

木材めり込み挙動のアイソパラメトリック有限要素解析 (その14) 接合要素とクーロン摩擦を考慮したその定式化

木質材料 アイソパラメトリック要素 めり込み
接触分離 クーロン摩擦

正会員 ○上辻真由香^{*1} 正会員 上野 拓也^{*1}
正会員 光井 周平^{*2} 正会員 近藤 一夫^{*3}

1. 緒言

本研究は、伝統的木造建築架構の解析を行う際の部材接合部の適切なバネ特性の算定方法の確立を主要な目的に、木材めり込み挙動の詳細な有限要素解析を行おうというものであり、前2報^{1),2)}では、等変位めり込み試験体の数値実験を行い、試験体寸法や異方性主軸の傾斜が変形挙動に及ぼす影響について報告した。

ところで、伝統的木造建築では、木材を様々な形状に加工し、それらを巧みに組み合わせて接合部を形成している。こうした接合部では、载荷に伴って部材間の接触、分離が複雑に生じており、接触時の挙動は、部材間の摩擦抵抗の影響をうけるものと考えられる。

本報と次報では、部材間の接触・分離現象の考慮に加え、接触状態にある部材間の摩擦抵抗の影響、効果をも考慮したより詳細な解析を行うための定式化の方法について報告すると共に、いくつかの数値実験を行い、応答挙動に及ぼす摩擦の影響、効果について調査した結果について示す。

なお、本研究では、摩擦抵抗を評価するに際して、以下の仮定を採用する。

- 1) 摩擦特性は、該当摩擦面すべての方向について同様なものであるとする。
- 2) また、摩擦係数は、鉛直方向内力の値の如何にかかわらず一定とする。

2. 接合要素の定式化

本研究では、摩擦抵抗を評価した接触分離の状態評価を行うために、該当の接触面に接合要素を挿入する。以下では、図1(a),(b)に示すような隣接する2つの領域(a)と(b)の境界に接合要素を挿入し、接触・滑り付着問題の定式化を行う。図1(a)の図中、灰色面が接合要素を挿入する接触分離の状態変化が生じる部材あるいは要素境界であり、また、 (n, s_1, s_2) は接合面内に設定した直交座標系である。

2.1. 接合面の設定

接合面は、親座標系において (ξ, η) 平面内にあるものとし、図1(b)に示すように、 ξ 軸接線方向を s_1 とすると、 (s_1, s_2) 及び n 軸方向単位ベクトルは、それぞれ、次式で与えられる。

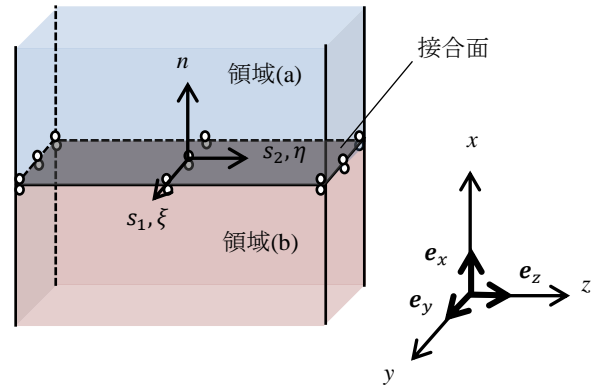


図1(a) 状態変化の生じる境界面を有する2つの領域

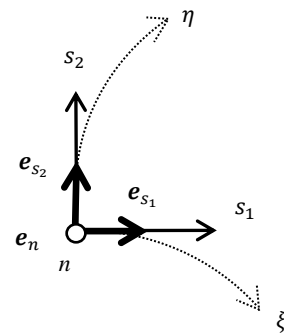


図1(b) 接合面内の座標系

$$\begin{aligned} e_{s_1} &= \frac{\mathbf{r}_{,\xi}}{|\mathbf{r}_{,\xi}|} \\ e_n &= \frac{\mathbf{r}_{,\xi} \otimes \mathbf{r}_{,\eta}}{|\mathbf{r}_{,\xi} \otimes \mathbf{r}_{,\eta}|} \\ e_{s_2} &= e_n \otimes e_{s_1} \end{aligned} \quad (1.a-c)$$

ここに、 \mathbf{r} は接合面の位置ベクトル、また、 \otimes は外積の意であり、ベクトル $\mathbf{r}_{,\xi}$ 、 $\mathbf{r}_{,\eta}$ は、それぞれ、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,\xi} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}_{,\eta} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.a-b)$$

また,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{N_{con,l}} \hat{H}_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{N_{con,l}} \hat{H}_i(\xi, \eta) y_i \\ z &= \sum_{i=1}^{N_{con,l}} \hat{H}_i(\xi, \eta) z_i \end{aligned} \quad (3.a-c)$$

ここに, $\hat{H}_i(\xi, \eta)$ は, 接合面の形状あるいは変位を規定する 2次元の形状関数であり, $N_{con,l}$ は, 接合下面に関する節点数である。

2.2. 要素剛性マトリクス誘導

接触面における (s_1, s_2) 及び n 軸方向変位は, 次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(s_1, x) & \cos(s_1, y) & \cos(s_1, z) \\ \cos(s_2, x) & \cos(s_2, y) & \cos(s_2, z) \\ \cos(n, x) & \cos(n, y) & \cos(n, z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに,

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$: (s_1, s_2) 及び n 軸方向変位

u, v, w : x, y 及び z 軸方向変位

(4)式より, 接合面における (s_1, s_2) 及び n 軸方向相対変位は, 次式のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta_{s_1} \\ \delta_{s_2} \\ \delta_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{u}|_{n=+0} - \hat{u}|_{n=-0} \\ \hat{v}|_{n=+0} - \hat{v}|_{n=-0} \\ \hat{w}|_{n=+0} - \hat{w}|_{n=-0} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{con}} [T] (\pm \hat{H}_i(\xi, \eta)) \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{N_{con}} [B_i^c] \{d_i\} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(s_1, x) & \cos(s_1, y) & \cos(s_1, z) \\ \cos(s_2, x) & \cos(s_2, y) & \cos(s_2, z) \\ \cos(n, x) & \cos(n, y) & \cos(n, z) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[d_i] = [u_i \quad v_i \quad w_i] \quad (7)$$

であり, $\{d_i\}$ は変位パラメータベクトルである。また, N_{con} は, 一接合要素あたりの節点数であり, $()|_{n=+0}, ()|_{n=-0}$ は, それぞれ, 接合上面及び下面における値の意である。なお, \hat{H}_i の前の \pm は, 接合上面に関する節点については+, 接合下面に関する節点については-となる。

(5)式より, 接合要素のひずみエネルギーの増分は, 変分形式で, 次式となる。

$$\begin{aligned} \delta \Delta U^{Cm} &= \sum_{i=1}^{N_{con}} \sum_{j=1}^{N_{con}} [\delta \Delta d_i] \left(\iint_S [B_i^c]^T [k] [B_j^c] dS \right) \{\Delta d_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{con}} \sum_{j=1}^{N_{con}} [\delta \Delta d_i] \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i^c]^T [k] [B_j^c] A d\xi d\eta \right) \{\Delta d_j\} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{N_{con}} \sum_{j=1}^{N_{con}} [\delta \Delta d_i] [K_{ij}^{Cm}] \{\Delta d_j\} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに,

$$[K_{ij}^{Cm}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i^c]^T [k] [B_j^c] A d\xi d\eta \quad (9)$$

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \frac{1}{2} \quad (10)$$

であり, $[K_{ij}^{Cm}]$ が, 接合要素の要素剛性マトリクスである。また, $[k]$ は, 次式で与えられる, 接合部に挿入する単位面積当たりのバネ定数マトリクスである。

$$\begin{aligned} [k] &= \begin{bmatrix} k_{n,n} & k_{n,s_1} & k_{n,s_2} \\ k_{s_1,n} & k_{s_1,s_1} & k_{s_1,s_2} \\ k_{s_2,n} & k_{s_2,s_1} & k_{s_2,s_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{n,n} & 0 & 0 \\ k_{s_1,n} & k_{s_1,s_1} & k_{s_1,s_2} \\ k_{s_2,n} & k_{s_2,s_1} & k_{s_2,s_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

なお, 本研究では, 接触面端部の接触・分離, 滑り・付着の影響をよりの確に評価するため, 接合要素の剛性評価, エネルギー積分には, Lobatto の求積法を用いる。

3. 状態判定とバネ定数の設定

3.1. 接触状態

本研究では, 次式が満足されるとき, 領域(a)と領域(b)は接触状態にあるものとする。

$$\delta_n \leq -0 \quad (12)$$

接触状態における接線 (s_1, s_2) 方向の条件については, 完全付着状態, 摩擦なし状態及びクーロン摩擦状態の 3つの場合を想定する。完全付着状態の場合, 摩擦なしの場合を想定したバネ定数は, それぞれ, 次式となる。

$$\begin{aligned} \cdot \text{完全付着状態} \\ k_{n,n} = k_{s_1,s_1} = k_{s_2,s_2} = \infty \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{摩擦なし状態} \\ k_{n,n} = \infty, k_{s_1,s_1} = k_{s_2,s_2} = 0 \end{aligned} \quad (14.a,b)$$

なお, 以下では, 記述のないバネ定数については, 全て 0 としている。

一方、クーロン摩擦状態については、前述のように、摩擦特性は該摩擦面すべての方向について同様のものであるとし、また、摩擦係数は鉛直方向内力の値の如何にかかわらず一定とする。

この仮定により、クーロン摩擦を想定した場合の滑り条件は、次式となる。(図3参照)

$$|\mathbf{t}_s| = -ct_n \quad (15)$$

ここに、

$$\mathbf{t}_s = t_{s_1} \mathbf{e}_{s_1} + t_{s_2} \mathbf{e}_{s_2} \quad (16)$$

また、 c は摩擦係数であり、 $\mathbf{e}_{s_1}, \mathbf{e}_{s_2}$ は、 s_1 及び s_2 方向単位ベクトル、 t_n, \mathbf{t}_s は、単位面積当たりの法線方向及び接線方向内力を表す。

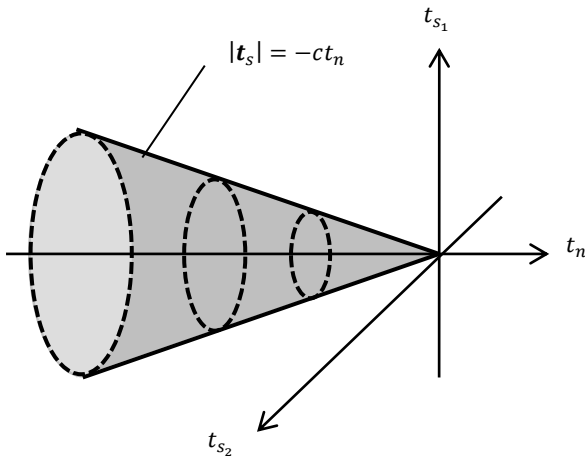


図3 クーロン摩擦の滑り条件

本研究では、次式の条件を満たすとき、接線方向は付着状態にあるものとする。

$$|\mathbf{t}_s| < -ct_n \quad (17)$$

この時、バネ定数は次式となる。

$$k_{n,n} = k_{s_1,s_1} = k_{s_2,s_2} = \infty \quad (18)$$

一方、次式を満たすとき、接線方向は滑り状態にあるものとする。

$$|\mathbf{t}_s| = -ct_n \quad (19)$$

この時、滑りは、滑り曲面の外向き法線方向ベクトルを (t_{s_1}, t_{s_2}) 平面上に射影した向きに生じるから、接線方向成分を、滑り進行方向成分とそれに直交する方向成分とに成分表示すると、滑り方向の内力-相対変位関係は、次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s,r} \\ \Delta t_{s,t} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 & 0 \\ -ck_{nn} & k_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & k_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_{s,r} \\ \Delta \delta_{s,t} \end{Bmatrix} \\ &= [{}_s k] \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_{s,r} \\ \Delta \delta_{s,t} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、

$$[{}_s k] = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 & 0 \\ -ck_{nn} & k_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & k_{st} \end{bmatrix} \quad (21)$$

また、

$$k_{nn} = k_{st} = \infty, k_{sr} = 0 \quad (22.a,b)$$

であり、添え字 $(\)_{s,r}$ は滑り進行方向成分、 $(\)_{s,t}$ は滑り進行方向に直交する成分であることを表す。(図4参照) 内力に関する座標変換式

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s_1} \\ \Delta t_{s_2} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s_1, r) & \cos(s_2, r) \\ 0 & \cos(s_1, t) & \cos(s_2, t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s,r} \\ \Delta t_{s,t} \end{Bmatrix} \\ &= [T'] \begin{Bmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s,r} \\ \Delta t_{s,t} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、

$$[T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s_1, r) & \cos(s_2, r) \\ 0 & \cos(s_1, t) & \cos(s_2, t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

及び、相対変位に関する同様な関係式を(20)式に代入すると、

$$\begin{Bmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s_1} \\ \Delta t_{s_2} \end{Bmatrix} = [T'] [{}_s k] [T']^T \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_{s_1} \\ \Delta \delta_{s_2} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

なお、滑り状態において、次式となった時、滑り状態から付着状態への状態変化が生じたものとする。

$$\Delta \delta_{s,r} < 0 \quad (26)$$

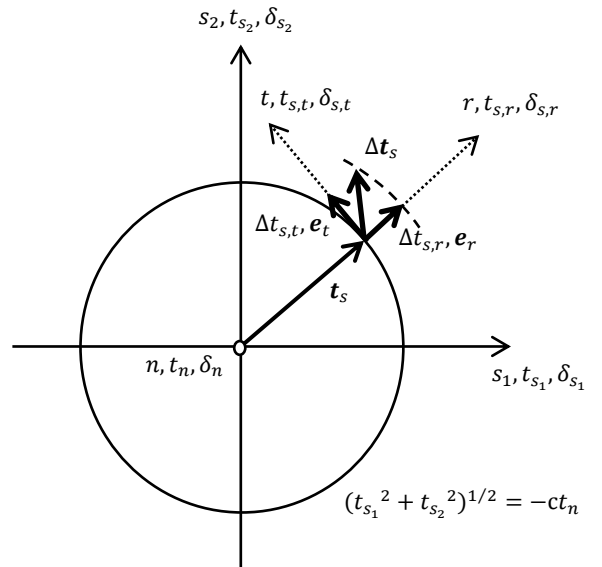


図4 滑り状態における接線方向内力の変動

3.2. 分離状態

次式が満足される時、領域(a)と領域(b)は分離状態にあるものとする

$$\delta_n \geq +0 \quad (27)$$

また、分離状態におけるバネ定数は、次式となる。

$$k_{n,n} = k_{s_1,s_1} = k_{s_2,s_2} = 0 \quad (28)$$

3.3. 状態変化について

本研究では、以下の時、接触・分離の状態変化が生じるものとする。

- $\delta_n < 0 \rightarrow \delta_n = 0$ の時
接触状態 → 分離状態への状態変化
- $\delta_n > 0 \rightarrow \delta_n = 0$ の時
分離状態 → 接触状態への状態変化

一方、クーロン摩擦を想定した場合の接触状態における滑り・付着の状態変化については、弾塑性問題における降伏、ひずみ反転についての取り扱いと同様なものとなる。

なお、本研究では、初期状態については、あらかじめ境界面の状態を設定し、設定した状態と得られた結果とが整合しない場合には、該当の領域について状態設定の変更を行い、整合状態に達するまで収斂計算を繰り返すという手法を適用しており、次報に示す数値実験では、初期状態として、摩擦 0 の場合を除いて、接触・付着状態を設定している。

4. 初期応力法を用いた反復計算の適用

前 2 節に示した定式化の方法によれば、滑り状態が出現した場合、該当の接合要素に関する要素剛性マトリクスは非対称なものとなる。これまでに本研究室で行われた数値実験から、剛性マトリクスが非対称な場合、対称な場合に比べ、逆行列の計算に要する時間、必要記憶域が共に大幅に増加することが分かっている。

本研究では、こうした問題を克服するため、滑り状態が出現した場合には、滑り方向内力に及ぼす垂直方向内力の影響を初期応力として取り扱い、反復計算により評価するという方法を用いる。

さて、(20)式で与えられていた、滑り状態にある接触点の内力 - 相対変位関係を、次式のように変更する。

$$\begin{pmatrix} \Delta t_n \\ \Delta t_{s,r} \\ \Delta t_{s,t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & k_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & k_{st} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_{s,r} \\ \Delta \delta_{s,t} \end{pmatrix} \quad (29)$$

このとき、滑り方向内力の増分： Δt_{re} は、次式のように表される。

$$\Delta t_{re} = k_{sr} \Delta \delta_{s,r} - c \Delta t_n \quad (30)$$

ここに、 k_{nn} 、 k_{sr} 、 k_{st} は(22.a,b)で与えられる量であり、(30)式の右辺第 2 項が、垂直方向内力の変動の影響を表す項である。

本研究では、剛性方程式作製時には、(29)式の関係を用い、一方、(30)式で与える Δt_{re} については、これを初期応力として取り扱い、収斂状態に達するまで反復計算を行うという手法を採用する。また、反復計算の収束判定は、次式によって行う。

$$\frac{\sqrt{([\Delta R_I] - [\Delta R_I^*]) \cdot \{[\Delta R_I] - \{\Delta R_I^*\}\}}}{\sqrt{[\Delta R_I] \cdot \{\Delta R_I\}}} < \varepsilon \quad (31)$$

ここに、 $\{\Delta R_I\}$ は、(30)式で与えられる Δt_{re} に対応する構造全体としての内力ベクトル、また、 $\{\Delta R_I^*\}$ は、前回の反復計算時における $\{\Delta R_I\}$ の値であり、 ε は、収束判定基準値である。

5. 結 び

本報(その 14)では、接触・分離、滑り・付着状態の評価のため、接触・分離する 2 つの領域間に接合要素を挿入しクーロン摩擦を考慮した定式化の方法について示した。

参考文献

- 1) 上辻真由香, 堀文, 光井周平, 河内武, 近藤一夫: 木材めり込み挙動のアイソパラメトリック有限要素解析(その 12) 等変位めり込み試験体の弾塑性挙動解析(続), 日本建築学会中国支部研究報告集, 第 36 巻, 2014.3 (CD-ROM)
- 2) 上辻真由香, 光井周平, 河内武, 近藤一夫: 木材めり込み挙動のアイソパラメトリック有限要素解析(その 13) 等変位めり込み試験体の変形特性に及ぼす繊維傾斜・年輪傾斜の影響, 日本建築学会中国支部研究報告集, 第 36 巻, 2014.3 (CD-ROM)

*1 広島大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生
*2 呉工業高等専門学校建築学分野 助教・博士(工学)
*3 広島大学大学院工学研究院 准教授・工博

*1 Graduate Student, Graduate School of Eng., Hiroshima Univ.
*2 Assistant Prof., Kure National College of Technology, Dr. Eng.
*3 Associate Prof., Faculty of Eng., Hiroshima Univ., Dr. Eng.