ゲーム木の平均分岐数と複雑さについて

Average Branch Number and the Complexity of Game Trees

大槻 正伸・小泉 康一
福島工業高等専門学校 電気電子システム工学科
OHTSUKI Masanobu, KOIZUMI Koichi
National Institute of Technology, Fukushima College

（2020年 9月18日受理）

We discuss about the relation between the average branch number and the leaf number of trees. The leaf number of a game tree is used to measure the complexity of the game.

We show that the leaf number of a tree cannot be evaluated only by the average branch number and the height of it. Precisely we show that for any rational number $\alpha(\geq 2)$, and for any integer $d(\geq 2)$, there exists a tree of average branch number α and height d which has the minimum leaf number, but there is no such a tree which has the maximum leaf number, i.e. for any large number L_0, there exists a tree of average branch number α and height d which has more leaves than L_0.

Key words: Average branch number, Game tree, Complexty of games

1. はじめに

将棋、チェス、囲碁、チェッカー等の完全情報 2 人零和ゲーム[3]の複雑さを計量するのに、よく

（1）ルール上可能な局面の数[2)4)]

（2）ゲーム木の大きさ[1)3)7)9)]

が用いられる。

ゲーム木とは、Fig.1 のような、初期局面を根（ルート）とし、各手ごとに枝分かれしていく、ゲーム特有の木構造のグラフのことである。ゲーム木では節点（ノード）は局面を、枝（ブランチ）はルール上可能な手を意味する。ゲーム木はゲームそのものの数学的解析（ゲームの完全解析、複雑さの解析等）や、ゲームをプレイする強いコンピュータアルゴリズムの設計等に用いられる[3)6)]。

ゲームの複雑さを計量するときの「ゲーム木の大きさ（上記（２））」という場合、

（２－１）ゲーム木の全節点数

を意味することもあるし、

（２－２）葉（ゲームが終了した節点）の数

のこともある。

特に後者の「葉の数」は、初期局面からゲームが終了するまでの「ルール上可能な棋譜（ゲームの流れ）

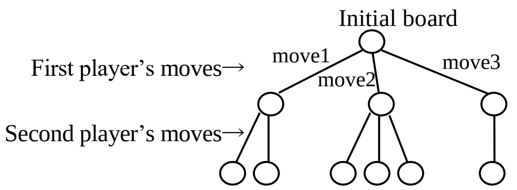


Fig.1 An example of a game tree

の種類数」を意味する。全節点数も、葉の数も、複雑なゲームではおおよそ同程度のオーダーになるため、葉の数で複雑さを計量することも多い。

さて、よく論文や本、雑誌などで「将棋の複雑さはおおよそ『あから』（阿伽羅＝10^{224}）である」などと言われる。その根拠は「将棋というゲームはルール上指すことができる手が平均約 80 通りあり、ゲームが始まってから終了するまで平均 115 手前後かかる。したがって将棋の場合の数は 80 の 115 乗となり[7)]」、$80^{115}≒7.17×10^{218}$ ぐらいある（だいたい阿伽羅程度）」というものである。終局までの平均手数を 120 手と見積もり、「$80^{120}≒10^{228}$」と見積もられる場合もあるし[10)]、あるいは「将棋のゲーム中に現れる局面数」は 10^{226} と言われる場合もある[5)8)]。

また、現状、様々な記事や本の中には、複雑さの定義

も曖昧にしたまま「将棋の複雑さは約 10^{220}≒阿伽羅」等々言及されていることもあり、さらには複雑さの計量方法（前記（１）（２－１）、（２－２））を混同して「将棋の全局面数は約 10^{220}」[11]、「将棋の現れ得る局面数は 10^{226}」という記事さえある[5,8]（正確には「現れ得る局面数」ではなく「現れ得る棋譜の総種類数」あるいは「将棋の場合の数[7]」が正しい）。

実際は将棋のルール上可能な総局面数はずっと少なく 10^{60}～10^{70} の間の程度であることが数学的に示されている[2,4]。

さて、以下本論文では、ゲームの複雑さを（２－２）の葉の数で計量する場合を考える。

そして将棋などのゲームの複雑さに関しては、直感のみで、「ゲーム木の平均分岐数と葉（終局面）の平均深さをもって、一様な分岐数の木でゲーム木を近似して複雑さを計量している」のが現状である。すなわち、「一般に、そのゲームの平均合法手が N 通りあるとして，終了までの平均手数が M 手だったとすると，そのゲームの探索量は『N の M 乗』で概算される[1]」という考察しかなされておらず、ここで思考が停止している。

本論文では、この直感的方法を支える論理が全く正しくないことを示す。

今回は、平均分岐数 α と葉の深さ d のみを指定したのでは、その α, d を持つ木の集合の中に、いくらでも葉の数が大きな木が存在すること等を示す（後述定理１）。

結論として、ゲーム木の大きさ（葉の数）を評価するには、平均分岐数 α、葉の深さ（木の高さ）d の他、各節点における分岐数の平均からのずれ（例えば分散）なども加味する必要があることが示唆されるのである。

2. ゲーム木の複雑さについての考察

ここでは、以下で「ゲーム木が、平均分岐数＝各節点（局面）におけるルール上可能な手の数の平均値＝b、葉の平均深さ=dのとき、葉の数Lは$L≒b^d$である」ということは論理的に誤りであることを示す。そうすると、将棋の複雑さを（２－２）のゲーム木の葉の数で計量する場合、本当に10^{220}程度であるか、何らかの方法で少しでも正確に確認することが必要になる。この確認については、本論文では扱わず、別の機会で行うこととする。

さて、Fig.2は、葉を除く全ての節点の、下に伸びる枝の数がbであるような木である。これをゲーム木と見れば、勝負のついた局面以外の全ての局面においてルール上可能な手の数が全て等しくbであるという木である。現状では多くの論文では、ゲーム木をこのような一様な

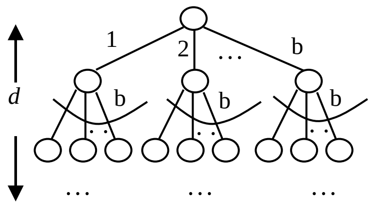


Fig.2 A game tree of uniform branches b

木で近似して複雑さを計量していることになる。

まず、次を定義する。

【定義１】（木の節点の分岐数）

節点における分岐数とは、木をFig.1,Fig.2のように根を最上位に、深さの大きい節点を下に描いたときの、節点から下に伸びる枝の本数とする。□（定義１）

例えば、Fig.2の根の分岐数はb、深さ1の各節点における分岐数も全てbである。

【定義２】（木の平均分岐数）

木全体の節点数をN、葉の数をL、枝の数をBとする。またこの木をT(N,L,B)と表すこととする。

このとき、この木の平均分岐数A_B(T)を

$A_B(\mathrm{T}) = \dfrac{B}{N-L}$ で定義する。□（定義２）

I=N-Lは内節点（葉でない節点）の数であるから、

$A_B(T) = \dfrac{\text{枝の総数}}{\text{内節点の数}} = \dfrac{B}{I}$ ということもできる。

また、B=N-1となるから、$A_B(\mathrm{T}) = \dfrac{N-1}{N-L}$ であることもわかる。

例えば、Fig.1の木の平均分岐数は、N=10、L=6、B＝9であるから、$A_B(\mathrm{T}(10,6,9)) = \dfrac{9}{10-6} = \dfrac{9}{4} = 2.25$ となる。

また、Fig.2の平均分岐数=b、Fig.3の木の平均分岐数は２つとも3である。

定義２は直感に合った自然な定義となっている。

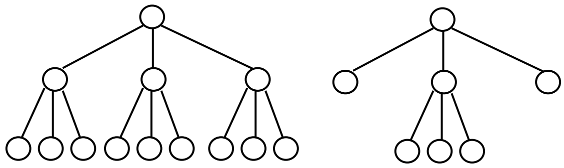


Fig.3　2 Examples of game tree of average branch number=3

【定義３】（平均分岐数α、高さdの木の集合）

αを正の有理数，dを正の整数とする。

S(α,d)={T; A_B(T)=α,height(T)=d, またはTは空木（節点も枝もない空グラフ）}　□（定義３）

さて、分岐数が葉を除いて一様にbであり、全ての葉の深さがdのゲーム木であれば、葉の数をLとすると、$L=b^d$であることは明らかである（Fig.2）。

問題は、平均分岐数がbであり、高さ（あるいは葉の平均深さ）がdのゲーム木で$L≒b^d$が成り立つかどうかである。

これに関しては､それは全く成り立たないことが次の２つの定理によって明らかになる。

いま、有理数α（≥２）、正整数d（≥２）を任意に固定しておく。

そうすると､後述の定理１が述べることは、「そのような木は必ず存在し（i.e. S(α,d)は空集合でなく）、しかもその中に葉の数がいくらでも大きなものがある」ということである。

定理２が述べることは、「S(α,d)の中で葉数が最小のものは、αdが整数のときは「箒型の木」であり、その葉数$L_{min}(\alpha,d)$＝d(α-1)+1である」ということである。
定理２ではαdが整数でないときも精密に最小の葉数を求めている。

したがってこの２つの定理により､特に定理１により、前節で紹介した､将棋のゲーム木の葉の数に関する主張は論理的に成り立たないことが明らかとなる。

定理を述べる前に次の補題を準備しておく。

【補題A】T∈S(α,d)に対し、内節点をN_i個、葉をN_L個付け加え､新たな高さdの木T’を作ることを考える（Fig.4, Fig.5）。
ただし、Tにおける内節点、葉は、T’においても内節点、葉であることを保つように追加するものとする（例えば葉の下に節点を追加する――Tでは葉であった節点が内節点になってしまう――等はしない）。また、N_i, N_Lが負の場合削除することを意味する。

さて、T’∈S(α,d)であるための条件は、
（A）Tが空木の場合　N_L=（α-1）N_i+1
（B）それ以外の場合　N_L=（α-1）N_i
＜証明＞
（A）Fig.4は、空木にN_i=3、 N_L=6の内節点と葉を追加したところである。一般に、できた木を

T’=T(N’,L’,B’)

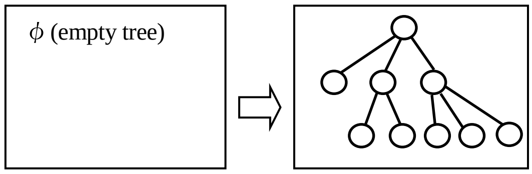


Fig.4　An example of adding inner nodes and leaves to the empty tree(N_i=3, N_L=6)

とすると、

N’=N_i+N_L, L’=N_L, B’=N_i+N_L-1となる。

T’∈S(α,d)　⇔　$\dfrac{B'}{N'-L'}=\alpha \Leftrightarrow \dfrac{N_i+N_L-1}{N_i}=\alpha$

より、N_L=(α-1) N_i+1

（B）木T= T(N,L,B)∈S(α,d)に、内節点をN_i個、葉をN_L個、木の高さdを保って付け加えることを考える（Fig.5）。Fig.5の例では、N_i=2、N_L=4である。一般に内節点、葉を付け加えて新しくできた木をT’＝T(N’,L’,B’)とすると、

N’=N+ N_i + N_L ,　L’ = L+ N_L,　B’= B+ N_i + N_L

となる。

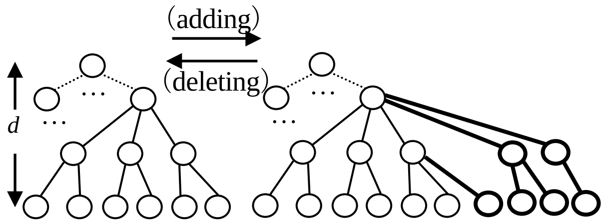


Fig.5　An example of adding/deleting inner nodes and leaves to/from a tree(N_i=2/-2, N_L=4/-4)

上記TについてT∈S(α,d)であるから、A_B(T)=αである。

T’∈S(α,d) ⇔A_B(T’)=α

（平均分岐数が節点、葉の追加後も変わらない）

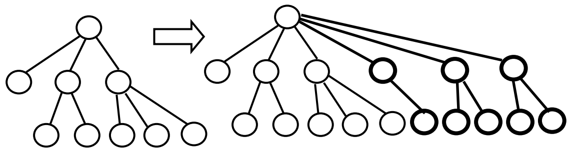
⇔　N_L=(α-1) N_i である。

∵　$A_B(\mathrm{T})=\dfrac{B}{N-L}=\alpha$ より、B=α(N-L)

$A_B(\mathrm{T}')=\alpha \quad \Leftrightarrow \dfrac{B'}{N'-L'}=\dfrac{B+N_i+N_L}{N-L+N_i}=\alpha \Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha(N-L)+N_i+N_L}{N-L+N_i}=\alpha$ ⇔N_i+N_L=αN_i □（補題A）

＜例＞N_L=(α-1) N_iを満たしながら内節点と葉を増やしても平均分岐数が不変な例をFig.6に示す。



T=T(N,L,B)　　　　　　　T'=T(N',L',B')

N=9　L=6　B=8　　　　　N'=17　L'=11　B'=16

A_B(T)=α＝$\dfrac{8}{3}$　　　　　　A_B(T')=$\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}=\alpha$

N_L=5,N_i=3(N_L=(α-1) N_i)

Fig.6　An example of adding inner nodes and leaves to a tree ,keeping its average branch number

【補題Aに対する注】

（１）平均分岐数、高さ、元の木の内節点と葉の属性を変えずに、内節点、葉を追加、削除するには、条件(A)または(B)を満たしながら行う必要があるし、またこの条件を満たせばそれが行える。

（２）∀T=T(N,L,B)∈S(α,d),　Tは「空木（ϕ）にN_i=N-L個の内節点、N_L =L個の葉を、

（A）N_L=(α-1) N_i+1の条件で追加してできた木と見ることができる。

$\because \dfrac{N-1}{N-L}=\alpha$ より、$\dfrac{N-L+L-1}{N-L}=\alpha$

これより、L=(α-1)(N-L)+1、すなわち、

N_L=(α-1)N_i+1

（３）$N_i \leq N_L$であれば、全ての葉の深さが等しくd（≥ 2）である木に対し、追加後の木においてもすべての葉の深さがdであるようなN_i個の内節点、N_L個の葉の追加方法がある。∵深さ(d-2)の節点に内節点N_i個をぶら下げる形で追加し、あとは、N_L個の葉をその下に置けばよい（Fig.7）。

ここで、補題Aを用いて２つの定理を与えることとする。これは、前述のとおり、S(α,d)の中にはいくらでも多くの葉を持つ木が存在すること、ただし葉数の最小値はあることを示すものである。

【定理１】

∀$\alpha=\dfrac{s}{r}$(≥2, r,s ：正整数)，∀L_0>0,

∀d（≥2，正整数），

∃T=T(N,L,B)；(1)T∈S(α, d)

(2) 全ての葉の深さ＝d

(3) $L \geq L_0$

＜証明＞

（第1段）

任意の$\alpha=\dfrac{s}{r}$に対し、平均分岐数がα、高さ=d、全ての葉の深さ=dであるような木が構成できる。

いま、$r \geq 2$としておく（そうでなければ、例えば$\alpha=\dfrac{3}{1}=\dfrac{6}{2}(r=2, s=6)$ 等としておく）、

まず、高さdの完全２分木を考えると（Fig.7（左））、平均分岐数=2、高さ=d 、全ての葉の深さ=dである木が構成できる（Fig.7はd=3の例）。これをT_d=T(N,L,B)とすると、I＝N-L=内節点数として、

A_B(T)= $\dfrac{B}{N-L}=\dfrac{B}{I}=2$，　B=2I

補題Aのように内節点をN_i=(r-1)I個、葉をN_L=(s-r-1)I個、深さ(d-2)の内節点の下に付け加える（Fig.7（右））。ここで最初に$r \geq 2$としてあるから、$N_i \geq 1$となり、このような内節点、葉の追加が可能となる。

T_d'＝T(N',L',B')とすると、

N'=N+ N_i + N_L，L' = L+ N_L，B'= B+ N_i + N_L

より、A_B(T$_d$')=$\dfrac{B'}{N'-L'}=\dfrac{B+N_i+N_L}{N-L+N_i}$

$$=\frac{2I+(r-1)I+(s-r-1)I}{I+(r-1)I}=\frac{s}{r}$$

となる。そして、N_L- N_i=(s-r-1)I-(r-1)I=(s-2r)I ≥ 0 より

（∵ $\alpha=\dfrac{s}{r}\geq 2$より$s-2r \geq 0$）、

$N_L \geq N_i$であり、全ての葉の深さがdとなるようにできる（補題Aの注（３））。

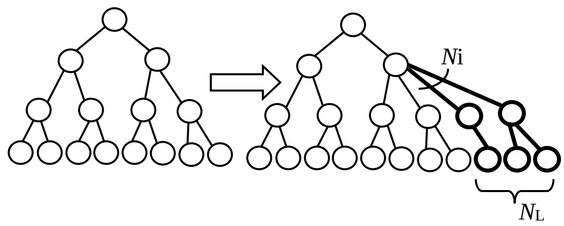


Fig.7　A complete binary tree T(left) and
T' (Ni inner nodes and NLleaves are added to T)(right)

（第2段）

補題Aより、上で構成したT_d'に対して

N_L'=(α-1) N_i' =($\dfrac{s}{r}$-1) N_i'を満たしながらさらに

内節点をN_i'個（N_i'を例えばrの倍数とする）、葉をN_L'個つけ加えると、平均分岐数=αを保ったまま、葉を増やすことができる。N_L'はいくらでも大きくできるから、

結果的に任意のα（≥2）の平均分岐数で、いくらでも多くの（任意のL_0より多くの）葉を持つ木が構成できる。また、Fig.7と同じ要領で、すなわち、深さ$(d\text{-}2)$の内節点に、新たに内節点、葉を付け加えることとすると、「全ての葉の深さがd」の条件を保ったままで、所要の木が構成できる。　□（定理１）

【定理２】

$\alpha = \dfrac{q}{p}(\geq 2,\ p, q$は互いに素な正の整数$)$

d（≥2）を正整数とする。

$S(\alpha,d)$の中で葉数が最小の木$T=T(N,L,B)$は、

空木に$N_i=\min\{\, pk;\ pk \geq d,\ k=1,2,\ldots\}$個の内節点と

$N_L=(\alpha-1)N_i+1$個の葉を加えた木である。

N_iは、pの倍数pkで、ただし$pk \geq d$となる最小の整数、すなわち、pの倍数で初めてd以上となる数となる。これを、略して$\min pk(\geq d)$と書くこととする。

そうすると、$S(\alpha,d)$の木の最小の葉数は

$N_{L\min} = (\dfrac{q}{p} - 1) \times \min pk(\geq d) + 1$となる。

＜証明＞

補題Aの注（２）より、$S(\alpha,d)$に属する木は、空木に、

N_i=N-L個の内節点、N_L =L個の葉を、

$N_L=(\alpha-1) N_i+1$（条件A）を満たしながら追加して

できた木である。

葉の数$L=N_L$を最小にするには、N_iを最小にすればよいが、高さdの制約があるから内節点の数N_iは、

$N_i \geq d$でなくてはならない（Fig.8）。

また、$N_L=(\alpha-1) N_i+1$が整数である制約から、

（$\alpha = \dfrac{q}{p}$が既約分数であることから）N_iはpの倍数でなくてはならない。

したがって、　$N_i=\min pk(\geq d)$　、かつ

$N_L=(\alpha-1) N_i+1$となる木が構成できれば

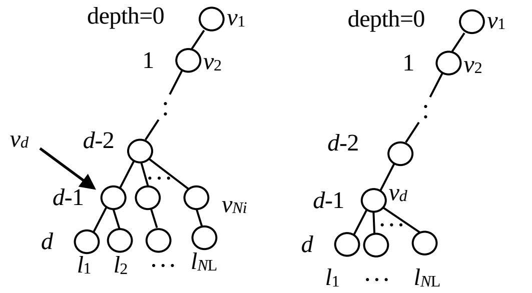
それが最小の葉数を持つ木となる。

そして実際に、$\alpha \geq 2$より、$N_L \geq N_i+1$であるから、このような木は必ず構成できる（Fig.8）。

特に、dがpで割り切れる場合は、

$N_i=\min pk(\geq d)=d$

となり、「箒型」の木の場合が最小葉数を持つ木となる（Fig.8右）。　　　　□（定理２）



（the case of d≠pk）　　　（the case of d=pk

v_x：inner node,　l_x：leaf

Fig.8　A tree of minimum leaves

3. まとめと今後の課題

定理１により、一般的に言われているようには、ゲーム木の複雑さ（葉の数）を平均分岐数と高さのみから推定することは全くできないことを示した。

すなわち、任意の高さdの、任意の平均分岐数αの木の集合$S(\alpha,d)$を考えると、この中にいくらでも葉の数が大きい木が存在し得ることを示した。

しかし、このように存在は示せたが、いままでは一般のゲーム木と比べれば、次の２つの点で不自然な木を考察してきたことになる。

（１）上記定理では「全ての葉の深さは等しくd」である木を考えてきたが、実際のゲーム木ではそのようなことはほとんどない。

（２）定理１で構成した葉数が大きい木では、木の先端（深さが木の高さd近く）に分岐の多い節点が集中していて実際のゲーム木ではそのようなことはほとんどない。

これに対しては、次のように考えればよい。

Fig.9に示すように、「全ての葉の深さは等しくd」である木から、N(節点数)、L（葉の数）、B（分岐数）を保ちながら、すなわち、平均分岐数と高さを保ちながら、葉の深さが（d一定でなく）様々な形の木が構成できる。同様に、先端付近での密集をなくすようにすることもできる。

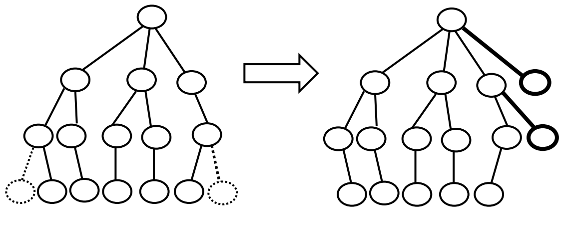


Fig.9　Transform of a tree,　keeping (N,L,B)

このように、人工的で不自然な形でない木（全ての葉が等しい深さdとなっていない木、木の先端に分岐が集中しない木）も、今回構成した木をもとに、平均分岐数を変えずに構成することができることがわかる。

したがって、やはりゲーム木の複雑さの評価は、より精密に行う必要があることが強く示唆される。

今後の課題としては、

・ゲームの複雑さを計量する場合、平均分岐数とその分散等（あるいは他の平均分岐数からのずれに関する量）から、どのように複雑さを見積もることができるのか

・「将棋の複雑さは『あから』程度」という主張がどの程度の確度で言えるのか

等について考察することがあげられる。

参 考 文 献

1) 伊藤　毅志、コンピュータ囲碁の最前線、情報処理【2013】Vol.54　No.3通巻576号、pp.234-237、情報処理学会（2013）

2) 大槻　正伸、将棋の可能な局面数の上界について、コンピュータ将棋協会資料集(Vol.9)pp.1-8（1996）

3)小谷 義行編著、岸本 章宏、柴原 一友、鈴木　豪：ゲーム計算メカニズム、コロナ社（2010）

4)篠田 正人、将棋における実現可能局面数について、情報処理学会IPSJ　Symposium Series Vol.2008 No.11、pp116-119、情報処理学会(2008)

5)田中　徹、難波　美帆：閃け！棋士に挑むコンピュータ、pp.33-34、梧桐書院（2011）

6)Neil　Graham著、小長谷 和高、福田 光恵訳：人工知能入門、啓学出版（1985）

7)松原　仁、「あから2010」の不遜な挑戦、情報処理【2010】Vol.51　No.8通巻546号、pp.988-990、情報処理学会（2010）

8)山本　一成：人工知能はどのようにして「名人」を超えたのか p46、ダイヤモンド社（2017）

9)ゲーム木についてのホームページ (2020 年 8 月 20 日現在) https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B2%E3%83%BC%E3%83%A0%E6%9C%A8

10) ゲーム木探索技術とコンピュータ将棋への応用 (2020 年 8 月 20 日現在) https://www.slideshare.net/shogotakeuchi/ss-62415546

11)将棋の全局面数 10ˆ226 という数についての疑問 (2020 年 8 月 20 日現在) https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1065005045