

力学系のクープマン作用素：入門と制御への応用

京都大学 大学院工学研究科 薄 良彦*

The Koopman Operator in Dynamic Systems:
Introduction and Control Application

Yoshihiko Susuki, Graduate School of Engineering, Kyoto University

*E-mail: susuki.yoshihiko.5c@kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

本解説では、力学系のクープマン作用素の入門と制御への応用について述べる。クープマン作用素は、B.O. Koopman による論文¹⁾でハミルトン力学系に対して導入された線形作用素である。文献^{1,2)}により、クープマン作用素のスペクトルに基づいて力学系の特性（状態の時間発展）を特徴付ける可能性が示されて以来、力学系のエルゴード理論として、クープマン作用素に基づく力学系の理論研究が報告されてきた³⁻⁵⁾。近年は伝統的なエルゴード理論の対象を超えて、多様なクラスの力学系の解析や制御に対してクープマン作用素の方法論が報告されている（総説として文献⁶⁻⁸⁾）。特に、流体分野の接点として、Dynamic Mode Decomposition (DMD; 動的モード分解)⁹⁾と呼ばれる流体運動のデータ解析とクープマン作用素の理論との接点が文献¹⁰⁾で報告され、DMDは流体運動の解析に広く応用されている（総説として文献¹¹⁻¹³⁾）。クープマン作用素による力学系の理論の要点は、力学系の特性にうまく適合した関数空間を導入し、その特性を関数空間に作用する線形写像の性質へ帰着する点にある。本解説では、特集の趣旨から、線形性に関する復習から説明に入り、クープマン作用素の導入、その方法論の分布定数系で記述される温度場の制御への応用¹⁴⁾と説明を進めていく。本解説に関わる最近の拙著^{15,16)}があることを付記する。

2 線形性に関わる復習

工学分野では、線形性を入力と出力を有するシステムで導入する場合が多い。ここでのシステムとは入力を出力に変換するルールを意味する。本節では、入力とルールが何かに留意しながら、本解説に関わる線形性を復習していこう。

2.1 線形空間と写像の線形性

工学、理学に関わらず、線形性に初めて出会う大学の数学は線形代数である。線形代数の対象はいわゆる線形空間（ベクトル空間）である。線形空間では、空間の元の和が定義され、スカラーと呼ばれる数と空間の元の積（スカラー倍）が可能である。その他にも公理と呼ばれる条件が複数あり、それらは線形代数の教科書で確認できる^{注1)}。線形空間の例として、 n を自然数として、実数に関する n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n や複素数に関する n 次元ユニタリ空間 \mathbb{C}^n がある。これらは、線形独立な元が n 個だけ取れる、すなわち任意の元が n 個の線形独立な元を用いて表現できる、有限次元の線形空間の例である。

線形代数のポイントは、線形空間から線形空間への変換を表す写像を調べることである。上の例の \mathbb{R}^n について、線形空間 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への写像 T を

$$T: \boldsymbol{x} \mapsto T(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

と表わす。この T は入力 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を変換して出力 $T(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ を生成するルールである。線形代数では特に T が線形の場合を取り扱う。 T が線形であるとは、任意の入力 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ とスカラー α_1, α_2 に対して、 T が

$$T(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 T(\boldsymbol{x}_2) \quad (2)$$

を満たすことである。簡単な例として $n = 1$ の場合の $T(x) = ax$ (a は実定数)がある。そして、線形写像 T に対して、 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で表される $n \times n$ の行列 A が調べる対象（計算の対象）となる。特に、線形写像の性質を調べる上で、 A の固有値や固有ベクトルの計算が基本的になる。

注1) 結合法則, 交換法則, 零元・逆元の存在, 云々。

2.2 関数の線形空間と作用素の線形性

2.1 項の線形空間の考え方は関数が元となる集合にも導入される。例えば、閉区間 $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ で次の積分が有界な関数 $f(x)$ を考えよう。

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < \infty \quad (3)$$

2 つの関数 $f_1(x), f_2(x)$ の和を

$$f_1 + f_2 : X \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \quad (4)$$

と定めて、関数 $f(x)$ のスカラー倍を

$$\alpha f : X \ni x \mapsto \alpha f(x) \quad (5)$$

と定めると、いずれの $f_1 + f_2, \alpha f$ も式 (3) を満たしており、上の和とスカラー倍の条件を満たす関数全体の集合は線形空間となる。このような関数を元とする線形空間を \mathcal{F} と表わす。関数を元とする線形空間は、数学では関数解析の対象であり、信号処理や制御、数値計算など、工学においても標準的である¹⁷⁾。

上の例と信号処理に関連して、フーリエ級数による周期関数 $f(x)$ の表現

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\pi x}, \quad x \in [-1, 1]$$

は有名である (i は虚数単位、 c_j は複素フーリエ係数である)。この表現で与えられる関数全体も線形空間である。この場合、複素指数関数 $e^{ij\pi x}$ は空間の線形独立な元であり、この元の個数はいくらでも大きく取れることから、線形空間は無次元となる。このように関数を元とする線形空間では無次元元を扱うのが 2.1 項の \mathbb{R}^n や \mathbb{C}^n とは異なる。

2.1 項と同様のポイントとして、関数を元とする線形空間 \mathcal{F} から \mathcal{F} への写像、すなわち関数を変換するルールを考える。そのような写像は一般に**作用素**と呼ばれ、

$$A : f \mapsto A(f), \quad f \in \mathcal{F} \quad (6)$$

のように A で表わす。関数解析において特に A が線形の場合を調べていく。作用素 A が線形であるとは、こちらも前項と同様に、任意の入力 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ とスカラー α_1, α_2 に関して、 A が

$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A(f_1) + \alpha_2 A(f_2) \quad (7)$$

を満たすことにある。この具体例が 3.1 項で導入されるクープマン作用素である。

2.3 微分方程式の線形性と力学系

最後に、微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

の線形性について考えよう。 $t \in \mathbb{R}$ は独立変数である時間であり、 \mathbf{x} は**状態**と呼ばれ、 \mathbf{x} の属する空間 \mathbb{R}^n は**状態空間**と呼ばれる。簡単な例は、一階の線形微分方程式

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

である (a は実定数)。今、この微分方程式の一般解 $x(t) = x(0)e^{at}$ に基づいて、入力の状態 $x(0)$ を時間 t 後の状態 $x(t)$ に変換する (すなわち状態の時間発展の) ルールを導入し、このルールを写像

$$S^t : x(0) \mapsto x(t) = x(0)e^{at} \quad (10)$$

で表す。このような解から定まり、時間をパラメータとして有する写像は**流れ** (フロー) と呼ばれる。この流れ S^t は、明らかに式 (9) を満たすとともに、任意の入力 x について、

- $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対して $S^{t_1}(S^{t_2}(x)) = S^{t_1+t_2}(x)$
- $S^0(x) = x$

という性質を有し、写像の 1 パラメータ群を成していると言われる。式 (8) の一般の微分方程式に対しても、流れ $S^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が、解より導入され、式 (8) を満たす^{注2)}。

$$\frac{d}{dt} S^t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(S^t(\mathbf{x}))$$

通常、微分方程式が線形であるとは、解の重ね合わせが成り立つ場合と説明される。すなわち、式 (8) の 2 つの解 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ の和 $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ と解 $\mathbf{x}(t)$ のスカラー倍 $\alpha \mathbf{x}(t)$ が式 (8) を満たすことである：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)) \\ \frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{x}(t)) &= \mathbf{F}(\alpha \mathbf{x}(t)) \end{aligned} \right\}$$

よって、2.2 項の関数の線形空間をふまえると、微分方程式が線形であるとは、対応する解全体の集合が線形空間をなすと言える。また、上の流れ S^t を用いると、微分方程式が線形であるとは、式 (2) の意味で S^t が状態 \mathbf{x} に関して線形になるとも言える (式 (9) に対する流れ (10) がその例)。一般に線形ではない写像 (流れ) の性質を調べるのが**非線形力学系**の目的であり、所望の性質を有する流れを設計するのが**非線形制御**の目的である。

3 力学系のクープマン作用素

本節では、前節の線形性に留意しながら、式 (8) から誘導される非線形の流れに対するクープマン作用素の理論を概観する。

^{注2)} 式 (8) の $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ の性質をうまく定めて、微分方程式には一意の解が存在するとする。また、 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は時間 t を陽に含まない (自励的な) 場合を考えている。

3.1 クープマン作用素の導入

式(8)の解から誘導される流れ $S^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える。クープマン作用素の導入のために、**観測量**と呼ぶ、状態空間 \mathbb{R}^n から複素数の集合 \mathbb{C} への関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を導入する。観測量 f 自体は数学的な対象であるものの、実数値を返す f は、流れの生成する出力（観測、測定）の数学モデルであり、現象の観測データと現象の背後にあるルールを結びつける。具体的には、

$$y(t) = f(\mathbf{x}(t)) \quad (11)$$

と書けば、 f が式(8)のスカラ値出力 y を与えていることがわかる。以下において観測量全体の成す線形空間を \mathcal{F} と表わす^{注3)}。2.2項で述べたように、 \mathcal{F} は一般に無限次元の空間となる。

今、観測量 f と流れ S^t との合成により新しい観測量を作るルール（作用素） $U^t: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を

$$f(\mathbf{x}) \mapsto U^t f(\mathbf{x}) := (f \circ S^t)(\mathbf{x}) = f(S^t(\mathbf{x})) \quad (12)$$

と導入する。この U^t が本解説の主役である**クープマン作用素**である。ここで、流れに沿った出力の時間発展 $y(t) = f(S^t(\mathbf{x}))$ は、 f に対する U^t の作用により

$$y(t) = f(S^t(\mathbf{x})) = U^t f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

と書けるので、 U^t が出力に関わる観測量の時間発展のルールを表していることがわかる。また、2.3項の S^t の性質より、 U^t は、任意の入力 f について

- $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対して $U^{t_1}(U^{t_2} f) = U^{t_1+t_2} f$
- $U^0 f = f$

という性質を有し、線形作用素の1パラメータ群を成していると言われる。

式(12)で定義したクープマン作用素 U^t は式(7)の意味で**線形**である。2つの観測量 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ およびスカラ α_1, α_2 に対して、関数である観測量の和(4)とスカラ倍(5)より、

$$\begin{aligned} U^t(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\mathbf{x}) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(S^t(\mathbf{x})) \\ &= \alpha_1 f_1(S^t(\mathbf{x})) + \alpha_2 f_2(S^t(\mathbf{x})) \\ &= \alpha_1 (U^t f_1)(\mathbf{x}) + \alpha_2 (U^t f_2)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となり、 U^t が f について線形とわかる。そして、いくつかの条件の下で、非線形の流れ S^t の特性を線形作用素 U^t が保持していることが示されている⁸⁾。本解説の基本的なアイデアは、式(8)で記述される非線形の流れ S^t を線形作用素 U^t の性質を用いて解析し設計する点にある。

^{注3)} バナッハ空間やヒルベルト空間を設定する。

3.2 クープマン作用素のスペクトル

2.1項でふれたように、線形写像の性質を調べるために固有値や固有ベクトルが基本的である。関数の空間に作用する線形作用素であるクープマン作用素 U^t に対して、固有値の概念の一般化である**スペクトル**¹⁸⁾ が導入される。

まず、有限次元の場合との直感が効く固有値を導入しよう。式(8)に対するクープマン作用素 U^t の固有値（**クープマン固有値**） $\lambda \in \mathbb{C}$ とこれに属する固有関数（**クープマン固有関数**） $\phi_\lambda \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ は、次式を満たすものとして定義される。

$$U^t \phi_\lambda(\mathbf{x}) = e^{\lambda t} \phi_\lambda(\mathbf{x}) \quad (14)$$

式(9)に対する流れ(10)を例にとると、クープマン固有値 $\lambda = a$ に属する固有関数 $\phi_a(x) = x$ を見つけることができる。

$$U^t \phi_a(x) = \phi_a(S^t(x)) = x e^{at} = e^{at} \phi_a(x)$$

ここで、式(14)の両辺を時間 t で微分して、付録1のように変形することで、内積“ \cdot ”と勾配演算子 ∇ を用いた

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \phi_\lambda(\mathbf{x}) \quad (15)$$

を得る。この固有方程式と見なせる関係式はクープマン固有関数の数値計算や4節の制御への応用で活用される。

次に、クープマン作用素 U^t の無限次元性に由来する**連続スペクトル**にふれよう。線形作用素の理論では、固有値、連続スペクトルに加えて、剰余スペクトルを合わせてスペクトルという術語が使われる。連続スペクトルの数学的な導入は関数解析の書籍¹⁸⁾に委ねるものとして、ここでは、確率過程の議論¹⁹⁾をふまえて、式(8)の出力(11)が定常応答を表す場合について直感的な導入を試みる^{注4)}。定常応答を表す $y(t)$ について形式的なフーリエ変換 $Y'(\omega)$ を考える（ ω は角周波数である）。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Y'(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$y(t)$ が非周期的である場合などに、 $Y'(\omega)$ が連続なフーリエスペクトルと呼ばれることは工学系の信号解析の内容である。ここで、 $Y'(\omega)$ を $Y(\omega)$ という関数の ω による形式的な導関数 $(Y'/(2\pi) = dY/d\omega)$ とみなし、また左辺に式(13)を使うと、

$$U^t f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dY(\omega) \quad (16)$$

^{注4)} 流れ S^t がある測度を保存する、観測量の空間 \mathcal{F} として(2.2項の冒頭で述べた)自乗可積分の空間を設定するなどの説明が必要であるものの、ここでは省略する。

を得る．両辺の比較より， $dY(\omega)$ には出力 $y(t)$ に対応する観測量 f の特性が反映されている．そして， U^t が線形作用素であることから，式 (16) の左辺も f に対して線形的に表わすことにして， $dY(\omega)$ を $dE(\omega)f(\mathbf{x})$ とおくことで，

$$U^t f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dE(\omega) f(\mathbf{x})$$

を得る．このように得られた $E(\omega)$ は， ω に対して作用素を返す（作用素値の）関数となる．そして， $E(\omega)$ が（絶対）連続である場合に， U^t は連続スペクトルを有するという．上の導入より， U^t の連続スペクトルの存在は定常応答の非周期性に関連していることが示唆される^{注5)}．

3.3 スペクトルによる流れの解析

本項では，クープマン作用素のスペクトルによる非線形の流れの解析を紹介する．多様な研究が展開されているので，筆者の知り得る範囲となることをあらかじめ了解されたい．

- **統計的解析**：状態空間における流れの大域構造に起因する，状態の複雑な長時間発展をスペクトルから特徴付ける．伝統的なエルゴード理論のアプローチであり，流れのエルゴード性や混合性が3.2項のクープマン固有値や連続スペクトルの特性として明らかにされている³⁾．特に，混合性は流体運動の解析や設計として広く検討されてきた内容である²¹⁾．
- **時系列解析**：上の統計的解析に関連しているものの，状態ないし出力の複雑な時間発展を，特に周期性に着目して，スペクトルから特徴付ける．クープマン固有値に基づくクープマンモード分解（Koopman Mode Decomposition; KMD）^{10,11)}があり，この数値計算アルゴリズムと見なされるDMD⁹⁾は流体運動のデータ解析で注目を集めてきた¹¹⁻¹³⁾．流体運動に関わるデータセットのみを活用して現象の低次元モデルを得ることがDMDの一つのポイントである．
- **大域的解析**：状態空間における流れの大域構造，具体的には不変集合，安定・不安定多様体などをスペクトルから特徴付ける．不変集合や吸引領域のクープマン固有関数（のレベルセット）による特徴付け²²⁾や，安定・不安定多様体のクープマン固有関数による特徴付け²³⁾などがある．不安定解に関わる大域構造については未解決な課題が多い．

- **線形化**： S^t と U^t の等価性を活かして，非線形の流れの構造を状態空間で大域的に近似する線形の流れをスペクトルにより導出する．このアプローチは従来のある状態点近傍の線形化（局所線形化）とは異なる．上のDMDもこの種のアプローチであり，非線形の流れの数理構造を機械学習などのデータ科学の方法論で解き明かすことは今日的である．この線形化は，非線形の流れの制御に応用されるアプローチでもあり⁸⁾，次節の内容に関わる．

4 温度場制御への応用

本節では，筆者らが最近取り組んだ，部屋内温度場の制御をクープマン作用素により実行するアイデア¹⁴⁾を紹介する．対象とする現象は，非線形要素を用いた空調制御と温度の物理則に起因する温度場の時間的周期振動であり，非線形の分布定数系（偏微分方程式）で記述される．このアイデアの要点は，非線形分布定数系のモデルを用いることなく，温度場のダイナミクスを有限測定点における時系列データに基づき制御することにある．

今，有限測定点の温度を状態 \mathbf{x} とし，測定温度の時間発展が式 (8) に制御変数 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ を追加した次式で表わされるとする^{注6)}．

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (17)$$

ここで \mathbf{F} は， $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の場合，すなわち制御無しの現象を表すモデルであり，本節の問題では周期振動を表す．制御 \mathbf{u} は測定点と同じ場所にある空調機から部屋内への熱入力を表し， \mathbf{B} は制御の状態への作用に関わる定行列である．

さて，状態 \mathbf{x} の周期振動はクープマン作用素の純虚数の固有値により特徴付けられる^{8,10,11)}．以下で示す実測定をふまえて，単一周波数を想定すると，その振動は

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\omega t} \phi_{i\omega}(\mathbf{x}(0)) \mathbf{V}_{i\omega} + \text{c.c.}, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

で表される．c.c. は右辺第1項の複素共役を表し， $i\omega$ は純虚数のクープマン固有値（ ω は実定数）， $\phi_{i\omega}(\mathbf{x})$ はこれに属するクープマン固有関数である． $\mathbf{V}_{i\omega}$ は， $e^{i\omega t}$ が表す周期振動が測定点でどのように現れるかを定量化した複素ベクトルであり，クープマンモード^{10,11)} と呼ばれる．式 (18) は流れの線形安定性解析の取り扱いに一見に似ているものの，クープマン固有関数が状態空間で大域的に導入されているので，式 (18) は平衡点や周期軌道の近傍に制限されない点に注意されたい．ここで，

注5) 文献^{15,20)}では $dE(\omega)f(\mathbf{x})$ が U^t のレゾルベント作用素により特徴付けられている．これにより定常応答の非周期性と U^t のスペクトルとの対応が具体的になる．

注6) 制御変数を有する非線形偏微分方程式を常微分方程式である式 (8) へどのように縮約するかは議論が必要であり，本節の対象について理論的に明確になっていない．

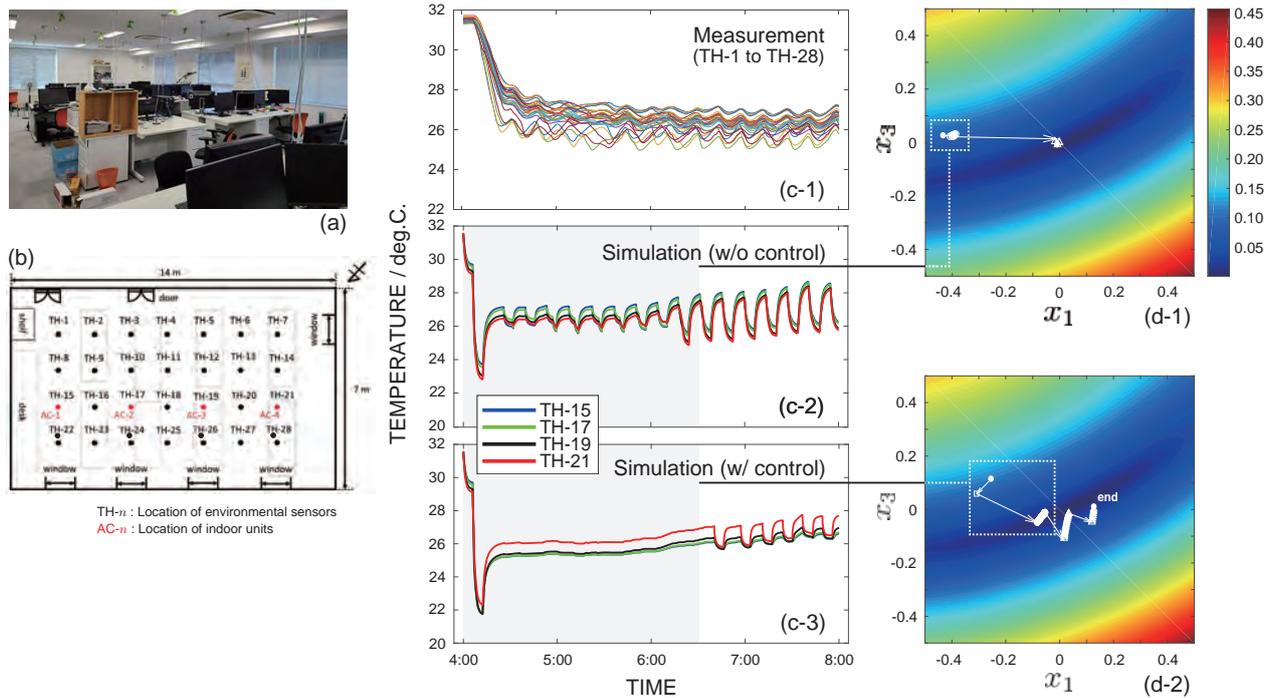


図1 クープマン作用素の固有関数による部屋内温度場の振動抑制. 文献¹⁴⁾の図面に基づき作成.

式(18)で振幅を決めているクープマン固有関数 $\phi_{iw}(\mathbf{x})$ を用いて, 次の複素数のモード変数

$$z_{iw} := \phi_{iw}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

を導入する. このとき, 式(17)と式(15)より, 振動振幅の時間変化を表す式

$$\begin{aligned} \dot{z}_{iw} &= \nabla \phi_{iw}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &= i\omega z_{iw} + \nabla \phi_{iw}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{B}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (20)$$

を導出できる. 式(20)において, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である場合, $z_{iw}(t)$ の絶対値は, 時間に対して一定であり, たしかに周期振動の振幅を表している. このことは, クープマン固有関数を用いることで, 非線形システムの状態 \mathbf{x} の周期振動が一次元の線形システムである式(20) ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)で表現されることを示している. そして, 式(20)において, \mathbf{u} を適切に設計し $z_{iw}(t)$ の絶対値を時間に対して減衰するようにできれば, 対応する状態 \mathbf{x} の周期振動を抑えることが可能となる. これが本節の温度場の制御のアイデアである. 文献¹⁴⁾では, 必要となる $i\omega$ や $\phi_{iw}(\mathbf{x})$ の推定をすべて実計測データより実行することを提案している.

図1に本節のクープマン固有関数による部屋内温度場の振動抑制の概要を示す. 図(a)の部屋内空間(大学の研究室)を対象とした実計測を行った. 実計測のための環境センサの配置(TH-1よりTH-28の28カ所)を図(b)に示す. 空調機的位置(AC-1よりAC-4の4カ所)も併せて示している. 図(c-1)は, 夏季に実測した28カ所の温度時系列データを示しており, 約15分周期

の周期振動の存在を示している. この振動の発生は空調制御と部屋内温度の物理則の相互作用に起因していると推測される. こちらの実測データに基づいて制御に必要なクープマン固有値や固有関数は推定される(推定法は文献¹⁴⁾を参照). そして, 実測を再現するために構成したモデル(有効熱拡散方程式と空調制御の状態方程式を組み合わせた非線形偏微分方程式)を用いて, 前のパラグラフで述べた部屋内温度場の制御を実行したシミュレーション結果が図(c-3)である. なお, このデータは, 式(17)の状態 \mathbf{x} とみならず, 空調機に近接する4点の温度(TH-15, 17, 19, 21)の時間応答である. 制御を含まないシミュレーション結果の図(c-2)と比較することで, 4時半より6時半の温度の振動が抑制されていることがわかる. 本節のアイデア, すなわちモード変数であるクープマン固有関数の絶対値を制御により小さくすることを確認するために, 図(c-2)および(c-3)のシミュレーションを, TH-15に相当する x_1 とTH-19に相当する x_3 の点列としてプロットし, あわせて固有関数 $\phi_{iw}(\mathbf{x})$ の絶対値のレベルセットを示したものが図(d)である. 制御無しの場合の図(d-1)と制御有りの場合の図(d-2)を比較すると, 図(d-2)において振動抑制に対応する点列がレベルセットが小さくなる方向に遷移しており, 本節のアイデアが実行されていることがわかる.

5 おわりに

本解説では, 力学系のクープマン作用素の入門と制御への応用について述べた. 流体運動の解析に広く用いら

れている DMD には多くの文献があるなので、その数学的基盤であるクープマン作用素の解説を、力学系（微分方程式）の観点から与えることを本解説の目標とした。4 節の応用のような実世界・実社会と数理科学をデータつなぐアプローチは今後益々発展するはずであり、その基盤としてのクープマン作用素に少しでも興味を持っていただければ幸いである。

謝辞 本解説の機会を頂くとともに、原稿を詳細にご検討頂いた犬伏正信先生に御礼申し上げます。また、原稿にコメントを頂いた片山夏樹氏に感謝します。なお、4 節の研究は JST さきがけ (JP-MJPR1926) のサポートのもとで行われたものです。

付録 1 式 (15) の導出

式 (14) の両辺を時間 t で微分し、本解説で出てくる複数の式を変形に用いる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U^t \phi_\lambda(\mathbf{x})) &= \lambda e^{\lambda t} \phi_\lambda(\mathbf{x}) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_\lambda(\mathbf{S}^{t+h}(\mathbf{x})) - \phi_\lambda(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}))}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_\lambda(\mathbf{S}^t(\mathbf{S}^h(\mathbf{x}))) - \phi_\lambda(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}))}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda t} \phi_\lambda(\mathbf{S}^h(\mathbf{x})) - e^{\lambda t} \phi_\lambda(\mathbf{x})}{h} &= \\ \left. \frac{d}{dt} \phi_\lambda(\mathbf{S}^t(\mathbf{x})) \right|_{t=0} e^{\lambda t} &= \\ \nabla \phi_\lambda(\mathbf{x}) \cdot \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{S}^t(\mathbf{x})) \right|_{t=0} e^{\lambda t} &= \\ \nabla \phi_\lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{\lambda t} &= \end{aligned}$$

引用文献

- 1) Koopman, B. O.: Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space. *Proc. National Academy of Sciences of the USA*, 17 (1931) 315–318.
- 2) Koopman, B. O. & Neumann, J. v.: Dynamical systems of continuous spectra. *Proc. National Academy of Sciences of the USA*, 18 (1932) 255–263.
- 3) アーノルド, アベズ (吉田 耕作訳): 古典力学のエルゴード問題 (吉岡書店, 1972).
- 4) Lasota, A. & Mackey, M. C.: *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics* (Springer-Verlag, 1994).
- 5) Eisner, T., Farkas, B. Haase, M., & Nagel, R.: *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory* (Springer, 2015).
- 6) Budišić, M., Mohr, R., & Mezić, I.: Applied Koopmanism. *CHAOS*, 22 (2012) 047510.
- 7) Brunton, S. L. & Kutz, J. N.: *Data-Driven Science and Engineering* (Cambridge University Press, 2019).
- 8) Mauroy, A., Mezić, I., & Susuki, Y. (editors): *The Koopman Operator in Systems and Control: Concepts, Methodologies, and Applications* (Springer Nature, 2020).
- 9) Schmid, P. J.: Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *J. Fluid Mech.*, 656 (2010) 5–28.
- 10) Rowley, C. W., Mezić, I., Bagheri, S., Schlatter, P., & Henningson, D. S.: Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech.*, 641 (2009) 115–127.
- 11) Mezić, I.: Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 45 (2013) 357–378.
- 12) Kutz, J., Brunton, S., Brunton, B. & Proctor, J.: *Dynamic Mode Decomposition: Data-Driven Modeling of Complex Systems* (SIAM, 2016).
- 13) Taira, K., Hemati, M. S., Brunton, S. L. et al.: Modal analysis of fluid flows: Applications and outlook. *AIAA Journal*, 58 (2020) 998–1022.
- 14) Susuki, Y., Eto, K., Hiramatsu, N., & Ishigame, A.: Control of oscillatory temperature field in a room via damping assignment to nonlinear Koopman mode. Preprint arXiv:2207.03219 (2022); *Proc. 2022 IEEE Conference on Control Technology and Applications* (2022) 796–803.
- 15) 薄 良彦: 非線形力学系のクープマン作用素—最近の研究から. システム/制御/情報, 65 (2021) 324–329.
- 16) 薄 良彦: クープマン作用素による非線形システムの制御. 計測と制御, 61 (2022) 133–138.
- 17) 山本 裕: システムと制御の数学 (朝倉出版, 1998).
- 18) 藤田 宏: 理解から応用への関数解析 (岩波書店, 2007).
- 19) 小倉 久直: 物理・工学のための確率過程論 (コロナ社, 1978).
- 20) Susuki, Y., Mauroy, A., & Mezić, I.: Koopman resolvent: A Laplace-domain analysis of nonlinear autonomous dynamical systems. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 20 (2021) 2013–2036.
- 21) Aref, H., Brake, J. R., Budišić, M., et al.: Frontiers of chaotic advection. *Rev. Mod. Phys.*, 89 (2017) 025007.
- 22) Susuki, Y., & Mezić, I.: Invariant sets in quasiperiodically forced dynamical systems. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 19 (2020) 329–351.
- 23) Mezić, I.: On applications of the spectral theory of the Koopman operator in dynamical systems and control theory. *Proc. 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control* (2015) 7034–7041.