

気泡を含む液体中における集束超音波の 熱的効果に着目した弱非線形波動方程式の導出*

Derivation of Weakly Nonlinear Wave Equation for Focused Ultrasound
in Bubbly Liquids Incorporating a Thermal Effect

加賀見 俊介**
KAGAMI Shunsuke

金川 哲也***
KANAGAWA Tetsuya

Abstract Weakly nonlinear focusing of quasi-planar ultrasound in a liquid nonuniformly containing many spherical microbubbles is theoretically investigated with a special focus on a thermal conduction at the bubble–liquid interface toward medical applications such as tumor coagulation by HIFU. Based on the previously derived Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) equation by our group (Kanagawa, *J. Acoust. Soc. Am.*, **137** (2015), 2642), we derived a KZK equation newly incorporating the viscosity of bubbly liquids and the thermal conduction at the bubble–liquid interface by utilizing the energy equation inside bubble. As a result, two types of dissipation term were discovered in the resultant KZK equation: one is the second-order partial derivative term owing to the viscosity of bubbly liquids and the liquid compressibility and the other is a term without differentiation owing to the thermal conductivity. We found that the thermal conduction strongly contributes the dissipation effect.

Keywords: Bubbly liquid, Focused ultrasound, Weakly nonlinear wave, Thermal conduction, KZK equation

1. 緒 言

強力集束超音波 (High Intensity Focused Ultrasound: HIFU) 治療 [1–4] は、焦点近傍に集束される超音波の強力なエネルギーを利用した低侵襲的な治療法として、腫瘍の加熱焼灼などに用いられつつある。HIFU の治療効果の数値予測において、直接数値計算以外にも、単相液体中における集束超音波の弱非線形伝播を記述する Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) 方程式 [5, 6] (あるいは Westervelt 方程式) が積極的に活用されてきた(例えば [7–16])。

さらに近年、気泡の導入と気泡振動の援用によって、HIFU の治療効果の劇的な向上が注目されている [2, 3, 17–24]。その数値予測の手段として、気泡振動と HIFU の伝播を独立に解く手もある [25] が、KZK 方程式の対象媒質を、液体単相

から気泡を含む液体へと拡張することも有効といえる。著者らの先行研究で、はじめて、気泡を含む液体を対象とした KZK 方程式の導出に成功した [26–28] もの、媒質の温度変化や熱伝導といった熱的効果は無視された。しかし、たとえば腫瘍焼灼治療においては、焦点近傍は 80 度以上の高温となる [2] 場合があり、それゆえ、強い熱的効果および気泡振動を考慮した KZK 方程式の完成が望まれている。

そこで本研究では、気液界面における熱伝導 [29, 30] を考慮し、気泡を含む液体中における集束超音波を記述する KZK 方程式を、焦点近傍における振動気泡の非一様分布 [26–28] も考慮した形で導出する。

* 2020.9.23 受付

** 筑波大学システム情報工学研究群構造エネルギー工学学位プログラム 〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
TEL: (029)853-5254 FAX: (029)853-5207 E-mail: kanagawa.tetsuya.fu@u.tsukuba.ac.jp

*** 筑波大学システム情報系構造エネルギー工学域

2. 問題の定式化

2.1 問題設定

多数の球形微細気泡を含む初期静止の圧縮性液体中における超音波の弱非線形伝播(有限小振幅波[31])を考える。Fig. 1に示すように、円形の大きな音源の中心を原点とする円筒座標系を用い、超音波の伝播方向に平行な方向に x^* 軸をとり、現象は x^* 軸対称であると仮定する(*は有次元量を表す)。 x^* 軸に垂直な方向に動径 r^* をとる。以上より、独立変数は時間 t^* 、空間座標 x^* と r^* の3変数となる。さらに、音源の直径 D^* は超音波の代表的な波長 L^* よりも十分に大きく、波長 L^* は初期気泡半径 R_0^* よりも十分に長い(2.3節で詳述)ものと仮定する:

$$R_0^* \ll L^* \ll D^* \quad (1)$$

本理論は、円形音源の形状が凹面と凸面のいずれの場合でも適用可能であり、それぞれ集束と拡散といった回折を伴う超音波に対応する。集束超音波医療への応用を鑑みて、以下では、“回折”ではなく“集束”を用いるが、集束に限定されないことを注意する。式(1)のように大口径の音源を仮定した場合、集束の効果が弱くなる[26–28]。本研究では、以上のように、音源から一点へとゆっくりと集束する準一次元的な超音波の伝播に着目する。

気泡の体積振動に伴う熱的効果が超音波伝播に与える影響を記述するために、気液界面における熱伝導を記述するモデル[29]を導入する。気泡内気体の温度や圧力の分布[32]は無視する。気泡は球対称振動を保つ。気泡の並進運動および気泡に作用する抗力[33, 34]は考慮しない。気泡間の直接相互作用[35]、気泡の合体・分裂・消滅・生成・多分散性[36]は考慮しない。気泡内気体は、非凝縮性の理想気体のみで構成されており、気液界面における相変化[37]は生じない。なお、空気以外の気泡内気体として、HIFU治療においては、アルゴンなども使用されている[38]。気泡内気体の粘性係数は考慮しない。気泡流はNewton流体であると仮定し、生体組織で重要な弾性[39]は考慮しない。気泡内気体の温度変化は考慮するが、液相の温度は一定であるとする。応用先を鑑み、初期状態において、音源遠方(焦点)における気泡数密度(気泡の空間分布)の非一様性を考慮する(2.4節で詳述)[26–28]。

2.2 基礎方程式系

気相と液相を一つの混合体とみなして体積平均化する混合体モデルに基づいた質量と運動量の保

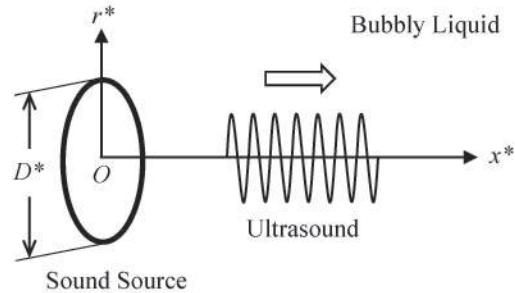


Fig. 1 Schematic of model. White arrow shows direction of ultrasound propagation.

存式を用いる[40, 41]:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^* \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^* \mathbf{u}^*) + \nabla^* p_L^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0} \quad (3)$$

ここに、 t^* は時間、 ρ^* は密度、 \mathbf{u}^* は流速ベクトル、 p^* は圧力、 $\boldsymbol{\tau}^*$ は粘性応力テンソル、下付き添え字Lは液相における物理量を表す。いくつかの補足を以下に与える。

- (i) 気相密度は液相密度よりも十分に小さいとみなし、混合体の密度 ρ^* を定義する:

$$\rho^* \equiv (1 - \alpha) \rho_L^* \quad (4)$$

ここに、 α はボイド率であり、次式で定義される:

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi R^*{}^3 n^* \quad (5)$$

ここに、 R^* は気泡の半径、 n^* は気泡の数密度であり、以下の保存則を満たす:

$$\frac{\partial n^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (n^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (6)$$

- (ii) 先行研究[26–28]で無視された気泡流の粘性を導入する。円筒座標系におけるNewton流体の粘性応力テンソルの各成分として、 τ_{xx}^* 、 τ_{xr}^* 、 τ_{rr}^* を例示する:

$$\tau_{xx}^* = -2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{2}{3}\mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \quad (7)$$

$$\tau_{xr}^* = -\mu^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{rr}^* = -2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{2}{3}\mu^* \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* \quad (9)$$

ここに、 u^* と v^* はそれぞれ x^* 方向と r^* 方向の流速であり、Stokes の仮定から体積粘性係数は無視した。初期ボイド率 α_0 （下付き添え字 0 は初期静止状態における物理量を表す）と液相の粘性係数 μ_L^* を用いて、混合体の見かけの粘性係数 μ^* を導入する [42, 43]：

$$\mu^* \equiv (1 + \alpha_0)\mu_L^* \quad (10)$$

- (iii) 混合体の圧力は、液相の圧力 p_L^* に等しいとする。

式(5)を式(6)に、後述の式(20)を式(6)に、式(4)を式(2)、(3)に、それぞれ代入すると、次式を得る：

$$\frac{\partial \alpha \rho_G^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\alpha \rho_G^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} [(1 - \alpha) \rho_L^*] + \nabla^* \cdot [(1 - \alpha) \rho_L^* \mathbf{u}^*] = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* \mathbf{u}^*] + \nabla^* \cdot [(1 - \alpha) \rho_L^* \mathbf{u}^* \mathbf{u}^*] \\ + \nabla^* p_L^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

先行研究 [44, 45] では、混合体に対するエネルギー保存式を用いたが、熱伝導の影響が小さい結果が得られたため、腫瘍焼灼などの応用には即さない。そこで本研究では、気液界面における熱伝導の影響を詳細に記述すべく、気泡内気体に対するエネルギー保存式 [29] を導入する：

$$\frac{D}{Dt^*} (p_G^* R^{3\gamma}) = 3(\gamma - 1) \lambda_G^* R^{3\gamma-1} \left. \frac{\partial T_G^*}{\partial r_G^*} \right|_{R^*} \quad (14)$$

ここに、 γ は気相の比熱比（著者らの先行研究 [26–28, 46] では γ をポリトロープ指数とした）、 λ_G^* は気相の熱伝導率、 T_G^* は気相の温度、 r_G^* は気泡中心からの半径方向距離であり、 D/Dt^* は Lagrange 微分を表す。右辺の温度勾配 $\partial T_G^*/\partial r_G^*|_{R^*}$ を、以下のモデル [30] によって書き換える：

$$\left. \frac{\partial T_G^*}{\partial r_G^*} \right|_{R^*} = - \frac{T_G^* - T_0^*}{\sqrt{2\pi D_G^*/\omega_B^*}} \quad (15)$$

ここに、 D_G^* は気相の熱拡散率である。初期温度 T_0^* は気相と液相で共通であり、本稿では、気相の温度 T_G^* の変動は考慮するが、液相の温度は初期温度 T_0^* のまま一定とする。したがって、式(15)の右辺の分子は気相と液相の温度差を表す。単一気泡の固有角振動数 ω_B^* は次式で与えられる：

$$\omega_B^* = \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}} \quad (16)$$

圧縮性液体中における気泡の体積振動を表す式として、Keller の式 [47] を導入する：

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{DR^*}{Dt^*} \right) R^* \frac{D^2 R^*}{Dt^{*2}} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{DR^*}{Dt^*} \right) \left(\frac{DR^*}{Dt^*} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{DR^*}{Dt^*} \right) \frac{P^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} \frac{D}{Dt^*} (p_L^* + P^*) \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 c_{L0}^* は初期液単相音速、 P^* は気液界面における面積平均化された液相圧力である。

基礎方程式系を閉じるために、次式(18)–(21)を導入する。

- 液相における Tait 型の状態方程式

$$p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n} \left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n - 1 \right] \quad (18)$$

ここに、 n は定数である（水の場合 $n = 7.15$ ）。

- 気相を構成する理想気体の状態方程式

$$\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \frac{T_G^*}{T_0^*} \quad (19)$$

- 気泡内気体に対する質量保存式

$$\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left(\frac{R_0^*}{R^*} \right)^3 \quad (20)$$

- 気液界面における法線方向応力のつり合い式

$$p_G^* - (p_L^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu_L^*}{R^*} \frac{DR^*}{Dt^*} \quad (21)$$

ここに、 σ^* は表面張力係数である。

2.3 パラメータスケーリング

低周波の長波に着目すべく、超音波の代表的な伝播速度 U^* 、周波数 ω^* 、波長 L^* を、無次元振幅 ϵ ($\ll 1$) を基準として無次元化する [26–28, 41, 46]：

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv V \sqrt{\epsilon} \quad (22)$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Omega \sqrt{\epsilon} \quad (23)$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv A \sqrt{\epsilon} \quad (24)$$

ここに、 V 、 Ω 、 A はいずれも $O(1)$ の無次元数である。また、円形音源の直径 D^* についても、以下のように無次元化する [26–28]：

$$\frac{L^*}{D^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Gamma \sqrt{\epsilon} \quad (25)$$

ここに、 Γ は動径方向 r への弱い集束の度合いを表す $O(1)$ の無次元数であり、式(24)、(25)は確かに

に式(1)を満たしている。液相の粘性係数 μ_L^* は以下のよう無次元化する [26–28, 41, 46]:

$$\frac{\mu_L^*}{\rho_{L0}^* U^* L^*} = \mu_L \epsilon \quad (26)$$

本稿では、エネルギー方程式(14)、(15)を用いるため、新たな無次元数を導入する [48]:

$$\frac{3(\gamma - 1)\lambda_G^*}{p_{G0}^* \omega^* R_0^*} \frac{T_0^*}{\sqrt{2\pi D_G^*/\omega_B^*}} = C\epsilon \quad (27)$$

ここに、 C は気液界面における熱伝導に関連した $O(1)$ の無次元数である。

2.4 多重尺度解析

まず、独立変数 t^* 、 x^* 、 r^* を無次元化する:

$$t = \frac{t^*}{T^*}, \quad x = \frac{x^*}{L^*}, \quad r = \frac{r^*}{L^*} \quad (28)$$

ここに、 T^* は超音波の代表的な周期であり、伝播速度 U^* 、波長 L^* との間に $U^* = L^*/T^*$ が成り立つ。つづいて、無次元振幅 $\epsilon (\ll 1)$ を用いて、無次元化された独立変数 t と x を、近傍場と遠方場を表す独立変数に拡張する [31]:

$$t_0 = t, \quad x_0 = x; \quad t_1 = \epsilon t, \quad x_1 = \epsilon x \quad (29)$$

動径 r 方向の独立変数 $r_{1/2}$ を定義する:

$$r_{1/2} = \sqrt{\epsilon} \Gamma r \quad (30)$$

$r_{1/2}$ は遠方を記述し、スケーリング(25)が

$$r = \frac{D^*}{L^*} \frac{r^*}{D^*} = \frac{r_{1/2}}{\sqrt{\epsilon} \Gamma} \quad \left(r_{1/2} \equiv \frac{r^*}{D^*} \right) \quad (31)$$

のとおり取り込まれている [26–28]。弱集束の仮定(25)によって、音源遠方において従属変数の r 依存性がはじめて現れる(3.2節)。式(29)、(30)より、偏微分演算子が展開される(微分展開法) [31]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \sqrt{\epsilon} \Gamma \frac{\partial}{\partial r_{1/2}} \end{aligned} \quad (32)$$

拡張された独立変数(29)、(30)の関数とみなさ

れた従属変数を、 ϵ のべき乗に展開する:

$$\frac{T_G^*}{T_0^*} = 1 + \epsilon T_{G1} + \epsilon^2 T_{G2} + O(\epsilon^3) \quad (33)$$

$$\frac{R^*}{R_0^*} = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + O(\epsilon^3) \quad (34)$$

$$\frac{U^*}{U^*} = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + O(\epsilon^3) \quad (35)$$

$$\frac{v^*}{U^*} = \epsilon^{3/2} v_1 + \epsilon^{5/2} v_2 + O(\epsilon^{7/2}) \quad (36)$$

$$\frac{p_L^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} = p_{L0} + \epsilon p_{L1} + \epsilon^2 p_{L2} + O(\epsilon^3) \quad (37)$$

式(35)、(36)は、 x 方向の流速よりも、 r 方向の流速の方が変動が小さいことを示す。初期の液相と気相の無次元圧力を定義する:

$$p_{L0} = \frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1), \quad p_{G0} = \frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1) \quad (38)$$

液相密度については以下のように展開する:

$$\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} = 1 + \epsilon^2 \rho_{L1} + \epsilon^3 \rho_{L2} + O(\epsilon^4) \quad (39)$$

液相密度に限り ϵ の 2 次から展開しているが、これは式(18)、(22)、(37)から一意に定まる [46]。

初期の気泡数密度の弱い非一様性を考慮し、ボイド率は以下のように展開する [26–28]:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha_0} &= 1 + \epsilon [\alpha_1(t_0, t_1, x_0, x_1, r_{1/2}) + \delta(x_1)] \\ &\quad + \epsilon^2 \alpha_2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、 δ は初期の気泡空間分布の非一様性を表す既知関数である。非一様性の影響は、遠方場(焦点近傍)においてのみ現れる仮定より、 δ は x_1 のみの関数とした [26–28]。初期気泡径は一様であるため、式(5)、(40)より、ボイド率の初期非一様性 $\delta(x_1)$ は、数密度 n^* の初期非一様性 $n_0^*(x_1)$ と関係づけられる:

$$\frac{n_0^*(x_1)}{n_{00}^*} - 1 = \epsilon \delta(x_1) \ll 1 \quad (41)$$

ここに、 n_{00}^* は n_0^* の平均値(定数)である。

3. 解析結果

微分展開法(32)、摂動展開(33)–(40)、スケーリング(22)–(27)を、基礎方程式(11)–(21)に代入し、無次元振幅 ϵ のオーダごとに、順次、以下の近似方程式が導かれる。

3.1 近傍場の近似

$O(\epsilon^1)$ の近似から、近傍場の独立変数 t_0 と x_0 により記述される以下の線形方程式系が、それぞれ式(11)–(14) と (17) に対応する形で導かれる：

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} = 0 \quad (42)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_0} = 0 \quad (43)$$

$$(1 - \alpha_0) \frac{\partial u_1}{\partial t_0} + \frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial T_{G1}}{\partial t_0} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R_1}{\partial t_0} = 0 \quad (45)$$

$$-\frac{A^2}{Q^2} R_1 - p_{L1} + p_{G0} T_1 + 3(\gamma - 1) p_{G0} R_1 = 0 \quad (46)$$

弱い集束の仮定(2.1節)により、近傍場において r 方向の変動は表れず、式(42)–(44) は平面波に対する先行研究[41]と同一の表式となった。一方、エネルギー方程式(14)の導入によって、線形化エネルギー方程式(45)が新たに現れた。また、線形化 Keller の式(46)に、温度変化に関する第3項と比熱比に関連する第4項が加わった。式(42)–(46)を R_1 に関する単一の方程式にまとめる：

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} \right) = 0 \quad (47)$$

両辺を t_0 で積分し、無限遠における静止の仮定を用いれば、 R_1 に関する線形波動方程式を得る：

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0 \quad (48)$$

ここに、位相速度 v_p は以下で与えられる：

$$v_p = \frac{A/\Omega}{\sqrt{3}\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (49)$$

簡単のために $v_p \equiv 1$ と定めれば、超音波の代表的な伝播速度 U^* は以下のように表される：

$$U^* = \frac{R_0^* \omega_B^*}{\sqrt{3}\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (50)$$

つづいて、変数変換

$$\phi_0 = t_0 - x_0 \quad (51)$$

を導入し、右向き進行波を記述する次式を得る：

$$\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0 \quad (52)$$

式(52)の一般解は次式で与えられる：

$$R_1 = f(\phi_0; t_1, x_1, r_{1/2}) \quad (53)$$

式(53)を式(42)–(46)に代入すると、 R_1 以外の1次の変動が f の定数倍として表現できる：

$$T_{G1} = -3(\gamma - 1)f \quad (54)$$

$$u_1 = -3\alpha_0 f \quad (55)$$

$$p_{L1} = -3\alpha_0(1 - \alpha_0)f \quad (56)$$

$$\alpha_1 = 3(1 - \alpha_0)f \quad (57)$$

3.2 動径方向の近似 [26–28]

$O(\epsilon^{3/2})$ の近似においては、運動量保存式(13)の r 方向成分から、以下の1式のみが得られる：

$$(1 - \alpha_0) \frac{\partial v_1}{\partial t_0} + \Gamma \frac{\partial p_{L1}}{\partial r_{1/2}} = 0 \quad (58)$$

独立変数 $r_{1/2}$ が現れ、従属変数の r 方向の依存性がはじめて現れた。式(58)に、前節と同様の変数変換(51)を行い、式(56)を代入する：

$$\frac{\partial v_1}{\partial \phi_0} = 3\Gamma\alpha_0 \frac{\partial f}{\partial r_{1/2}} \quad (59)$$

3.3 遠方場の近似

$O(\epsilon^2)$ の近似から、以下の方程式系が導かれる：

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_2}{\partial t_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} = K_1 \quad (60)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_2}{\partial x_0} = K_2 \quad (61)$$

$$(1 - \alpha_0) \frac{\partial u_2}{\partial t_0} + \frac{\partial p_{L2}}{\partial x_0} = K_3 \quad (62)$$

$$\frac{\partial T_{G2}}{\partial t_0} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R_2}{\partial t_0} = K_4 \quad (63)$$

$$-\frac{A^2}{Q^2} R_2 - p_{L2} + p_{G0} T_2 + 3(\gamma - 1) p_{G0} R_2 = K_5 \quad (64)$$

右辺の非同次項は、それぞれ次式で与えられる：

$$\begin{aligned} K_1 &= 3 \frac{\partial \alpha_1 R_1}{\partial t_0} - 6 \frac{\partial R_1^2}{\partial t_0} - \frac{\partial \alpha_1 u_1}{\partial x_0} + 3 \frac{\partial R_1 u_1}{\partial x_0} \\ &\quad + \delta(x_1) \left(3 \frac{\partial R_1}{\partial t_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} \\ &\quad + 3 \frac{\partial R_1}{\partial t_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \Gamma \left(\frac{v_1}{r_{1/2}} + \frac{\partial v_1}{\partial r_{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= (1 - \alpha_0) \frac{\partial \rho_{L1}}{\partial t_0} - \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1 u_1}{\partial x_0} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} \\ &\quad - \alpha_0 \delta(x_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \Gamma(1 - \alpha_0) \left(\frac{v_1}{r_{1/2}} + \frac{\partial v_1}{\partial r_{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

$$K_3 = \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1 u_1}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_1^2}{\partial x_0} + \frac{4}{3} (1 + \alpha_0) \mu_L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_0^2} + \alpha_0 \delta(x_1) \frac{\partial u_1}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \frac{\partial p_{L1}}{\partial x_1} \quad (67)$$

$$K_4 = -3(\gamma - 1) \frac{\partial T_{G1} R_1}{\partial t_0} - 3(\gamma - 1) u_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - u_1 \frac{\partial T_{G1}}{\partial x_0} - \frac{(3\gamma - 3)(3\gamma - 4)}{2} \frac{\partial R_1^2}{\partial t_0} - \frac{\partial T_{G1}}{\partial t_1} - 3(\gamma - 1) \frac{\partial R_1}{\partial t_1} - C T_{G1} \quad (68)$$

$$K_5 = A^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - V A \frac{\partial p_{L1}}{\partial t_0} + 3 p_{G0} R_1 T_1 - 3 p_{G0} (2 - \gamma) R_1^2 - \frac{A^2}{\Omega^2} R_1^2 + 4 \mu_L \frac{\partial R_1}{\partial t_0} \quad (69)$$

式(60)–(69)を單一方程式にまとめる:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} - K(f; \phi_0, t_1, x_1, r_{1/2}) \right] = 0 \quad (70)$$

非同次項 $K(f; \phi_0, t_1, x_1, r_{1/2})$ は次式で与えられる:

$$K = -\frac{1}{3} \frac{\partial K_1}{\partial t_0} + \frac{1}{3\alpha_0} \frac{\partial K_2}{\partial t_0} + \frac{1}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \frac{\partial K_3}{\partial x_0} - \frac{p_{G0}}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \int \frac{\partial^2 K_4}{\partial x_0^2} dt_0 + \frac{1}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \frac{\partial^2 K_5}{\partial x_0^2} \quad (71)$$

式(48)の導出と同様の手順から、次式を得る:

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} = K(f; \phi_0, t_1, x_1, r_{1/2}) \quad (72)$$

式(72)に対する可解条件より、 $K = 0$ が課される [26, 28, 46]。式(71)に式(65)–(69)を代入し、 $K = 0$ を課すと、次式を得る:

$$K = -2 \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} + [\Pi_0 + \Pi_4 \delta(x_1)] \frac{\partial f}{\partial \phi_0} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \phi_0} + \Pi_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_0^2} + \Pi_{22} f + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \phi_0^3} \right\} + \Gamma^2 \frac{1}{r_{1/2}} \frac{\partial}{\partial r_{1/2}} \left(r_{1/2} \frac{\partial f}{\partial r_{1/2}} \right) = 0 \quad (73)$$

3.4 KZK 方程式

微分展開法(32)を利用して、近傍場の式(52)、動径方向の式(59)、遠方場の式(73)を接続する:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \epsilon \left\{ [\Pi_0 + \Pi_4 \delta(x_1)] \frac{\partial f}{\partial t} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial t} + \Pi_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Pi_{22} f + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right\} \right] = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (74)$$

最終的に、KZK 方程式が導かれた:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_{21} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + \Pi_{22} f + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3} \right) \\ = \frac{\Gamma^2}{2\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

ここに、独立変数は以下の変数変換を用いた:

$$\begin{aligned} \tau &= t - \{1 + \epsilon[\Pi_0 + \Pi_4 \delta(x_1)]\}x, \\ \xi &= \epsilon x, \quad \zeta = \sqrt{\epsilon} \Gamma r \end{aligned} \quad (76)$$

応用の観点から、遅延時間 τ 基準の変換を採用した。左辺の定数係数は次式で与えられる:

$$\Pi_0 = \frac{(1 - \alpha_0)^2 V^2}{2} \quad (77)$$

$$\Pi_4 = \frac{1 - 2\alpha_0}{2(1 - \alpha_0)} \quad (78)$$

$$\Pi_1 = 1 + \frac{(3\gamma + 4)(\gamma - 1)}{2\alpha_0(1 - \alpha_0)} p_{G0} + \frac{[3(2 - \gamma)p_{G0} + A^2/\Omega^2]}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (79)$$

$$\Pi_{21} = -\frac{1}{6\alpha_0(1 - \alpha_0)} \left[4\mu_L \alpha_0 (1 + \alpha_0) + 4\mu_L + \frac{V A^3}{\Omega^2} \right] \quad (80)$$

$$\Pi_{22} = \frac{C p_{G0} (\gamma - 1)}{2\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (81)$$

$$\Pi_3 = -\frac{A^2}{6\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (82)$$

Π_0 と Π_4 はともに移流係数、 Π_1 は非線形係数、 Π_{21} と Π_{22} はともに散逸係数、 Π_3 は分散係数である。係数(77)–(82)は、気相の比熱比 γ や粘性係数 μ_L などの物性値を含むため、使用する気体の種類に応じて、係数の値が変化することを注意しておく。気泡数密度の非一様性 $\delta(x_1)$ は変数変換(76)に現れ、移流に寄与する [26–28]。式(75)の右辺は、動径方向への集束(回折)を表す($\Gamma \rightarrow 0$ のとき平面波 [41, 48] に帰着)。式(75)は、非線形性、散逸性、分散性、集束性、非一様性の線形結合で表現されており、これら 5 つの性質の競合を表す。

Fig. 2 の(a)(b)(c)に非線形係数 Π_1 、散逸係数 Π_{21} 、 Π_{22} の初期気泡径 R_0^* 依存性をそれぞれ示す。エネルギー方程式(14)の導入によって、 Π_1 に比熱比に関連する項(式(79)の第2項)が加わった。散逸係数 Π_{21} は界面粘性、パルクの粘性 [44]、液相の圧縮性(音響放射)に起因する散逸効果を表し(式(80)の大括弧[]内の第1、2、3項)、これらの線形和で表現されている。Fig. 2(b)では、これら 3 要因ごとに示した。

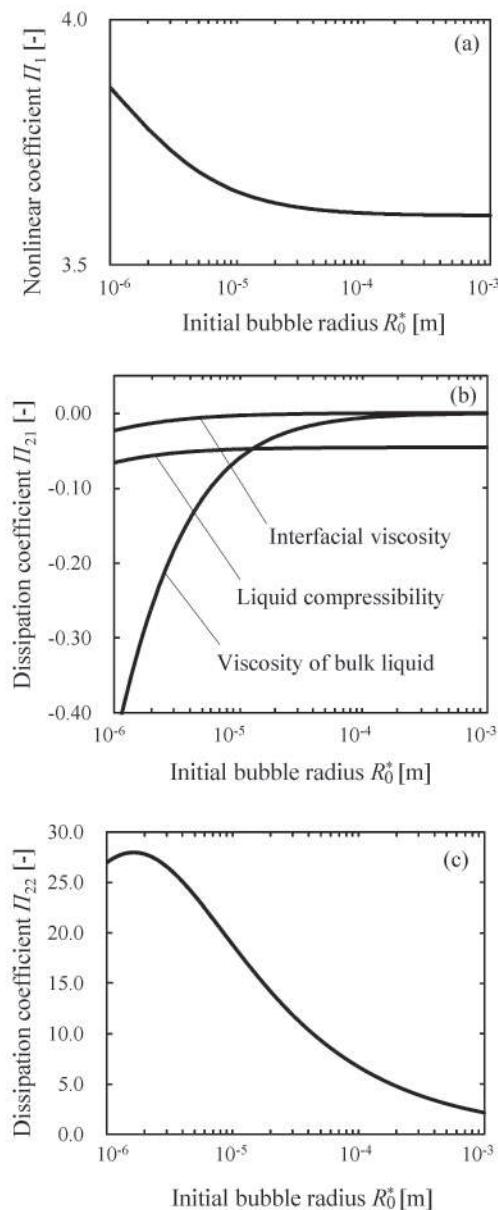


Fig. 2 (a) Nonlinear and (b)(c) dissipation coefficients versus the initial bubble radius R_0^* for the case of $\alpha_0 = 0.05$, $\sqrt{\epsilon} = 0.15$, and the normal condition of air–water system ($T_0^* = 300\text{ K}$, $p_{L0}^* = 101325\text{ Pa}$, $\rho_{L0}^* = 1000\text{ kg/m}^3$, $c_{L0}^* = 1500\text{ m/s}$, $\mu_L^* = 0.001\text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\sigma^* = 0.0728\text{ N/m}$, $\gamma = 1.4$, $\lambda_G^* = 0.025\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, and $D_G^* = 1.938 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$).

その一方で、式(75)左辺第4項に、新しい散逸項 $\Pi_{22}f$ が現れた[48]。 Π_{22} は熱伝導に関連する無次元数 C (式(27))を含む。 Π_{21} と Π_{22} を比べると、熱伝導起因の散逸係数 Π_{22} の方が極めて大きくなつた[48]。もちろん、式(75)の左辺第3項と第4項は、項の形自体が違うため、係数の比較ではなく、項全体で大きさを比較せねばならず、その詳細は続報で述べる。それでも、係数 Π_{21} と Π_{22} の値だけを比べても、 Π_{22} の値が相対的に極めて大きいことは、重要な結果である。以上より、本モデル式(75)は、集束超音波の焦点近傍(遠方場)に非一様に分布する気泡の振動、および、その気液界面における熱伝導とそれに伴う大きな温度変化を表現可能なモデルといえる。腫瘍焼灼治療への応用(1節)の観点からも、有用性が期待される。

4. 結 言

多数の球形微細気泡を含む圧縮性液体中において、弱い集束性を伴う超音波の弱非線形伝播を、気液界面における熱伝導[29, 30]にとくに着目し、理論的に調べた。その結果、KZK 方程式(75)が導かれ、非線形項、2種類の散逸項、分散項、集束項、気泡数密度の焦点近傍での非一様性の線形和で表現された。偏微分を含まない散逸項が、熱伝導による散逸を表現する項として新たに表れ、その定数係数 Π_{22} の絶対値が、粘性と音響放射による散逸項の係数 Π_{21} に比べ相対的に極めて大きいことから、熱伝導が散逸性に大きく寄与するモデル作成に成功した。

今後の展望として、式(75)の数値解を求め[48]、熱伝導、粘性、音響放射の各要因により HIFU のエネルギーが、どの程度の熱に変換されるか、定量的に比較する。また、生体組織の弾性[39]などの考慮も重要である。さらには、腫瘍焼灼治療を想定した数値シミュレーションを実際にを行い、気泡増強型の HIFU により、どの程度の温度上昇が期待できるかを明らかにし、式(75)の有用性の検証を行う。

謝 辞

科研費(18K03942)とカシオ科学振興財団の助成を受けた。

Nomenclature

C, V	: nondimensional constants	[\cdot]
c_{L0}^*	: speed of sound	[m/s]
D^*	: diameter of sound source	[m]
D_G^*	: thermal diffusivity	[m ² /s]
L^*	: typical wavelength	[m]
n^*	: number density of bubbles	[/m ³]
n	: material constant	[\cdot]
p^*	: volume averaged pressure	[Pa]
P^*	: surface averaged liquid pressure	[Pa]
r^*	: radial distance from x^* -axis	[m]
r_G^*	: radial distance from center of bubble	[m]
R^*	: bubble radius	[m]
t^*	: time	[s]
T_G^*	: temperature	[K]
T^*	: typical period of wave	[s]
u^*, v^*	: fluid velocity in x^* and r^* directions	[m/s]
U^*	: typical propagation speed of wave	[m/s]
v_p	: phase velocity	[\cdot]
x^*	: space coordinate	[m]

Greek letters

α	: void fraction	[\cdot]
γ	: ratio of specific heats	[\cdot]
Γ, Δ, Ω	: nondimensional constants	[\cdot]
δ	: nonuniformity of bubble distribution	[\cdot]
ϵ	: nondimensional wave amplitude	[\cdot]
λ^*	: thermal conductivity	[W/(m · K)]
μ^*	: viscosity of bubbly liquid	[Pa · s]
ξ, ζ	: transformed space coordinates	[\cdot]
ρ^*	: density	[kg/m ³]
σ^*	: surface tension	[N/m]
τ	: retarded time	[\cdot]
τ^*	: viscous stress tensor	[Pa]
ω^*	: incident wave frequency	[1/s]
ω_B^*	: eigenfrequency of single bubble	[1/s]

Superscripts and Subscripts

G, L	: gas and liquid phases
0	: initial unperturbed state
$*$: dimensional quantity

参考文献

- [1] ter Haar, G., Therapeutic Ultrasound, Eur. J. Ultrasound, Vol. 9(1), 3–9 (1999).
- [2] Matsumoto, Y., Medical Application of Fluid Dynamics (Diagnostic and Therapeutic Integrated System by Ultrasound), Trans. JSME Ser. B, Vol. 77(782), 1868–1878 (2011).
- [3] Umemura, S., Yoshizawa, S., Takagi, R., Inaba, Y. and Yasuda, J., Enhancement of Focused Ultrasound Treatment by Acoustically Generated Microbubbles, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 52, 07HA02 (2013).
- [4] Kok, H. P., Cressman, E. N. K., Ceelen, W., Brace, C. L., Ivkovic, R., Grüll, H., ter Haar, G., Wust, P. and Crezee, J., Heating Technology for Malignant Tumors: A Review, Int. J. Hyperth., Vol. 37(1), 711–741 (2020).
- [5] Zabolotskaya, E. A. and Khokhlov, R. V., Quasi-Plane Waves in the Nonlinear Acoustics of Confined Beams, Sov. Phys. Acoust., Vol. 15, 35–40 (1969).
- [6] Kuznetsov, V. P., Equation of Nonlinear Acoustics, Sov. Phys. Acoust., Vol. 16, 467–470 (1971).
- [7] Averkiou, M. A. and Cleveland, R. O., Modeling of an Electrohydraulic Lithotripter with the KZK Equation, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 106(1), 102–112 (1999).
- [8] Khokhlova, V., Bailey, M., Reed, J., Cunitz, B., Kaczkowski, P. and Crum, L., Effects of Nonlinear Propagation, Cavitation, and Boiling in Lesion Formation by High Intensity Focused Ultrasound in a Gel Phantom, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119(3), 1834–1848 (2006).
- [9] Solovchuk, M., Sheu, T. W. and Thiriet, M., Simulation of Nonlinear Westervelt Equation for the Investigation of Acoustic Streaming and Nonlinear Propagation Effects, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 134(5), 3931–3942 (2013).
- [10] Solovchuk, M. A., Hwang, S. C., Chang, H., Thiriet, M. and Sheu, T. W. H., Temperature Elevation by HIFU in ex Vivo Porcine Muscle: MRI Measurement and Simulation Study,

- Med. Phys., Vol. 41(5), 052903 (2014).
- [11] Gu, J. and Jing, Y., Modeling of Wave Propagation for Medical Ultrasound: A Review, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, Vol. 62(11), 1979–1992 (2015).
- [12] Solovchuk, M., Sheu, T. W.-H. and Thiriet, M., Multiphysics Modeling of Liver Tumor Ablation by High Intensity Focused Ultrasound, Commun. Comput. Phys., Vol. 18(4), 1050–1071 (2015).
- [13] Haddadi, S. and Ahmadian, M. T., Numerical and Experimental Evaluation of High-Intensity Focused Ultrasound-Induced Lesions in Liver Tissue Ex Vivo, J. Ultrasound Med., Vol. 37(6), 1481–1491 (2018).
- [14] Li, Y., Tao, C., Ma, Q., Guo, G., Zhang, D. and Hu, J., Nonlinear Acoustic-Power Measurement Based on Fundamental Focal Axial Vibration Velocity for High-Intensity Focused Ultrasound, J. Appl. Phys., Vol. 124, 214905 (2018).
- [15] Yoon, K., Lee, W., Croce, P., Cammalleri, A. and Yoo, S. S., Multi-Resolution Simulation of Focused Ultrasound Propagation through Ovine Skull from a Single-Element Transducer, Phys. Med. Biol., Vol. 63(10), 105001 (2018).
- [16] Namakshenas, P. and Mojra, A., Microstructure-Based Non-Fourier Heat Transfer Modeling of HIFU Treatment for Thyroid Cancer, Comput. Methods Progr. Biomed., Vol. 197, 105698 (2020).
- [17] Fry, F. J., Sanghvi, N. T., Foster, R. S., Bahrle, R. and Hennige, C., Ultrasound and Microbubbles: Their Generation, Detection and Potential Utilization in Tissue and Organ Therapy-Experimental, Ultrasound Med. Biol., Vol. 21(9), 1227–1237 (1995).
- [18] Sokka, S. D., King, R. and Hynynen, K., MRI-Guided Gas Bubble Enhanced Ultrasound Heating in vivo Rabbit Thigh, Phys. Med. Biol., Vol. 48(2), 223–241 (2003).
- [19] Melodelima, D., Chapelon, J. Y., Theillere, Y. and Cathignol, D., Combination of Thermal and Cavitation Effects to Generate Deep Lesions with an Endocavitory Applicator Using a Plane Transducer: Ex Vivo Studies, Ultrasound Med. Biol., Vol. 30(1), 103–111 (2004).
- [20] Jolesz, F. A., MRI-Guided Focused Ultrasound Surgery, Annu. Rev. Med., Vol. 60, 417–430 (2009).
- [21] Inaba, Y., Yoshizawa, S. and Umemura, S., Coagulation of Large Regions by Creating Multiple Cavitation Clouds for High Intensity Focused Ultrasound Treatment, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 49, 07HF22 (2010).
- [22] Kajiyama, K., Yoshinaka, K., Takagi, S. and Matsumoto, Y., Micro-Bubble Enhanced HIFU, Phys. Procedia, Vol. 3(1), 305–314 (2010).
- [23] Takagi, R., Yoshizawa, S. and Umemura, S., Enhancement of Localized Heating by Ultrasonically Induced Cavitation in High Intensity Focused Ultrasound Treatment, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 49, 07HF21 (2010).
- [24] Bader, K. B., Vlaisavljevich, E. and Maxwell, A. D., For Whom the Bubble Grows: Physical Principles of Bubble Nucleation and Dynamics in Histotripsy Ultrasound Therapy, Ultrasound Med. Biol., Vol. 45(5), 1056–1080 (2019).
- [25] Vanhille, C. and Hynynen, K., Numerical Simulations of the Nonlinear Interaction of a Bubble Cloud and a High Intensity Focused Ultrasound Field, Acoustics, Vol. 1(4), 825–836 (2019).
- [26] Kanagawa, T., Yano, T., Watanabe, M. and Fujikawa, S., Nonlinear Wave Equation for Ultrasound Beam in Nonuniform Bubbly Liquids, J. Fluid Sci. Technol., Vol. 6(2), 279–290 (2011).
- [27] Yano, T., Kanagawa, T., Watanabe, M. and Fujikawa, S., Nonlinear Wave Propagation in Bubbly Liquids, in Bubble Dynamics and Shock Waves, Edited by Delale, C. F., Shock Wave Science and Technology Reference Library, Vol. 6, Chap. 4, 107–140, Springer, Heidelberg (2013).
- [28] Kanagawa, T., Two Types of Nonlinear Wave Equations for Diffractive Beams in Bubbly Liquids with Nonuniform Bubble Number Density, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 137(5),

- 2642–2654 (2015).
- [29] Prosperetti, A., The Thermal Behaviour of Oscillating Gas Bubbles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 222, 587–616 (1991).
- [30] Lertnuwat, B., Sugiyama, K. and Matsumoto, Y., Modelling of Thermal Behavior Inside a Bubble, *Proc. 4th Int. Symp. Cavitation*, B6.002 (2001).
- [31] Jeffrey, A. and Kawahara, T., Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, London (1982).
- [32] Zhou, G. and Prosperetti, A., Modelling the Thermal Behaviour of Gas Bubbles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 901, R3 (2020).
- [33] Yatabe, T., Kanagawa, T. and Ayukai, T., Theoretical Elucidation of Effect of Drag Force and Translation of Bubble on Weakly Nonlinear Pressure Waves in Bubbly Flows, *Phys. Fluids*, Vol. 33(3), 033315 (2021).
- [34] Yatabe, T., Kanagawa, T. and Ayukai, T., Numerical Study on Weakly Nonlinear Evolution of Pressure Waves in Water Flows Containing Many Translational Bubbles Acting a Drag Force, *Jpn. J. Multiphase Flow*, Vol. 35(2), 356–364 (2021).
- [35] Fuster, D., Conoir, J. M. and Colonius, T., Effect of Direct Bubble–Bubble Interactions on Linear-Wave Propagation in Bubbly Liquids, *Phys. Rev. E*, Vol. 90(6), 063010 (2014).
- [36] Kanagawa, T., Ayukai, T., Kawame, T. and Ishitsuka, R., Weakly Nonlinear Theory on Pressure Waves in Bubbly Liquids with a Weak Polydispersity, *Int. J. Multiphase Flow*, in press (2021).
- [37] Fuster, D. and Montel, F., Mass Transfer Effects on Linear Wave Propagation in Diluted Bubbly Liquids, *J. Fluid Mech.*, Vol. 779, 598–621 (2015).
- [38] Matsumoto, Y., Allen, J. S., Yoshizawa, S., Ikeda, T. and Kaneko, Y., Medical Ultrasound with Microbubbles, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, Vol. 29, 255–265 (2005).
- [39] Liang, B., Zou, X. Y. and Cheng, J. C., Effective Medium Method for Sound Propagation in a Soft Medium Containing Air Bubbles, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 124(3), 1419–1429 (2008).
- [40] Kataoka, I., Modelling and Basic Equations of Gas–Liquid Two-Phase Flow, *Jpn. J. Multiphase Flow*, Vol. 5(1), 3–32 (1991).
- [41] Kanagawa, T., Watanabe, M., Yano, T. and Fujikawa, S., Nonlinear Wave Equations for Pressure Wave Propagation in Liquids Containing Gas Bubbles (Comparison between Two-Fluid Model and Mixture Model), *J. Fluid Sci. Technol.*, Vol. 6(6), 838–850 (2011).
- [42] Schowalter, W. R., Chaffey, C. E. and Brenner H., Rheological Behavior of a Dilute Emulsion, *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 26(2), 152–160 (1968).
- [43] Choi S. J. and Schowalter W. R., Rheological Properties of Nondilute Suspensions of Deformable Particles, *Phys. Fluids*, Vol. 18(4), 420–427 (1975).
- [44] Kamei, T. and Kanagawa, T., Two Types of Nonlinear Pressure Waves in Bubbly Liquids Incorporating Viscosity and Thermal Conductivity, *ASME Proc. Ser. 5, AJKFLUIDS2019*–4663 (2019).
- [45] Kamei, T. and Kanagawa, T., Theoretical Study on an Effect of Liquid Viscosity and Thermal Conductivity on Weakly Nonlinear Propagation of Short Pressure Waves in Bubbly Liquids, *Jpn. J. Multiphase Flow*, Vol. 34(1), 148–157 (2020).
- [46] Kanagawa, T., Yano, T., Watanabe, M. and Fujikawa, S., Unified Theory Based on Parameter Scaling for Derivation of Nonlinear Wave Equations in Bubbly Liquids, *J. Fluid Sci. Technol.*, Vol. 5(3), 351–369 (2010).
- [47] Keller, J. B. and Kolodner, I. I., Damping of Underwater Explosion Bubble Oscillations, *J. Appl. Phys.*, Vol. 27(10), 1152–1161 (1956).
- [48] Kamei, T., Kanagawa, T. and Ayukai, T., An Exhaustive Theoretical Analysis of Thermal Effect inside Bubbles for Weakly Nonlinear Pressure Waves in Bubbly Liquids, *Phys. Fluids*, Vol. 33(5), 053302 (2021).

会 告

訂正のお知らせ

「混相流」誌の投稿規定第7条に則り、第35卷第2号に掲載された論文の著書より正誤訂正の申し出がありましたので、ここに掲載致します。

『混相流』誌第35卷2号 pp. 346-355 の掲載論文「気泡を含む液体中における集束超音波の熱的効果に着目した弱非線形波動方程式の導出」における訂正事項

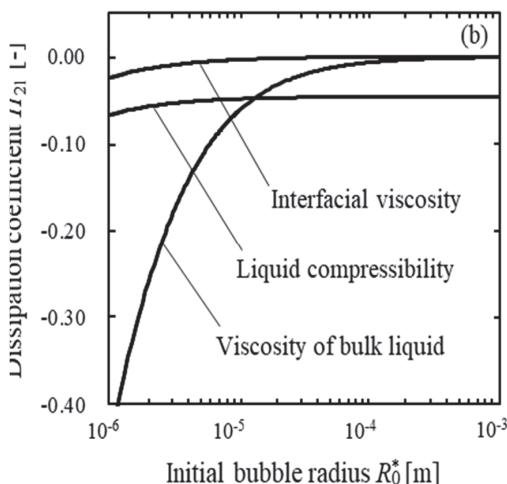
1. 351ページ右段 最終段落 5行目

(誤) 散逸係数 Π_{21} は界面粘性、バルクの粘性 [44]、液相の圧縮性（音響放射）に起因する散逸効果を表し（式(80)の大括弧〔〕内の第1、2、3項）、これらの線形和で表現されている。

(正) 散逸係数 Π_{21} はバルクの粘性 [44]、界面粘性、液相の圧縮性（音響放射）に起因する散逸効果を表し（式(80)の大括弧〔〕内の第1、2、3項）、これらの線形和で表現されている。

2. 352ページ左段 図2(b)の図中において、Interfacial viscosityとViscosity of bulk liquidを逆にしておりました。

(誤)



(正)

