

# 実数と連続体を哲学する

## 数学基礎論争の一前史としてのルノーヴィエの有限主義

池田 真治

富山大学学術研究部

[\*『数学セミナー』2023年6月号, pp. 38–43 掲載の, 著者最終稿です. 引用等は, 『数学セミナー』本誌からお願いいたします.]

### 1 はじめに

連続体および無限は, 古代ギリシア以来の, 哲学の重要な概念である. それは, 現代に至るまで, 哲学に限らず, 数学や自然科学の中心的な主題であり続けている. 2500年に及ぶ哲学の歴史で, 連続体の概念が主要な争点となった時代は, 少なくとも3期あった. すなわち, I.) ゼノンのパラドクスとアリストテレスの自然哲学を代表とする前5世紀～前4世紀の古代ギリシア時代, II.) 不可分者の幾何学や数直線の考え, 代数学や解析幾何学など新しい数学の手法が広まり, 無限宇宙の考えや微積分が発明される17世紀科学革命の時代, そして, III.) 数学と自然, そして精神の関係をめぐって, 連続体や無限にかんして異なる言説が爆発的に生じた, 19世紀末～20世紀初頭の数学基礎論争の時代である.

とりわけ第III期にかんしては, 哲学者の反応についてはまだ十分整理されていない印象がある. 実際, 当時は多くの哲学者や数学者が, 実数連続体に対してそれぞれ異なる意見を表明した. たとえば, その中には, 実数による連続体の定義を与えたカントールやデデキント, 数学基礎論争の中心にいた論理主義者ラッセルや直観主義者ブラウワー, そして形式主義者ヒルベルトは言うまでもなく, それ以外にもコーヘンら新カント派や, ベルクソン, ポアンカレ, ジュール・タンヌリ, クーチュラ, ヘルマン・ヴァイル, パース, ヴェロネーゼ, パウル・デュ・ボワ＝レーモンらがいた. 数学の学問的基礎づけを初期現象学の動機として有するフッサールや, 直観された連続体を数学的に構成された実数連続体とみなすことを批判したブレンターノも見逃せない. この前史を, 19世紀全体にまで引き伸ばすと, ヴァイアーシュトラスやクロネッカー, ボルツァーノ, リーマン, コーシーらも含めることができるだろう (無限や連続体の数理哲学史の概観には [1]).

以下では, 第III期の前史に当たる部分として, 注目されることは少ないが, 当時は影響力があり, その現実的無限批判および点からの連続体構成批判の根底に重要な哲学的洞察を含む, ルノーヴィエの有限主義に注目する. そして最後に, 実無限や実数連続体の概念を含む, 数学的な「理念」の思考可能性をめぐらる問題を哲学的に問う.

## 2 ルヌーヴィエの有限主義

シャルル・ルヌーヴィエ (1815–1903) は、19 世紀を代表するフランスの哲学者である。彼は、パリの理工科学校で数学を学び、早くから政治や哲学に関心を持っていたが、公職にはつかず、在野の研究者を貫いた。純粹哲学に限らず、自由主義者・共和主義者として政治思想や、道徳・宗教を論じた著作や雑誌を精力的に出版し、当時のフランス哲学界に多大な影響力を及ぼした。(ルヌーヴィエについては、[9], 65–77; [10], 173–185.)

ルヌーヴィエは、カントの批判哲学およびコントの実証主義を継承しつつも、両者の立場を批判し、自らの立場として「新批判主義 (néo-criticisme)」を掲げた。ここでは、カントの物自体 (認識主観と切り離された、客観的な物そのもの) の理念や、理性のアンチノミーのうち、無限概念に基づくアンチテーゼの議論を批判した。また彼は、コントが精神の発展の最終段階に据える実証的段階に、科学主義 (科学の絶対確実性を盲信する立場) が含意されていると批判した。彼はフランスにおける新カント派の旗手と目されるが、現実的無限や実体、絶対的因果性などのカントにおける理念 (Idee) を、表象にかんする厳密な認識論に基づいて彼の哲学体系から追放し、有限主義の立場をとった。

石黒ひでによれば、ルヌーヴィエの有限主義は、(1) 実際に数えられた数は有限であり、(2) 事物や線の分割や、ある単位や数を足したり掛けたりする演算の操作は、アリストテレスのように無尽蔵にできるという積極的な意味での潜在的無限 (可能無限) ではなく、あくまで「無規定／無際限 (indéfini)」であるという消極的・否定的意味でのみ解されるべきだとする。そして、(3) 自然数や有理数・実数の総体といった、数の全体的無限、したがって現実的無限 (実無限) の存在および認識を否定するものである。[8]

ルヌーヴィエの有限主義は、彼の哲学体系に深く根ざしたものであるが、あまり深入りする余裕はない。ただ、現実的無限だけでなく、肯定的な意味で捉えられた可能無限をも否定するその主張の基礎として、厳格な表象主義があること、そして、その表象主義と矛盾律を介して結びつく、「数の原理」が重要であることは指摘したい。

## 3 ルヌーヴィエの表象主義と「数の原理」

ルヌーヴィエが『一般的批判の試論』の「第一試論」(第 1 版: 1854, 第 2 版 1875) で示した哲学体系が関わるのは、表象をもつ事物のみである。すなわち「もの」を、それが「現れる」という性質から、つまり「表象 (représentation)」という観点からのみ考える。表象は、「表象主体／被表象体 (représentatif/représenté)」, すなわち、「表象するもの／

表象されるもの」という二面性をもつ。(被表象体は、質を伴った物体つまり自然のことで、感覚・知覚されるものを含む。他方で、表象主体は、精神や魂、知性のことで、思考や情動、意志などを含む。) こうして、**表象主義**とは、人間の精神に現れたものと、それを現すところのもの以外には、存在するものとして何も認めない立場である ([3], 6–11).

この立場から、ルノーヴィエは、人間がもつ表象とは区別された外在的なものとして**物自体**を立ててしまう立場を、「物自体のパルチザン」として痛烈に批判する ([3], 28). それは、認識経験の可能性の条件として物自体や実体などを取ることも許さない点で、カントの超越論哲学とも区別される、厳格な観念論である。この反実在論的立場に従えば、数学的对象が認識されるのは、表象において、つまり、思考という表象作用を通じて、思考対象として心に現れるという仕方においてのみである。

さらにルノーヴィエは、表象主義の観点から、存在する事物がある全体を構成する仕方でのみ与えられるとし、次の「**数の原理** (le principe du nombre)」を要請する。

ところで、与えられた全体には、必ずある数が与えられている。存在する事物、あるいはその事物の何らかの部分には、常に数を形成する。[...] これがなければ、全体を表象することは実効的でも可能でもない。 ([3], 29)

彼は、この原理が成り立たなければ、全体の表象は実効されないし、不可能だとする。

## 4 ルノーヴィエの無限数あるいは現実的無限の拒否

この「数の原理」および矛盾律から、現実的無限や無限数(実無限)の想定、および、無限分割可能な延長的全体の想定は拒否される。したがって、物自体としての空間や時間、物質、運動などを拒否する。なぜなら、それらの理念は、際限なく続くはずの増大や減少、分割の系列が、全体として完了しているという意味で、つまり、**終わりが無いのに終わりがある**という意味で、矛盾を含み、人間の精神が表象できる範囲を超えるからである。

彼は、全体を無数の部分からなるものとして措定する思想家は、必ずや矛盾に直面するとして、「全体」や「集合」という言葉がもたらす危うさを注意しており、後の集合論の基礎を脅かすパラドックスを予見しているかのようなのである ([3], 31). それでも「事物は現実的無限に存在する」と主張する、延長それ自体のパルチザンに対して、彼はこう答える。

数における無限性とは、事実上も観念上も割り当て可能ないかなる数よりも大きい数を意味するのであって、思考に基づいて決定可能な数ではなく、それ自体で決定されない数であり、数でない数であるということを指摘するだけである。 ([3], 34)

こうして、無限数は思考によっては決定不可能な矛盾概念として拒否される。同様に、連続体としての空間や時間・物質・運動を、現実的無限な部分を持つ全体、あるいは、無限分割可能な部分を持つ全体とみなすことは、知性を自己矛盾に導くとして否定される。

彼はまた、ガリレオの『新科学対話 [論議]』(1638)に遡る、数(自然数)とその平方数の関係をめぐる無限のパラドクスに言及する。もし今、両方の系列全体が与えられるとすれば、それは現実的無限があれば与えられるはずで、数  $x$  の総数は、平方数  $x^2$  の総数と比べると大きい(つまり、平方数  $x^2$  の系列全体は、数  $x$  の系列の部分である)。他方で、それぞれの数は、その自乗を持つ ( $x \mapsto x^2$ )。したがって、数全体と同じだけの数の平方数が存在することになるが、これは逆説的である。ルヌーヴィエは、「全体と部分」の関係にある無限集合間に一対一対応が成り立つならば、両者は同じ濃度を持つとするカントールの議論も、同様に矛盾するという理由で拒否するであろう。

## 5 ルヌーヴィエと点集合としての連続体の概念

連続体の合成の問題に対するルヌーヴィエの立場も、すでに明らかであろう。彼は、そもそも任意のものについてその無限集合を否定するのだから、当然、点的要素の無限集合としての連続体も拒否する([3], 37–41)。彼は『哲学的批判』誌に「形而上学の迷宮——無限と連続体」[4]と題して連載し(1876–78)、ゼノン以来の連続体の問題をライプニッツから始め、カントやそれ以降の哲学者、数学者、自然科学等について検討した。ただ、そこで数学者として挙げられているのは古典的人物ばかりで、極限の方法の記事でも、取り上げられているのは主にニュートンやライプニッツである。最新の論者としては、実証主義者のコントや、無限主義者(infinitiste)としてクールノー(1801–1877)を扱うにとどまり、実無限や実数連続体を擁護したボルツァーノやカントール、デデキントの名はない。

カントール(1845–1918)は、現実的無限を具体的にも抽象的にも否定する論者の一人として、ルヌーヴィエに言及している(1885)。他方で、ルヌーヴィエには、カントールへの直接的言及は見当たらない。ルヌーヴィエはドイツ語を読まず、カントールを知ったのは、クーチュラの『数学的無限』(1896)を介してである([6], Ch. 2)。

ボルツァーノ(1781–1848)は『無限の逆説』(1851)で、ルヌーヴィエとは対照的に、ガリレオの同じ議論から、全体と部分の対等性をもって、真無限の特質とする([11], §33)。そして、無限集合や数の実無限を認め、連続体を適切な配列をなす点の無限集合とみなす(§38)。ただし、点の集合が連続体を構成するのは、稠密性という条件だけで十分とした点で、後にカントールに批判されている。稠密性が実数連続体の必要条件に過ぎず、十分条件を満たすためには、さらに完備性(あるいはそれと同値な連続性の公理)が必要で

あることは、哲学者に長らく知られてこなかった。しかしボルツァーノは、実無限を幾何学的対応をもつ形而上学的要素として支持したわけではなく、あくまでも純粹に形式的な存在として、したがってヒルベルトが「無限について」(1925)で述べるような「理想元 (die idealen Elemente)」として捉えている。ライプニッツもそうだが、ルヌーヴィエには、(有限量あるいは具体的なものの直観に基づくであろう)「全体は部分よりも大きい」というエウクレイデス『原論』第1巻の公理にかんする信念が根強く残っている。この公理を暗黙裏に仮定し、全体としての無限が部分としての無限と密度が等しくなってしまうことから現実的無限を拒否する議論は、アリストテレスの『自然学』(Γ巻第5章)にまで遡れる。

すでにルヌーヴィエは、『一般的批判の試論』の「第一試論」第1版(1854)で、数の無限としては無際限という意味でしか認められず、事物や数の現実的無限の主張は矛盾するとしている。彼は第2版(1875)で、「観察と発展」として無限をめぐる考察を大幅加筆するが、興味深いことにそれは、カントールが超限集合論を形成していく時期と重なる [2]。

## 6 ルヌーヴィエの現実的無限の定義

同時期に、ルヌーヴィエは、1877年5月10日付の『哲学的批判』誌上に、「量の無限についてのノート」と題する論稿を寄せている [5]。その論稿は、無限をめぐる諸定義から始まり、いくつかの命題が証明される。まず、所与のものの集合として、「多」を定義する。

1. **与えられたもの** (*chose donnée*) とは、それと同じ、あるいは異なる本性をもつ他のものから識別可能な任意のもので、その存在が、空間、あるいは時間、あるいは単に思考において定義可能なものを言う。与えられた集合 (collection) あるいは多 (multitude) とは、与えられたもののある集合ないし多である。 ([5], 225)

そして、そこから現実的無限と無際限を定義する。

2. **現実的無限** (*infinie actuelle*) あるいは現実態にある無限とは、任意の所与の集合で、異なる諸部分ないし諸要素が、それらの数的な集積において考えられた場合、ある特定の数  $n$  (その  $n$  が何であろうと、またそれがどの大きさに到達しよう) に対応しないものを言う。／ **現実的無限** に対して、**可能者の無限** とは、**無際限** (*indéfini*) と呼ばれているもののことである。 ([5], 225)

村田全は、このルヌーヴィエの「多」の定義が、カントールの「集合」の定義と類似していることに注目する ([12], 68–69)。しかし、そこから無限をめぐる立場は、真っ二つに

分かれる。すなわち、ルヌーヴィエは数の現実的無限を拒否するが、カントールは支持する。ルヌーヴィエがこのノートで展開する現実的無限を拒否する理由は、『一般的批判の試論』で述べた説明と同様である。すなわち、無限数、したがって数の無際限な系列の本質は、それがどこまでも続いて行って、終わりが無いことであるのに、数の現実的無限は、そうした数の系列がすべて与えられているという想定に基づき、矛盾するからである。こうして、最後の命題で、ルヌーヴィエは「数の原理」とほぼ同じ内容を主張する。

5. 与えられたもの（定義1）のすべての集合または多の現実的無限は、抽象数の系列の現実的無限の境遇に従わなければならない、不合理に陥らずには仮定できない。したがって、そこから、空間において、時間において、あるいはそれらを理念的に仮定し増殖させる思考において互いに区別されうるような、いかなる存在者や現象も、たとえそれらを数え上げる手段をわれわれが欠くとしても、それらの全体がそれ自体で数的に確定されていると仮定することなしには、与えられていると仮定することはできないことになる。（[5], 227）

## 7 おわりに

さて、ここまでは、哲学というより哲学史のごく一端の反省に終始した感が否めないが、無限あるいは実数連続体について考察するための手始めの素材としては十分であろう。

ルヌーヴィエが現実的無限の批判を通じて問題にしたのは、数の無際限な系列を、全体として表象することが、果たして本当に人間の思考に可能なのか、という問いだった。ルヌーヴィエは有限主義の立場から否定的に答えたが、ボルツァーノやクーチュラ、ラッセルら論理主義者のように、数の実無限の把握を人間精神に認める立場もある。デデキントが「数とは何かそして何であるべきか」（1888）の中で、無限なシステム（無限集合）の存在を証明する際に前提した「思惟」の力は、いったいどこまで認められうるだろうか。19世紀後半の数学革命によって、伝統的には実在しない単なる思惟的存在者（ens rationis）とされてきた数学的理念の客観性の問題が再燃したのである。

19世紀の終わりに登場したカントールの集合論は、当時の数学と哲学に多大なインパクトを与えたと想定される。ルヌーヴィエが、「現代の数学者も、かつての数学者も、数学的には無限の数を否定している」（[3], 34）と述べたことを真に受けるならば、1875年の時点では、実無限を否定する立場が優勢で、ボルツァーノやカントールのように、数の実無限を支持する者はきわめて少数だったと考えられる。しかし、やがて集合論は、解析の算術化に導入されるや、20世紀初頭には数学の基礎として位置づけられるようになる。

私見では、実無限および点集合としての連続体の登場は、数学的理念の存在と認識という狭義の哲学の問題にとどまらず、哲学全体の流れを大きく変え、また決定づけた。真の連続体とは何か。実無限や実無限小という理念（ルヌーヴィエは「イドラ」とも呼ぶ）を、どう捉えるか。それは哲学史において何度となく生じてきた、プラトンのアイデアとの再対決であり、近代以降は、カント的イデーあるいはヌーメノンの再考の問題に他ならない。それはまた、アリストテレス以来伝統的（かつ、哲学では標準的）に支持されてきた可能無限の立場と、現実的無限の立場の対決でもある。ルヌーヴィエの有限主義とカントールの無限主義の対決は、こうした文脈で再考の余地がある。

ラッセルやカントール自身によって素朴集合論の内部にパラドクスが見出されると、それを避けるべく、論理主義者や形式主義者は公理的な形式的体系へと向かった。他方で、直観主義者は、無制限な排中律の適用が、定義しようとしている全体や無限への言及を含意して悪循環に陥いるような、直観的に構成されざる非述語的定義を前提して証明することになるとして、心的・直観的に構成されうるものに限定する仕方で、数学を再構築すべきことを主張した。この方向が、一般に**数学基礎論争**として知られる展開である。

しかし、そうした数学の基礎づけをめぐる各流派の対決という軸の背後に、真の連続体とは何か、無限は本当に認識できるのか、それは思考可能な存在なのか、という哲学における伝統的な問題軸があった。後者の哲学的軸として、科学主義や実在論を批判するルヌーヴィエの有限主義が、コントの実証主義からポアンカレの**規約主義**への決定的なステップとなった側面もある [7]。実際、ルヌーヴィエは、有理数や無理数・負数・虚数などの数学的概念や微積分の記号を、単に規約として用いる分には、何ら反対しない。デデキントによる数の構成に対して言えば、数を道具主義的ではなく実在論的に解釈する者を批判するだろう。ルヌーヴィエにとって、無限や無限小は規約ないし虚構とみなされるべきものであり、彼の現実的無限や点からの連続体構成への反対は、数学を形而上学的な曖昧さから解放するための、数の形而上学的実在論への反論としてあった ([3], 230, 265)。

他方で、前者の数学的軸は、論理主義の極端を避けつつ、直観主義を含む有限主義的な数学を、数学の一部として取り込む仕方で一定の決着を見た。そして、公理主義や形式主義によって、あくまでも仮説（仮設）的な体系としての数学の性格を前面に打ち出すことで、数学は「カントールの楽園」としての自らの自由を主張した。すなわち、数学は、数学自身の内部で基礎づけられるし、いかようにも制限された体系を構築することができるのであって、もはや哲学という他者からの制限に、数学者が煩わされなくても良くなった。しかし、そのことは、連続体の本性や、無限にかんする人間の理解を問う哲学が、まったく無用になったということを意味するわけではあるまい。

数学と哲学のさらなる交流によって、無限や連続体について人が持つ多様な哲学的直観

と、形式化された連続体の概念の関係を反省することで、哲学的にも数学的にも魅力的な理論を構築していけるはずだ。

## 参考文献

- [1] Bell, John L. *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*, Springer, 2019.
- [2] Dauben, Joseph Warren. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton, 1979.
- [3] Renouvier, Charles. *Essai de Critique Générale*, Premier Essai, Tome Premier, Seconde édition, 1875 (Armand Colin, Paris, 1912).
- [4] Renouvier, Charles. Les labyrinthes de la Métaphysique, *La Critique Philosophique*, du 31 août 1876 au 10 janvier 1878.
- [5] Renouvier, Charles. Note sur l'infini de quantité, *La Critique Philosophique*, 6<sup>me</sup> année, N°15, le 10 mai 1877, pp. 225–7.
- [6] Schmaus, Warren. *Liberty and the Pursuit of Knowledge: Charles Renouvier's Political Philosophy of Science*, University of Pittsburgh Press, 2018.
- [7] Schmaus, Warren. From positivism to conventionalism: Comte, Renouvier, and Poincaré, *Studies in History and Philosophy of Science*, <https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2019.06.003>
- [8] 石黒ひで「ルヌヴィエ, シャルル・ベルナール」『フランス哲学・思想事典』弘文堂, 1999, pp. 327–330.
- [9] 伊藤邦武『フランス認識論における非決定論の研究』晃洋書房, 2018.
- [10] 九鬼周造『現代フランス哲学講義』, 『九鬼周造全集』第八巻, 岩波書店, 1981.
- [11] ボルツァーノ『無限の逆説』, 藤田伊吉訳, みすず書房, 1978.
- [12] 村田全『数学と哲学の間』玉川大学出版部, 1998.