 (再帰的) に定義される集合の ($\subseteq$ に関する) 増加列 $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ のことである (ただし，On で，すべての順序数からなるクラスを表わしている).
  - $V_0 := \emptyset$;
  - $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$;
  - 極限順序数 γ に対しては， $V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$.
- 集合 c が， 推移的である， とは， 任意の $a \in b \in c$ に対して， $a \in c$ が， 成り立つことである． これは， 任意の $b \in c$ に対し， $b \subseteq c$ が成り立つこと， と言い換えることもできる．

補題 3. $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ は， $\subseteq$ に関する上昇列で， 各 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は， 推移的である．

集合論と真理の定義不可能性 — 準備 (2/7)

補題 3. $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ は，$\subseteq$ に関する上昇列で，各 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は，推移的である．

証明. α に関する帰納法で示す．

- $V_0 = \emptyset$ が，推移的であることは，無内容的 (vacuouly) に成り立つ．
- V_α を，推移的として，$a \in V_\alpha$ なら，$a \subseteq V_\alpha$ だから，$a \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ である．したがって，$V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ である．$a \in b \in V_{\alpha+1}$ なら，$a \in b \subseteq V_\alpha$ だから，$a \in V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ となり，$V_{\alpha+1}$ も推移的である．
- γ が，極限順序数で，$\langle V_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ が，$\subseteq$ に関する上昇列で，各 V_α が，推移的であることが示されているなら，V_γ の定義から，$\langle V_\alpha : \alpha \leq \gamma \rangle$ が，$\subseteq$ に関する上昇列となり，V_γ が，推移的であることも，明らかである．

□ (補題 3.)

- 次の主張は，**基礎の公理** と同値であることが証明できる．

すべての a に対し，ある $\alpha \in \mathrm{On}$ で，$a \in V_\alpha$ となるものが，存在する．つまり，$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha = \mathrm{V}$ である．

集合論と真理の定義不可能性 — 準備 (3/7)

- 以下では，任意の集合 M を，集合論の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon = \{\varepsilon\}$ に対する $\mathcal{L}_\varepsilon$-構造 $\langle M, \in \cap M^2 \rangle$ と考える． M 上の二項関係 $\in \cap M^2$ は，簡単のために，$\in$ と表わすことが多い．
  - $\alpha \in \mathrm{On}$ に対する V_α もこのような構造と考える．
- 基数 κ が，到達不可能であるとは，κ は正則基数で，すべての $\mu < \kappa$ に対し $2^\mu < \kappa$ となる (冪に関して閉じている) ことだった．

命題 4. κ を，到達不可能基数とするとき，“$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$” が，成り立つ．

系 5. 到達不可能基数の存在は，(ZFC が無矛盾である限り) ZFC で証明できない．

証明. もし ZFC で到達不可能基数の存在が証明できたとすれば，命題 4. により，ZFC (より正確には，ZFC に対応する論理式のコードの集合 $\ulcorner\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner\urcorner$) のモデルの存在が証明できるから，$consis(\ulcorner\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner\urcorner)$ の証明が得られるが，不完全性定理により，このことから ZFC が矛盾することが帰結されてしまう． (系 5.)

集合論と真理の定義不可能性 — 準備 (4/7)

- κ を非可算な正則基数とするとき，$C \subseteq \kappa$ が closed unbounded (club) である，とは，
  - 各 $\alpha < \kappa$ に対し，$\beta \in C$ で，$\alpha \leq \beta$ となるものがある (unbounded);
  - すべての極限順序数 $\gamma < \kappa$ に対し，$C \cap \gamma$ が，γ で unbounded なら，$\gamma \in C$ である (closed),

  となることだった．
- X を集合とするとき，$\kappa = \mathrm{cf}(|X|)$ として，X の部分集合の，($\subseteq$ に関する) 上昇列 $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ が，X の filtration であるとは，
  - すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|X_\alpha| < |X|$ である;
  - 極限順序数 $\gamma < \kappa$ に対し $X_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が成り立ち (連続性),
  - $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ となる　ことである．
- 集合 X, Y, $X \subseteq Y$ に対し $X \prec Y$ とは，$\langle X, \in\rangle \prec \langle Y, \in\rangle$ のことである．つまり，(集合論の中で) すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, s_{n-1})$ と，$a_0, \ldots, a_{n-1} \in X$ に対し，$\langle X, \in\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\Leftrightarrow$ $\langle Y, \in\rangle \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$　となることである．

補題 6. X 集合として $\kappa = \mathrm{cf}(|X|) > \omega$ とする．このとき任意の X の filtrations $\langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$, $\langle Y_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$C := \{\alpha < \kappa : X_\alpha = Y_\alpha\}$ は，κ の club subset である．

証明.
- C は，closed である： $\gamma < \kappa$ で，$C \cap \gamma$ が γ で unbounded なら，$X_\gamma = \bigcup_{\alpha \in C \cap \gamma} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in C \cap \gamma} Y_\alpha = Y_\gamma$ だから，$\gamma \in C$ である．
- C は，unbounded である： 任意の $\alpha < \kappa$ に対し，$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ を，$X_{\alpha_1} \subseteq Y_{\alpha_2} \subseteq X_{\alpha_3} \subseteq Y_{\alpha_4} \subseteq \cdots$ となるようにとり，$\beta = \sup_{n \in \omega} \alpha_n$ とすれば，この順序数の列の定義と，κ に関する仮定から，$\alpha < \beta < \kappa$ で，$X_\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{\alpha_{2n+1}} = \bigcup_{n \in \omega} Y_{\alpha_{2n}} = Y_\beta$ となる．つまり，$\beta \in C$ である．

□ (補題 6.)

定理 7. κ を到達不可能基数とするとき，$D := \{\alpha \in \kappa : V_\alpha \prec V_\kappa\}$ は，κ の club subset である．

証明.

- D が closed であることは，Elementary Chain Lemma からよい．
- κ が，到達不可能基数であることから，$\langle V_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ は，V_κ の filtration である．モデル理論での Downward Löwenheim-Skolem Therorem と，Elementary Chain Lemma から，V_κ の elementary substructure による filtration $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ が存在するが，補題 6. により，$\{\alpha \in \kappa : V_\alpha = M_\alpha\} \subseteq D$ は，κ の club subset である．特に，この集合は，κ で unbounded だから，D も，κ で unbounded である．

□ (定理 7.)

集合論と真理の定義不可能性 — 準備 (7/7)

系 8. ZFC $+$ “ ‘$V_\alpha \models$ ZFC’ となる α が存在する” が無矛盾なら，この理論から，到達不可能基数の存在は証明できない．

証明. $T :=$ ZFC $+$ “$V_\alpha \models$ ⌜⌜ZFC⌝⌝ となる α が存在する” として，T から到達不可能基数の存在が証明できるとして，矛盾を示す．

- 仮定から，到達不可能基数が存在するから，κ を最小の到達不可能基数とする．このとき，V_κ は，命題 4. と定理 7. により，T のモデルになっている．

- したがって，仮定から，V_κ には，到達不可能基数が存在しなくてはならないが，この基数は，V でも到達不可能基数となるが，$\mathrm{On}^{V_\kappa} = \kappa$ だから，これは，κ の最小性に，矛盾である． □ (系 8.)

- κ を到達不可能基数とすると，V_κ は，集合論のモデルで，$V_\alpha \prec V_\kappa$ が club many な $\alpha < \kappa$ に対して成り立つ．しかし，

定理 9. 具体的に定義可能な基数 κ に対し，$\underbrace{V_\kappa \prec \mathrm{V}}$ は成り立たない．

このことを，κ は correct であると言うことにする

証明. 定理の正確な意味を確認してみると，このような κ が存在するとすると，真理の定義が得られてしまうことが，分かるから，Tarski の真理の定義不可能性の定理に矛盾する．

more details

□ (定理 9.)

"問題" に戻る

Lévy-Montague Reflection Theorem

- 集合の上昇列 $\mathcal{S} = \langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ が，一般化された累積的階層であるとは，
  - $\mathcal{S}$ は，集合の $\subseteq$ に関する上昇列で，
  - $\mathcal{S}$ は，連続，つまり，すべての極限順序数 γ に対し $M_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$ が成り立ち， ▷ $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} M_\alpha = \mathrm{V}$ となること，とする．
- ノイマン階層 $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ や，$\langle V_{\aleph_\alpha} : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ は，一般化された累積的階層の例である．
- 任意の集合 M と，$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ に対し，φ が，M 上 absolute である とは，すべての $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，"$M \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$" $\leftrightarrow$ $\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ が，成り立つこと，とする．

Theorem 10. (Lévy-Montague Reflection Theorem) 任意の一般化された累積的階層 $\langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ と，具体的に与えられた $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ に対し，club なクラス $C_\varphi \subseteq \mathrm{On}$ で，すべての $\alpha \in C_\varphi$ に対し，φ が，M_α 上 absolute になるものが，存在する．

証明は，例えば，[fuchino1] を，参照．

Lévy-Montague Reflection Theorem (2/2)

定理 10. (Lévy-Montague Reflection Theorem)　任意の一般化された累積的階層 $\langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ と，具体的に与えられた $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ に対し，club なクラス $C_\varphi \subseteq \mathrm{On}$ で，すべての $\alpha \in C_\varphi$ に対し，φ が，M_α 上 absolute になるものが，存在する．

証明は，例えば，[fuchino1] を，参照．　□

系 11.　任意の一般化された累積的階層 $\langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\rangle$ と，具体的に与えられた $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ に対し，club なクラス $C \subseteq \mathrm{On}$ で，すべての $\alpha \in C$ に対し，$\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ のすべてが，M_α 上 absolute になるものが，存在する．

証明．　x_0 を $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ に現れない変数記号として，φ^* を，

$$
\begin{aligned}
&(\text{“}x_0 = 0\text{”} \ \wedge\ \varphi_0) \ \vee\ (\text{“}x_0 = 1\text{”} \ \wedge\ \varphi_1) \ \vee\ \cdots \\
&\vee\ (\text{“}x_0 = n-1\text{”} \ \wedge\ \varphi_{n-1}) \qquad \longleftarrow
\end{aligned}
$$

この形の論理式を self-switching disjunction と呼ぶことにする．

として，この φ^* に Lévy-Montague Theorem (定理 10.) を適用すればよい．　□ (系 11.)

集合論と真理の定義不可能性 — Correct cardinals の存在

- c を定数記号として，T^* を，次を表現する論理式を ZFC に付け加えて得られる理論とする． 時間切れの時はここをクリックしなさい
  - “c は，基数である”,
  - 各 $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ に対し，
$$(\forall x_0 \in V_c) \cdots (\forall x_{n-1} \in V_c)\ (“V_c \models \varphi” \leftrightarrow \varphi)$$
- 系 11. (Lévy-Montague Reflection Theorem の系) により，T^* の任意の (具体的に与えられた) 有限部分集合は，V_κ の形のモデルを持つ (系 11. を，$\langle V_{\aleph_\alpha} : \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ に適用する) から，コンパクト性定理により，(ZFC が無矛盾なら) T^* も無矛盾である．このことから，ZFC と T^* は，equiconsistent であることが分かる．

問題． 回答権: 学部生の人に限る．賞与: 最初の正解者に，コロナ収束後，お茶 (at least 飲み物と (高級?) ケーキ) をおごります．
上の T^* は，“c は基数で，$V_c \prec V$” を主張するものになっているが，これが，定理 9. と，抵触 (contradict) しないのは，なぜか？

Σ_n-correctness

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，Σ_n を，

$$\underbrace{\exists x \cdots}_{\text{n 個の alternating quantifier blocks}} \quad \overbrace{\varphi}^{\text{bounded formula}}$$

という形をした $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式の全体とする．

- bounded formula とは，そこに現れる，すべての quantifications が $(\forall x \,\varepsilon\, y)$, $(\exists x \in y)$ の形をしている論理式のこととする．
- 特に，Σ_0 は，bounded formulas の全体である．
- Π_{n+1} を，ある Σ_n-論理式 φ に対して，$\forall x_0 \cdots \forall x_{k-1}\varphi$ の形をした論理式の全体とする．
- $n \in \mathbb{N}$ と，推移的な X に対し，$X \prec_{\Sigma_n} \mathrm{V}$ とは，すべての Σ_n 論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ に対し，

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \,(\text{“}X \models \varphi\text{”} \;\leftrightarrow\; \varphi)$$

が成り立つこと，とする．

Σ_n-correctness (2/5)

補題 12. M を推移的な集合とする．このとき

(1) $M \prec_{\Sigma_0} \mathsf{V}$ である．

(2) $M \prec_{\Sigma_n} \mathsf{V}$ は，ある Σ_{n+1}-論理式の M 上の絶対性から従う．

- $n \in \mathbb{N}$ に対し，ZFC_n で，ZFC の Separation Axiom と，Replacement を，Σ_n 論理式に制限して得られる公理とする．
- 十分に大きな n に対して (例えば，$n = R(3,3,3,3)$?)，ZFC_n は，「現行の数学 – 集合論」を，すべて包含するものになっている．

系 13. (Montague's Theorem) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathsf{ZFC} \vdash consis(\ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC}_n \urcorner\urcorner)$ が成り立つ．特に，どの $n \in \mathbb{N}$ に対しても ZFC_n は ZFC と同値でない．

証明． 補題 12. (2) と，Lévy-Montague の定理 (定理 10.) により，"$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}_n$" となる α の存在が ZFC で示せる．このことから，$\mathsf{ZFC} \vdash consis(\ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC}_n \urcorner\urcorner)$ が従う．もし，ZFC が ZFC_n と同値なら，このことから $\mathsf{ZFC}_n \vdash consis(\ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC}_n \urcorner\urcorner)$ となり，不完全性定理から，ZFC_n が矛盾することが帰結されてしまう． □ (系 13.)

Σ_n-correctness (3/5)

補題 12. M を推移的な集合とする．このとき

（1） $M \prec_{\Sigma_0} V$ である．

（2） $M \prec_{\Sigma_n} V$ は，ある Σ_{n+1}-論理式の M 上の絶対性から従う．

- 基数 κ に対し，$\mathcal{H}(\kappa) := \{x : |\overbrace{trcl(x)}^{x\text{ を要素として含む最小の推移的集合 (transitive closure)}}| < \kappa\}$ とする．

定理 14. (1) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_\alpha \prec_{\Sigma_0} V$ である．

（2） すべての基数 κ に対し，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} V$ である．

（3） κ が到達不可能基数なら，$V_\kappa \prec_{\Sigma_1} V$ である．

証明のスケッチ． (1): 補題 12.(1) と，補題 3. によりよい．

(2): (1) と，Downward Löwenheim-Skolem Theorem と，
Mostowski Theorem の応用で示せる． more details

(3): (2) と，到達不可能基数 κ に対して，$\mathcal{H}(\kappa) = V_\kappa$ により，
よい ($\mathcal{H}(\kappa) \subseteq V_\kappa$ は，すべての基数 κ に対し成り立つ)． □ (定理 14.)

定理 14. (1)　すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_\alpha \prec_{\Sigma_0} V$ である．
(2)　すべての基数 κ に対し，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} V$ である．
(3)　κ が到達不可能基数なら，$V_\kappa \prec_{\Sigma_1} V$ である．

定理 15.　定理 14. (3) での "$\prec_{\Sigma_1}$" は optimal である．

証明.　ここでは，Berry の paradox でと同様のアイデアが，用いられていることに注意する．

- 到達不可能基数が存在するとして，κ を，その中で最小のものとする．
- "到達不可能基数が存在する" は Σ_2-論理式 φ として書ける．

▷ $\mathrm{V} \models \varphi$ だが，κ の最小性から $V_\kappa \not\models \varphi$ である．　□ (定理 15.)

定理 16. (Proposition 22.3 in [kanamori]) κ が supercompact なら, $V_\kappa \prec_{\Sigma_2} V$ である.

到達不可能基数のときと同様に, 上の結果は, 最良なものになっている.

定理 17. 定理 16. での "$\prec_{\Sigma_2}$" は optimal である.

証明. 証明は, 定理 15. と同様に, Berry の paradox に類似のアイデアを用いる.

- supercompact な基数が存在するとして, κ を, その中で最小のものとする.
- "supercompact 基数が存在する" は, ZFC の下で Σ_3-論理式 φ として書ける. (これは, 全く trivial なわけではない, たとえば, [kanamori] の Exercise 22.8 の後のリマークを参照)
  - $V \models \varphi$ だが, κ の最小性から $V_\kappa \not\models \varphi$ である. □ (定理 17.)

有限と無限の硲にて — Craig-Vaught の定理

- 以上のような，微妙な状況は，ZFC の公理系が，有限な公理化を持たないから起っているのではないか，と思うかもしれないが，言語の拡張を許せば，Neumann-Bernays-Gödel 集合論 (NBG) のような，有限の公理系を持つ体系で，ZFC の一種の conservative extension となっているようなものも存在する．
- このことは，実は，一般化ができて，次が言える:

定理 18. (Craig-Vaught の定理)　T を，具体的に与えられた理論で，有限モデルを持たないようなもの，とする．T の言語を $\mathcal{L}$ として，$\mathcal{L}$ を含む，ある言語 $\mathcal{L}'$ 上の有限の理論 T' で T の conservative extension になっているようなものが存在する．

Proof.

有限と無限の谿にて — Trakhtenbrot の定理

- 定理 18. は，“有限モデルを持たないような理論” についてのものだった.
  - PA や ZFC のように有限モデルを持たないことがすぐに証明できる理論もあるが，一般には，具体的に与えられた理論が有限モデルを持つかどうかを判定するアルゴリズムは存在しないし，このことは，有限の理論 (つまり一つの論理式で表わせる理論) に限定しても，状況は変らない:

定理 19. (Trakhtenbrot の定理) 任意の閉論理式に対して，この論理式が，有限モデルを持つかどうかを判定するアルゴリズムは，存在しない.

参考文献

[cantor's attic] Cantor's attic, Reflecting cardinals
https://neugierde.github.io/cantors-attic/Reflecting

[fuchino0] 渕野 昌, 平面単位距離グラフの彩色について，大阪府立大学 情報数理談話会での講演のスライド (2011)
https://fuchino.ddo.jp/misc/hanfudai2011-07-20pf.pdf

[fuchino1] Sakaé Fuchino, An outline of independence proofs by forcing, Lecture note (2017)
https://fuchino.ddo.jp/notes/forcing-outline-katowice-2017.pdf

[fuchino2] __________, Axiomatic set theory and the foundation of mathematics, Lecture note (2019)
https://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss2019.pdf

[kanamori] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer–Verlag (1994/2003).

参考文献 (2/2)

[wiki1] Wikipedia: Hadwiger-Nelson problem
https://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson_problem

[zach] Richard Zach, Finite Axiomatizability of Theories in the Predicate Calculus Using Additional Predicate Symbols
http://richardzach.org/2008/05/14/finite-axiomatizability-of-theories-in-the-predicate-calculus-using-additional-predicate-symbols-classic-logic-papers-pt-4/


ご清聴ありがとうございました.

定理 18. の証明

(このスライドは講演の後に追加されたものです)

定理 18. (Craig-Vaught の定理) T を，具体的に与えられた理論で，有限モデルを持たないようなもの，とする．T の言語を $\mathcal{L}$ として，$\mathcal{L}$ を含む，ある言語 $\mathcal{L}'$ 上の有限の理論 T' で T の conservative extension になっているようなものが存在する．

証明のスケッチ: T を具体的に与えられた理論とする．

- 必要なら，(言語 and/or 理論の）拡張を行なって，再帰関数の理論が体系内の算術で扱えるようにする (この拡張を conservative extension として実現するために，T が有限モデルを持たない，という条件が必要である).
- T の言語の論理式に対する真理の定義を付加する (22/32 の懸賞問題を参照).
- T は recursive なので，T の論理式を生成する (有限長の) stack automaton プログラムが，具体的に取れる．
- 以上の状況は (ここでの拡張された言語の) 有限個の論理式で記述できる．

(定理 18.) Back

定理 14. (2) の証明の詳細

定理 14. (1) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_\alpha \prec_{\Sigma_0} V$ である．
(2) すべての基数 κ に対し，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} V$ である．
(3) κ が到達不可能基数なら，$V_\kappa \prec_{\Sigma_1} V$ である．

(2) の証明の詳細.

- $\mathcal{H}(\kappa)$ は，推移的であることに注意する．
- φ を，Σ_1-論理式とする.，Σ_0-論理式，$\varphi_0 = \varphi_0(y_0, \ldots, y_{m-1}, x_0, \ldots, x_{n-1})$ により，φ は，$\exists y_0 \cdots \exists y_{m-1} \varphi_0$ と表されているとする．
- $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{H}(\kappa)$ として，$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ なら，$b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathcal{H}(\kappa)$ で，$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi_0(b_0, \ldots, b_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ となるものがとれる．このとき，(1) により，$\mathrm{V} \models \varphi_0(b_0, \ldots, b_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ だから，$\mathrm{V} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．

定理 14. (2) の証明の詳細 (2/2)

- 逆に，$V \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ とすると， $b^*_0, \ldots, b^*_{m-1}$ で，$V \models \varphi_0(b^*_0, \ldots, b^*_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ となるものがとれる．
- Downward Löwenheim-Skolem Theorem により，濃度が $< \kappa$ な $M \prec \mathcal{H}(\kappa)$ で，$trcl(a_0), \ldots, trcl(a_{n-1}) \subseteq M$, $b^*_0, \ldots, b^*_{m-1} \in M$ となるものがとれる．Elementarity により，$M \models \varphi_0(b^*_0, \ldots, b^*_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．
- $i : M \overset{\cong}{\to} M^*$ を Mostowski collapse とすると，$i(a_0) = a_0 \ldots, i(a_{n-1}) = a_{n-1}$ で，したがって，$M^* \models \varphi_0(i(b^*_0), \ldots, i(b^*_{m-1}), a_0, \ldots, a_{n-1})$ である．
- M は transitive で，濃度 $< \kappa$ だから， $M \subseteq \mathcal{H}(\kappa)$ である．したがって，(1) により，$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi_0(i(b^*_0), \ldots, i(b^*_{m-1}), a_0, \ldots, a_{n-1})$ となり，$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ である． □ (定理 15. (2))

Back

定理 9. の証明の詳細

定理 9. 具体的に定義可能な基数 κ に対し，$\underbrace{V_\kappa \prec V}$ は成り立たない．

このことを，κ は correct であると言うことにする

証明.
- T を我々が "住んでいる" 集合論の世界の公理系とする．
- 基数 κ が，ある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi^*(x)$ で定義されている，とは，

  $$T \vdash \exists! x \varphi^*, \quad T \vdash \forall x\,(\varphi^*(x) \rightarrow x \text{ is a cardinal})$$

  となることである．このとき，κ は，T に公理 $\varphi^*(\kappa)$ を追加して得られる conservative extension T' での定数記号と考える．
- $V_\kappa \prec V$ (V_κ は，V の elementary substrucure である) とは，

  $$T' \vdash \forall x_0 ... \forall x_{n-1} \Big((\text{“}x_0 \in V_\kappa\text{”} \wedge \cdots \wedge \text{“}x_{n-1} \in V_\kappa\text{”}) \;\rightarrow\; (\text{“}V_\kappa \models \psi(x_0, ..., x_{n-1})\text{”} \;\leftrightarrow\; \psi(x_0, ..., x_{n-1})) \Big)$$

  が，すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$ 論理式 $\psi = \psi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し，成り立つことである．

定理 9. の証明の詳細 (2/2)

定理 9. 具体的に定義可能な基数 κ に対し，$V_\kappa \prec V$ は成り立たない．

証明の続き．

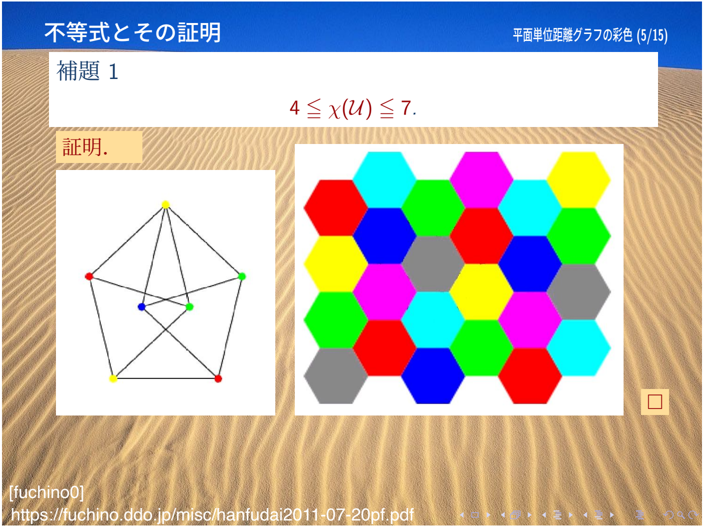
- κ の定義 $\varphi^*(x)$ を使うと，上のから，すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-文 σ に対し

$$T \vdash \underbrace{\forall x\,(\varphi^*(x) \wedge \text{“}V_x \models \sigma\text{”})}_{\eta(\ulcorner\sigma\urcorner)\text{ の形に書ける}} \leftrightarrow \sigma$$

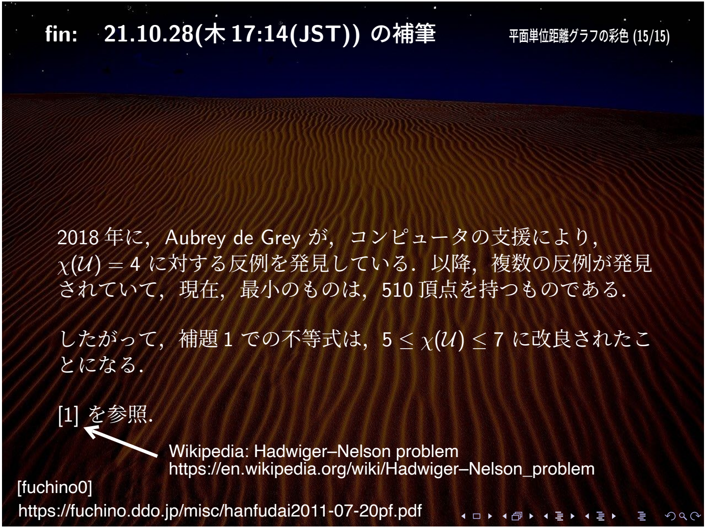
となるので，T での真理の定義が得られたことになってしまい，Tarski の真理の定義不可能性定理 (定理 2.) により，(我々 “住む” 集合論の世界が矛盾しない，という仮定に) 矛盾である． □ (定理 9.)

Back

$4 \leq \chi(\mathcal{U}) \leq 7$ の証明とその改良



$4 \leq \chi(\mathcal{U}) \leq 7$ の証明とその改良 (2/2)



Back

Berry の paradox の歴史背景

- Berry の paradox が最初に文書に記録されたのは,

  Bertrand Russell, Mathematical Logic as Based on the Theory of Types, Source: American Journal of Mathematics, Vol.30, No.3 (1908 (明治 41 年)), 222–262.

  においてだった. この論文で Berry の paradox を述べた箇所の脚注には,

  * This contradiction was suggested to me by Mr. G. G. Berry of the Bodleian Library.

  とある.

- ちなみに, Hilbert, Ackermann: „Grundzüge der theoretischen Logik“ の初版の出版は 1927(昭和 2 年), Gödel の不完全性定理の論文の出版は, 1931 (昭和 6 年) である.

Back