

線形和水分保持関数に対する Mualem モデルの不飽和透水係数  
Closed-form unsaturated hydraulic conductivity based on the Mualem model  
for linearly superposed sub-retention functions

関勝寿<sup>1</sup>・取出伸夫<sup>2</sup>・M. Th. van Genuchten<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 東洋大学・<sup>2</sup> 三重大学・<sup>3</sup> Utrecht University, São Paulo State University

**要旨(Abstract)**

Brooks and Corey (BC), van Genuchten (VG), Kosugi (KO)の水分保持関数の線形和(マルチモデル)に対する一般化 Mualem 式による不飽和透水係数の閉形式解を Priesack and Durner の手法に基づいて示した。団粒構造の発達した黒ボク土には dual-(BC, VG, KO)モデルがよく適合した。浜岡砂丘砂では  $H = h_{b_i} = \alpha_i^{-1} = h_{m_i}$  を共通パラメータとする CH モデル(dual-(BC, VG)-CH, VG1BC2-CH)で毛管水と吸着水の水分特性が適合し、マルチモデルの閉形式解と Fayer and Simmons モデルの不飽和透水係数がよく一致することが確認できた。

キーワード: マルチモデル, 水分保持, 透水係数, Mualem モデル, 閉形式解

Key words: Multimodel, Water retention, hydraulic conductivity, Mualem model, closed-form equation

**1.はじめに**

Durner はマルチ VG モデルを提唱し, Priesack and Durner (2006)はマルチ VG モデルに対する Mualem モデルの不飽和透水係数の式を導いた。マルチ VG モデルは HYDRUS にも実装され, 水分移動解析に用いられている。

本研究では, BC, VG, KO の水分保持関数を線形結合したマルチモデルから不飽和透水係数の式を導き, 黒ボク土と砂丘砂に適用する。

**2.モデル**

サクシオンを  $h$ , 体積含水率  $\theta$ , 飽和体積含水率を  $\theta_s$ , 残留体積含水率を  $\theta_r$  とする。有効水分量  $S$

$$S(h) = \frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (1)$$

に対して, 水分保持関数  $S(h)$  を BC, VG, KO 型のサブ関数  $S_i(h)$  (Table 1) の任意の線形和によって定める。

$$S(h) = \sum_{i=1}^k w_i S_i(h) \quad (2)$$

$k$  はサブ関数の数,  $w_i$  は重み係数で  $\sum_{i=1}^k w_i = 1$  である。KO モデルの  $Q$  は,

$$Q(x) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) dx \quad (3)$$

一般化 Mualem モデルは,

$$K_r(h) = \frac{K(h)}{K_s} = S(h)^p \left[ \frac{\int_0^{S(h)} h(S)^{-q} dS}{\int_0^1 h(S)^{-q} dS} \right]^r \quad (4)$$

$K_r$  は相対透水係数,  $K$  は不飽和透水係数,  $K_s$  は飽和透水係数) である。Mualem モデルでは  $p = 0.5$ ,  $q = 1$ ,  $r = 2$ , Burdine モデルでは  $p = 2$ ,  $q = 2$ ,  $r = 1$  である。Priesack and Durner (2006) に従ってこの式を解くと,

$$K_r(h) = S(h)^p \left[ \frac{\sum_{i=1}^k w_i A_i(h)}{\sum_{i=1}^k w_i B_i} \right]^r \quad (5)$$

$A_i(h)$  と  $B_i$  は Table 1 に示す。

Table 1. サブ関数の  $S_i(h)$ ,  $A_i(h)$ ,  $B_i$

Type	$S_i(h)$	$A_i(h)$	$B_i$
BC	$\left( \frac{h}{h_{b_i}} \right)^{-\lambda_i}$ ( $h > h_{b_i}$ )	$B_i \left( \frac{h}{h_{b_i}} \right)^{-\lambda_i - q}$ ( $h > h_{b_i}$ )	$h_{b_i}^{-q} \left( \frac{q}{\lambda_i} + 1 \right)^{-1}$
	1 ( $h \leq h_{b_i}$ )	$B_i$ ( $h \leq h_{b_i}$ )	
VG	$[1 + (\alpha_i h)^{n_i}]^{-m_i}$ , $m_i = 1 - q/n_i$	$B_i [1 - (1 - S_i(h))^{1/m_i}]^{m_i}$	$\alpha_i^q$
KO	$Q \left[ \frac{\ln(h/h_{m_i})}{\sigma_i} \right]$	$B_i Q \left[ \frac{\ln(h/h_{m_i})}{\sigma_i} + q\sigma_i \right]$	$h_{m_i}^{-q} \exp \left( \frac{q^2 \sigma_i^2}{2} \right)$

VGモデルとBCモデルの線形和は、サブ関数の番号を下付き文字で示してVG<sub>1</sub>BC<sub>2</sub>モデルと表記する。2つの同じモデルを重ねる場合は、dual-VG(=VG<sub>1</sub>VG<sub>2</sub>)とも書く。(5)式のマルチモデルは、さらに以下の変形が可能である。

(1)  $H = h_{b_i} = \alpha_i^{-1} = h_{m_i}$  を共通パラメータとするCHモデルによって自由変数を減らすことができる(砂丘砂で適用(Fig.2))。

(2)  $r = 1$  の場合は  $K$  も線形和になるため、サブ関数ごとに独立の間隙結合係数  $p_i$  を与えられる。

$$K_r(h) = \gamma^{-1} \sum_{i=1}^k S_i(h)^{p_i} w_i A_i(h) \quad (7)$$

ここで  $\gamma = \sum_{i=1}^k w_i B_i$ 。

### 3.適用例

熊本黒ボク土の水分保持測定値(坂井・取出, 2007)を dual-(BC, VG, KO)と VG<sub>1</sub>BC<sub>2</sub> モデルによってフィッティングし, Mualem モデル( $p=0.5$ )によって相対透水係数を計算した(Fig.1)。なお, マルチモデルでは  $\theta_r = 0$  とした。

いずれのマルチモデルも, 団粒内間隙と団粒間隙のそれぞれの間隙径分布を反映した階段状の水分保持を表現できた。不飽和透水係数も全体的には水分保持と同様の傾向を示し, お互いによく似た曲線となったが, 中間領域においてそれぞれのサブ関数の特性があらわれた。

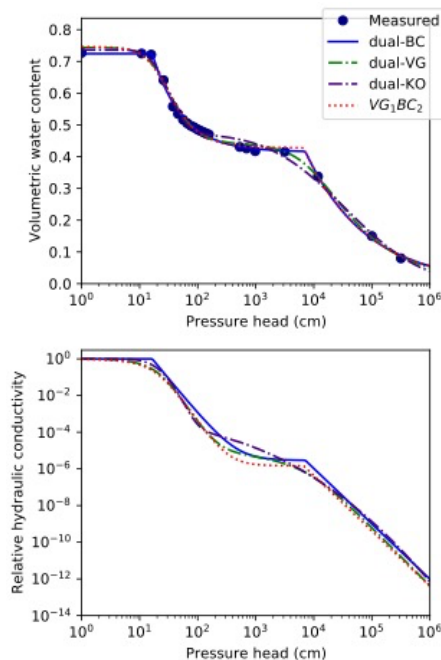


Fig. 1 熊本黒ボク土の水分保持と透水性

浜岡砂丘砂の水分保持測定値(宮崎, 1976)を dual-(BC, VG)-CH, VG<sub>1</sub>BC<sub>2</sub>-CH, FS モデル(Fayer and Simmons, 1995)によってフィッティングした。不飽和透水係数の間隙結合係数は, Sakai et al. (2009)が FS モデルで求めた  $p = 6.17$  とした(Fig.2)。いずれも Mualem モデルの級数解である FS モデルとよく一致し, (5)式の妥当性が確認できた。1つ目のサブ関数は毛管水の特性を, 2つ目のサブ関数は吸着水の特性をあらわしている。

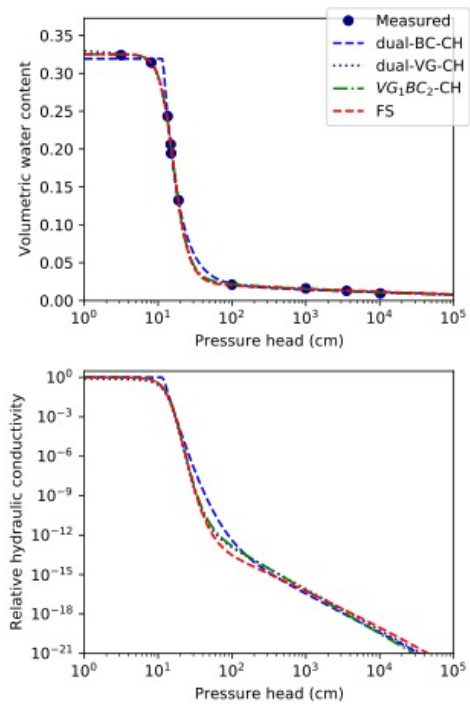


Fig. 2 浜岡砂丘砂の水分保持と透水性

### 4.おわりに

本研究で得られたマルチモデルの閉形式解は, 以下の適用が考えられ, 今後, 検証を行う予定である。なお, 本研究の詳細は Seki et al. (2021)に掲載される。

(1) 飽和近傍領域, 中間領域, 乾燥領域の広範囲を統一して表現するマルチモデルとしてトリプルモデルが有力である。

(2) (7)式においてサブ関数ごとに独立の間隙結合係数  $p_i$  を与えると, 毛管水と吸着水の透水特性の違いを表現できる。

#### 参考文献

- Priesack and Durner (2006) *Vadose Zone J.* 5(1) :121–124.  
 Seki et al. (2021) *Vadose Zone J.* (in press).  
<https://doi.org/10.1002/vzj2.20168>