虚構を通じて実在へ
――無限小の本性をめぐる ライプニッツの数理哲学――

池 田 真 治

「実在は理念や抽象によって完全に支配されることを決して止めない」[1]

本稿[2]では、ライプニッツの無限小概念をめぐる最近の議論を整理しつつ、無限小の本性をめぐるライプニッツの数理哲学の核心に迫ってみたい。そこではとりわけ「虚構主義」的解釈に焦点を当てる（第２・３節）。すなわち、ライプニッツは、無限小そのものの真実在を認めず、あくまで虚構だとする。次に、虚構としての無限小をライプニッツがどのように正当化するのかを問題とする（第４・５節）。ライプニッツに従えば、「無限小は良く基礎づけられた虚構」であり、無限小の方法は幾何学的に厳密なアルキメデスの方法に還元することで、数学的に正当化される。つまり、無限小は、有限主義的なパラフレーズによって消去されうる。しかし、無限小の方法は、伝統的手法と比べ、われわれの思考を縮約し、数学の進展に大きく寄与するものなので、積極的に使用すべきである。このような道具主義的態度は、われわれの思考の対象である数学的理念が、直接的ではないにせよ、記号的な表現関係として少なくとも間接的な仕方で、現実在に基礎をもつという立場によって哲学的に説明される。このように、ライプニッツの数学における無限小の虚構主義および道具主義は、自らの形而上学に深く根ざしおり、彼の哲学から切り離して単独で理解してはならないものである。こうして本論は、無限小の虚構性が現実在の理解の妨げとはならないとするライプニッツの哲学的説明を明らかにするため、冒頭にも引用した「実在は理念や抽象によって完全に支配されることを決して止めな

い」と言っていることの意味を分析する。しかし、われわれはまず、ライプニッツの無限小概念がそもそもなぜ問題になったのか、その発端を確認するため、最初に公刊された微積分のマニフェストである「新しい方法」の分析から始める（第１節）。

１．「新しい方法」*Nova Methodus* における無限小

ライプニッツはすでにパリ時代の1675年頃には微積分を実質的に発明していたが、微積分に関する自らの論文を最初に出版したのは、1684年10月の『学術紀要』（*Acta Eruditorum*）に掲載された「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法」(3) においてである。

論文冒頭において、ライプニッツは *dv* を無限小量としては定義せず、任意の有限な差分として導入する。しかし、すぐ次の節において、なんの前置きもなく、*d* が付された諸量を「０に等しい」とみなす。無限小に対する伝統主義者たちの不信感を考慮してか、無限小に代替する表現として「*dv* は０に等しい」（*dv aequ.* 0）と表現したのである。しかし実際にはこれは *dv* を無限小的に扱っているにほかならず、「等しさ」の概念が伝統的な意味から離れ、無限小の差分（differentialis）を含む形へと拡張されていることに、当時の注意深い読者ならば気付いたであろう。

この「新しい方法」で、ライプニッツは接線を求める諸問題に関して、それまでフッデやスリューズといった数学者たちが扱うことのできなかった、分数や無理数のベキを含む曲線も扱える一般的方法を提示する。とりわけ、ライプニッツの微積分がもつ効用は、接線の構成や面積を決定する問題を、曲線を表現している解析的方程式に含まれる量 *x, y,* …の比と、それらのあいだにある増分（ないし差分）すなわち *dx, dy,* …の比とのあいだの比例に基づき、ある単純な計算手続きへと還元したところにある。ライプニッツはこの自らの微分法を、アラビア数学の伝統に照らして「アルゴリズム」（algorithmus）と正統に呼ぶ。

また、デカルトが幾何学的厳密性の観点から数学で受容可能な曲線を代数的曲線にまで拡大しつつも、超越曲線を『幾何学』から除外したのに対して、ライプニッツは自らの方法が超越曲線に対しても妥当することを誇るべき特長として掲げる[4]。その箇所で、ライプニッツはこの論文で初めて「無限小」(infinite parvus) に直接言及する。

> また私たちの方法が代数計算に還元されえない曲線、つまりいかなる確定した次数ももたない超越曲線にも適用されることが明白である。このことは、接線を見出すということは本来、曲線上の無限に小さい距離をもつ2点を結ぶ直線を引くこと、つまり私たちにとっては曲線と同値である無限個の角をもつ多角形の一辺を引くことであると見さえするならば、いつも成功するとは限らない特別な仮定など設けることなく、普遍的な方法によって行われるのである。ところで、この無限小の距離は常に *dv* のようなある既知の差分か、それに対する関係、すなわちある既知の接線によって表されうる。(GM V, 223)

しかし、上述の引用において、曲線を無限多角形と同値とみなせる、とする論拠についてライプニッツは何も説明していない。

このように、「新しい方法」は、数学を大きく革新する画期的なアイデアと結果を含んでいたとはいえ、*dx* の二義性や、無限小の定義の不在、そして微分の諸規則に関する証明を欠くという問題をもつ不完全なものだった。そればかりでなく、等号の概念の拡大に関する説明や、将来それを支える原理となる連続律の説明も欠如している。この論文を読んだヨハン・ベルヌーイが、「解説というよりはむしろ謎かけだ」と評したのも無理はない[5]。

「新しい方法」の公表後、ライプニッツはベルヌーイらと共に微積分を改良しつつ、自らの論文を『学術紀要』などで精力的に公表する[6]。こうして1695年頃までには、微積分学の教科書に見られる概念や方法の大部分が発見さ

れた。しかし、そこでは無限小の身分について必ずしも一貫性が保たれているとは言えず、記述も不完全であった。1690-1700年頃にかけて、無限小の正当化をめぐりミッシェル・ロルやニーウェンテイトらと論争するが、ライプニッツの無限小は明確な定義や厳密性を欠くとして、痛烈な批判を受ける。

こうしてライプニッツは、無限小を虚構だとみなし、無限小の存在を明確に否定するに至る。しかし、少なくとも次の二つの異なるやり方で自己の手順を正当化した。一つは無限小をアルキメデスの「取り尽し法」と関係づけるもので、もう一つは「連続律」を使用するものである。ただし、いずれの正当化においても、無限小は虚構とみなされる。

2．無限小の「虚構主義」的解釈

自身の微積分に向けられた批判の対策として、ライプニッツはしばしば無限小を実在的なものと見なす必要はなく、ある種の「有用な虚構」として導入すればそれで十分であると説明する。ライプニッツが虚構主義の立場を明確に表明した時期については、見解に相違がある。たとえばジェスィフは、ライプニッツが少なくとも1702年の２月までに、無限小の虚構主義的見解をとるに至ったと解釈する(7)。他方で、リーヴィーは、『算術的求積』を書いた1676年までに、実無限小のいかなる存在論も放棄し、虚構としての無限小という公式見解に至ったとする(8)。ここで言われる無限小の虚構主義とは、無限小は単なる「簡約的な語り方」（compendia loquendi）であって、数学者はそのような対象の実在性についての形而上学的問いに関わらなくともよい、という見方を指す(9)。

実際、1702年２月２日にパリの数学者ピエール・ヴァリニョンに宛てた書簡で、ライプニッツは「数学的分析を形而上学的な論争に依存させる必要はないし、厳密に無限小の線分が自然の内に存在することを保証する必要もない」（GM IV, 91）と述べている。ライプニッツが虚構主義を主張したのは、「すべて

の人々に（無限小を用いた）推論がもっともらしいものであると納得してもらうため」であり、無限に関する伝統的な議論はよく知っているが、数学については表面的な知識しかもたないイエズス会派や伝統主義者に向けてという戦略的側面が確かに一方ではあろう。しかし、虚構主義の採用がそうした宗教的・政治的配慮という理由に限られていたわけではない。ライプニッツは同年6月20日のヴァリニョン宛書簡で、フォントネルが微積分計算から形而上学的な要素を引き出そうとしていることを一笑し、「本当のことを言うと、私自身は、われわれの無限や無限小が、理念的なものあるいは良く基礎付けられた虚構とは、何か別のものとして考える必要があると確信するには程遠いところにあります」と述べているからである（GM IV, 110）。

ただし、ライプニッツは単に道具主義的な観点から無限小を虚構として導入しているのではない。無限小は実在的なものではありえないが、「極めて良く基礎づけられているので、幾何学および自然における一切は、完全な実在であるかのように生じる」（GM IV, 93）。自然の運動変化には、実際にそうした無限小の差とみなせる現象であふれているからである。

では、無限小という虚構は、幾何学や自然のうちにおいて、いかにして実在であるかのようにふるまうのであろうか。ライプニッツは、静止を無限小の運動、一致を無限小の隔たり、等しさを無限小の不等とみなす連続律に訴えて、その証拠としている。そして、われわれの理念と実在の関係について、次のように述べる。「連続性は観念的な事物であり、完全に一様な部分をもつものは自然のうちには決して存在しないが、その代償として、実在は理念や抽象によって完全に支配されることを決して止めない」（*ibid.*）。すなわち、数学で用いられる連続性や無限小は、われわれの思考の対象である「観念的なもの[10]」にすぎない点で非実在だが、それによってわれわれが自然という現実在を理解し説明するものでもある。さらにライプニッツは、無限小と現実在の関係を次のような仕方で示唆する。物質は無限に分割可能であるにもかかわらず、自然のうちに指定可能な要素としてあたかも原子が存在するかのように、有限の規

則は無限においても成り立つ。他方で、それらが本当は必要でなくとも、あたかも形而上学的な無限小が存在するかのように、無限の規則は有限のうちでも成り立つ（GM IV, 94）[11]。

しかし、一体どのようにして、連続性や無限小によって実在を完全に支配するのか。また、「実在を完全に支配する」とはどういうことであろうか。それは、理念的な無限小の数学と実在的な自然との間にシンボリックな調和的対応があるとする形而上学、すなわち1695年に公表した「予定調和説」に明らかにコミットしている。この説によれば、精神と自然とが調和している限り、実在においていかなる有用性ももたない理念や抽象もなければ、実在の反映をいかなるかたちでももたない理念や抽象もないのである[12]。ライプニッツはしばしば無限小の身分とその実在的基礎を論じる際に虚根をアナロジーとして用いるが、$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$となって左辺が結果において右辺の実量と対応し、虚根すら「事象のうちに基礎」（fundamentum in re）をもつように、無限小もまた幾何学や自然のうちにその基礎をもつ（GM IV, 93）。こうして、無限小は、よく基礎付けられた仕方で、その調和的対応物を現実在においてもつことになる。

さて、こうした虚構主義的見解は、最近のジェスィフやリーヴィーらの論文に限らず、多くのライプニッツ研究者が支持してきた見解であり、ライプニッツ自身による明示的な典拠にも枚挙にいとまがない。ジェスィフが注目するのは、むしろ、ライプニッツが虚構主義をどのように擁護したかである。というのも、無限小を虚構として捉えたからといって、無限小を数学において正当に用いてよいということは何ら直接的に帰結しないからだ。

歴史的にも、数学的に問題となったのは、存在身分よりも、無限小が幾何学的厳密性の規準を満たさないということである。ホッブズとウォリスの長年に渡る論争は、まさに幾何学的厳密性をめぐるものであった[13]。また、ミッシェル・ロルは、1700年に、無限小が厳密性の要求される幾何学およびそれに依拠する精密科学を崩壊させると批判している。

このように、虚構主義の採用そのものは、幾何学的厳密性の問題をクリアするわけではない。したがって、ライプニッツの虚構主義でなされるべき主な仕事は、無限小の導入が、矛盾を生じないという意味でまったく無害であるということを示すことになる。すなわち、厳密な論証と無限小の虚構性を調停することである。

3.『算術的求積』における虚構主義の先駆

無限小を古典幾何学の枠組みと和解させる試みは、すでに1675-76年に書かれた『円・楕円および双曲線の算術的求積』(14) でなされている。これは現存する唯一の長めの数学的モノグラフであり、51の命題が証明を伴って与えられている。もう一つの試みは、パリ諸学アカデミーとの論争の文脈で1702年にヴァリニョン宛に添付された、「通常の代数計算による無限小計算の正当化」である（GM IV, 104-106)。ジェスィフは、現代的にみれば、前者は構文論的・証明論的な手法であり、後者は意味論的・モデル論的な手法だとする (15)。

まず、『算術的求積』では、無限小を用いた任意の証明が、背理法による完全に厳密な古典的な取り尽くし法の手続きへと書き換えることができる、とライプニッツは主張している。また、これに基づき、すでに後の虚構主義的見解が提示される。

> 今日まで私が知る限り、一つの求積においてすら、背理法によらずに完全な演繹がなされうるような仕方は存在しないと告白する。虚構的な量すなわち無限や無限小を介入させなくても、このことが自然的な手法でできないのではないかということを恐れる根拠を私はもっている。(16)

> そのような量が自然のうちにあるかどうかは問題ではない、というのも、それらが虚構によって導入されているということで十分であり、それらは論証

におけるのと同様に、発見における語りと思考の縮約を認めるからである。[17]

これらは、後に1702年のヴァリニョン宛書簡で表明される虚構主義（cf., GM IV, 92）の主張と同一である。「新しい方法」を公表する前のことなので、ライプニッツはニーウェンテイトやロルの批判を受けたから虚構主義をアドホックなし方で採用したわけではなく、若い頃からすでにその考えを懐胎していたことが分かる。また、背理法を用いた有限的で間接的な証明の方が「自然的な手法」だと見なしている[18]。要するに、無限小は、自然的だが間接的な証明を縮約し、直接的な論証へと変換する虚構として導入されるのである。そこには、虚構がもつネガティヴなニュアンスはない。むしろ、煩雑な演繹を避け、計算を容易にするものだ。こうして無限小という虚構は、「語りと思考を縮約するし方」（compendia loquendi ac cogitandi）として提示される[19]。

では、ライプニッツはなぜ、無限小を真正な数学的対象ではなく、思考の縮約をもたらす有用な虚構とみなしたのか。たとえば、A. ロビンソンは、1966年の『超準解析』において、ライプニッツは無限小の存在を確信していたが、その満足のいく論理的正当化を得られなかったために無限小を虚構とみなしただけだとする。そこでは無限小は、通常の数学の対象領域を拡大して付け加えられる、「理念的要素」[20]のようなものである。また小林は、ライプニッツが無限小を比較不可能な量[21]すなわち非アルキメデス的量[22]として規定しているド・ロピタル宛書簡を検討し、「無限小については様々な議論や難点があるが、［……］無限小そのものに数学的対象として独自の身分を与えたのは確かである」とする[23]。

しかしこれら無限小の実在的解釈は、無限の全体や実無限小に対するライプニッツの拒否と整合しない。「いかなる量よりも小さい量」としての無限小が存在するという言明は、アルキメデス性を満たさない最小の量の存在を含意し、ライプニッツにおいても明白な矛盾である。したがって無限小は明確な指示を持たず、石黒が分析したように、代替的なし方で、有限量のみが現れる文脈的

な定義をしか与えることのできないものである[24]。ライプニッツが無限小を「比較不可能な量」と表現したり、「非アルキメデス的量」として捉えている箇所もあるが[25]、その実在性に明確にコミットしているわけではない。実無限小を数学的対象として形式的体系に導入することと、その存在への形而上学的コミットメントは異なる問題である。このことは、小説でも虚構が用いられているからといって、その実在を信じているわけではないのと同様である。また、この規定は虚構主義と矛盾しない。ライプニッツにおいて、ある量が比較不可能性や非アルキメデス性をもつ場合、実在的とはみなされず、むしろ虚構となるからである。たとえ無限小を有限的・文脈的定義によって消去したとしても、それは確定した一つの量をもたないため、観念的なものにとどまる。

たとえばラブーアンは、ライプニッツが『算術的求積』と同時期に現実的無限を数学において受け入れることを拒否しているとして、次の引用を証拠に挙げる。

> ある無限級数が総和をもつと私が言うとき、同じ規則で展開される任意の有限級数が総和をもつということであり、級数が増えるにしたがって、誤差は常に減少していき、われわれが望むだけ小さくなっていく。数はそれ自体においては絶対的なし方で無限に至ることはない。というのも、そうだとすると最大数が存在することになってしまうからである。(A VI 3, 503)

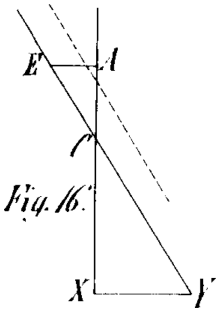
無限級数の総和をもつことは、級数を形成している項の数全体をとっていることであり、したがって最大数を認めてしまっているように思われるということに対して、ライプニッツは、ガリレオと同様に、最大数が不可能であることから、その理解の困難さを認める。いずれにしても、ライプニッツは、最大数の不可能性を支持するかぎり、カテゴリカルな意味での実無限や実無限小を、真正な数学的対象として認めることはできない。

『算術的求積』に関しては、パルマンティエのように、そこで展開された微

分計算が、19世紀に展開された解析の可能な正当化の一つを予期させるものだとする現代的な評価がある 。これに対して、ジェスィフは、ライプニッツの手続きが多くの問題から無限小の消去可能性を示すものであるとしつつも、任意の解析的方程式によって表現されうる曲線に対してまで適用しうるほどには、完全に一般的な方法としては確立されておらず、この方法の応用には制限があるとする[27]。後世のコーシーやリーマン、ワイエルシュトラスらの仕方で、無限小を消去するための完全に一般的な論証を確立するには、方程式や級数、導関数や収束条件など、重要な道具立てが『算術的求積』ではまだ欠けていたのである。しかし、現代的な一般的論証への方向づけをすでに内在していたことも確かなのである。

4．通常の代数計算による無限小計算の正当化

次に、1702年の「通常の代数計算による無限小計算の正当化」において、ライプニッツは、通常の代数においても無限小の導入がまったく無害であり、無限小は一般的な代数の原理によって引き受けられうるということを示そうとする。以下は冒頭部分である。



二直線、AX と EY（Fig. 16参照）が C において互いに交わっているとする。点 E と点 Y をとり、EA と YX が直線 AX に対して垂直になるように導け。いま、AC を c、AE を e、AX を x、XY を y と呼ぼう。このとき、CAE, CXY が相似な三角形であるから、$x-c:y=c:e$。したがって、直線 EY が、変化する点 C において同じ角を常に保って［つまり平行に］、点 A へと徐々に近づいていくとすると、直線 c と e が常に減少していくのに対し、c の e に対する比は同じままにとどまっていることが明らかである。ただし、

そこでの比が等しいものの比ではないと仮定し[28]、また上述の角が直角ではないと仮定する[29]。

今、直線 EY が A 自体に至るケースを考えよう。このとき点 C と点 E もまた A に至ることは明らかであり、直線 AC, AE すなわち c と e は消失するであろう。そして、類比あるいは等式 $\frac{x-c}{y}=\frac{c}{e}$ は $\frac{x}{y}=\frac{c}{e}$ となろう。したがって今のケースでは、$x-c=x$ である。このケースが一般的規則のもとで理解されていると想定してみよう。それでも、c と e は絶対的な無ではありえない、なぜなら、それらは CX の XY に対する比を全体として保つからである……。(GM IV, 104-5)

ここでライプニッツは、三角形の相似に基づき、比例が保たれたまま進展し、２つの増分が消え入る数列を考察する。そこでは、△ ACE と△ XCY の相似を用い、直線 EY が図のように平行移動して、点 A に接近していくとする。この三角形の比例に関する数列は、極限では、点 A に一致する。こうして、増分が０になっても比例を保つ量として、無限小を導入できると考えたのである。

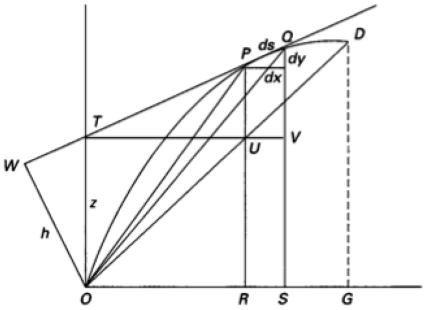
その論証は、極限移行して得られる $\frac{0}{0}$ が１になるという疑わしい前提に基づいてしまっており、完全に妥当な論証とは言えない。ただし、ここは無限小の虚構性の主張を維持している文脈であって、関連する量が実在的な量だと主張しているのではない。あくまで、「比例を保つ０」として、無限小を通常の代数に埋め込むことができるとするのである。

しかし、「比例を保つ０」という対象は、いかにして正当化されうるのであろうか。そのためにはさらに、次に見る「連続律」が要請される。

５．連続律による無限小の正当化

無限小という虚構ないし理念的対象の導入を正当化する別の方法は、「連続律」による。連続律とは、原因の差が小さくなるほど、求める結果の差も近づ

いてゆくという原理で、一般的には、「自然は飛躍せず」という表現で知られる。それは、飛躍を含まない連続的変化によって、一方を他方の限界事例とみなすことができるとする原理でもある。たとえば、厳密には異なるが、無限や無限小という言葉の使用によって、静止は無限小の運動、等しさは無限小の誤差をもつ不等、円は無限の角をもつ正多角形とみなせる。そこではまさに連続律を適用して、一方を他方の限界事例とみなしているのである（GM IV, 106）。他方で、性質の観点から見れば、連続律は明らかにある矛盾を許容している。円は角をもたないのだから、厳密には多角形ではありえない。したがって、限界において同じ性質が保たれるとみなす際に、想像力に訴えるだけでは不十分ならば、性質の連続的移行を許す何らかの超越的規則が必要になる。それこそが連続律である。



ライプニッツの微積分を確立する上で根本的な定理である変換定理には、ある種の理念化ないし抽象化が含まれる。無限小三角形の知覚的対応物（図形としての微小三角形）は、厳密には存在しえない。にもかかわらず、微小だが有限な三角形によって、極限においても同じ比例が成り立つことを代表させている。

V.J. カッツは、ここには無限小点においても対応する有限三角形との比例を保つことを保証する、「連続律」の使用があるとする（図はカッツ『数学の歴史』から）[30]。このとき連続律は、数学的な抽象ないし理念化を保証する根本原理ともみなせよう。ただし、変換定理を得た1674年の時点では、ライプニッツはまだ連続律を定式化していない。その最初の定式化は、フィシャンによれば、1678年の『物体の衝突について』[31] である。1679年のクラーネン宛書簡では、「所与ないし原因の差が望めば望むほど小さくなるならば、求める結果の差も限りなく近づく」という明晰な表現を得る。そして1687年には、その連

続律に基づき、マルブランシュを相手にデカルト派の運動規則の誤謬を論駁するのである[32]。

こうしてライプニッツは、無限小という虚構ないし理念的対象の導入を、連続律によって保証する。これによって、dx や dy を用いた計算結果は、古典的・有限的な数学でも真のままである。それでも満足しない者は、アルキメデス的な取り尽し法に訴えることができるので、いずれにしても無限小の方法はより厳密な論証に還元される。

しかし、連続律による正当化は、多分にライプニッツの形而上学に基礎をもつ点で、数学内での正当化を超えるところがある[33]。また、ジェスィフが指摘するように、連続律については、数学的にも、「極限事例への移行」の条件を特定する仕方で、より精密に規定する必要があったろう（たとえば、$0 < x < 1$で、$x \to 0$へと減少していくとすると、$x^2 < x$ となるが、極限では$0^2 < 0$。すなわち$0 < 0$であるが、これは矛盾。この場合、極限では、$x^2 \leqq x$ となるように等号を加えなければならない）。ライプニッツが連続律による厳密な正当化を得るには、数列や級数、極限や収束条件といった道具立てを整える必要があったが、それには後世の厳密化を待たねばならなかったのである。

とはいえ、ライプニッツは自身の微積分が、単なる近似の方法であるとか、厳密な結果を論証する手段ではない、といったネガティヴな評価を与えたことはない。また、単なる数学的道具主義のような立場でも決してない。無限小は、たとえ本当には存在していなくても、あたかも完全な実在であるかのようにふるまうのである。

結　論

虚構としての無限小が、現実の物質的世界の理解に役立つように、虚構を通じて実在へと接近しうることをライプニッツは確信していた。無限小の数学はそのための単なる実用的な道具ではなく、モナドが属する実在的な自然をでき

るだけ正確に表現するため、自然を表象的にしか捉えきれない精神が、自然がもつ連続性を表現する記号として生み出した、実在的基礎をもつ虚構だったのである。

注

（1）Leibniz an Varignon, Hanover 2 Fevrier 1702: “le réel ne laisse pas de se gouverner parfaitement par l’idéal et l’abstrait“（GM IV, 93）.

（2）本稿は、2017年 3 月に神戸大学で開催された、日本ライプニッツ協会春季大会シンポジウム「ライプニッツ数理哲学の最前線」における研究発表に基づく。また本研究は、科研費 JP16K02113の助成を受けている。

（3）GM V, 220-226 ; 工作舎著作集 2, 296-307.

（4）この点はクノープロッホの次の論文が詳しい。E. Knobloch, “Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to “transcendental” mathematics”, *Historia Mathematica* Vol. 3, 1, Feb. 2006, pp. 113–131.

（5）Rudolf Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, 2. Cyclus, Zürich, 1859, p. 72 :「……兄［ヤコブ］と私は、1684年のライプツィヒ学報に収録された、ライプニッツ氏の小論に偶然出会った。そこではたった 5 - 6 頁で、微分計算についてのごくあっさりした考えが述べられていた。それは解説というよりも謎かけだった。しかし、ほんの数日の間でそれを深く掘り下げてあらゆる秘密を明らかにし、それから無限小という主題についていくつもの作品を出版するには、われわれにとってはそれで十分であった。」

（6）『学術紀要』に発表された論文は、次の文献に集成されている。G. W. Leibniz, *La Naissance du calcul diférentiel : 26 articles des Acta eruditorum*, M. Parmentier (éd.), Paris : Vrin, 1995.

（7）D. M. Jesseph, “Leibniz on The Elimination of Infinitesimals”, in Norma B. Goethe, Ph. Beeley, D. Rabouin (eds.), *G.W. Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy*, Springer, 2015, p. 194f.

（8）S. Levey, “Archimedes, Infinitesimals and the Law of Continuity: On Leibniz’s Fictionalism”, in U. Goldenbaum and D. Jesseph (eds.), *Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries*, de Gruyter, 2008, pp. 107-133.

（9）Cf. D. Rabouin, “Leibniz’s Rigorous Foundations of the Method of Indivisibles. Or How to Reason with Impossible Notions”, in V. Jullien (ed.), *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, Birkhäuser, 2015, p. 348.

(10) 虚構と観念は厳密には身分が異なる。ライプニッツの観念の理論および虚構の概念を詳述することは本稿の範囲を越えるが、本稿では以下、無限小を「観念的なもの」とみなして議論を展開しているので、そのことについてここで少し説明を補っておく。ライプニッツの「観念」の概念は多義的であり、広くは精神の内なる対象一般から、外来的な観念、そして生得的な単純観念までを包摂するものである。それに対して「虚構」は、そうした観念の誤った複合によって人為的に形成されるものである。それは、不完全な概念に由来し、事物の本性にはないものである。しかし虚構もまたこの意味では「観念的な事物」である。われわれの精神が関わり、不完全な概念である点では、連続体や点・角度などの通常の幾何学的対象もまた虚構にすぎない。たとえば、1677年の「観念とは何か」（GP VII, 263f.）によれば、ライプニッツにとって、ある事物の観念をもつとは、その事物について思惟する能力があることであり、その事物を精神が表出する、すなわち、その事物が内にもつ諸関係に（記号的・秩序的に）対応する諸関係を自らの精神の内にもつことである。虚構のうち、最大数など、矛盾的なものは思惟の可能性がなく、想像すら不可能なものなので、厳密には観念とはみなせない。しかし、本論で詳しく述べるように、無限小の方法はアルキメデスの手法とのあいだにこうした表現関係をもち、また自然現象とのあいだにも表現関係をもつ。この意味で、無限小は虚構とはいえ、その有用性が想像可能な事物について確立している真理に正確に依存している点で「良く基礎付けられた」ものであり、無限小もまた他の数学的存在と同様に、その身分は「観念的なもの」なのである。

(11)「新しい方法」（1684）の冒頭でやっていたことは、ここで説明される。すなわち、「有限の規則は無限においても成り立つ」というのは、dx を有限量とみなして、dx に対して通常の代数的規則を適用してよいということ、また「無限の規則は有限のうちでも成り立つ」というのは、dx は無限小として無視できる量であるから、極限移行の操作をほどこし $dx = 0$ と近似させてよいということであろう。

(12) このことについては、次の論文で詳しく論じた。池田真治「想像と秩序―ライプニッツの想像力の理論に向けての試論―」『ライプニッツ研究』創刊号、2010年、pp. 37-58.

(13) アミーア・アレクサンダー『無限小――世界を変えた数学の危険思想』、足立恒雄訳、岩波書店、2015。

(14) G.W. Leibniz, *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*, Introduction, traduction et notes de M. Parmentier, Texte latin édité par E. Knobloch, Paris : Vrin, 2004.

(15) Jesseph, *op. cit*., p. 196f.

(16) Leibniz, *op. cit*., p. 68.

(17) *Ibid*., p. 182.

(18) ライプニッツが無限小の方法をアルキメデスの手法に還元することで、自身の方法に幾何学的確実性を与えようとした数学的正当化は、ヒルベルトが「無限について」という講演で提唱した「有限の立場」に通ずる。すなわち、「無限小についての取り扱いは、これを有限についての操作で置きかえて、……前となんの変わりもなく、すなわち同じ証明法、同じ計算法によって、定理や公式が得られるようにしなければならない」(ヒルベルト「無限について」、寺阪英孝・大西正男編訳『ヒルベルト　幾何学の基礎　クライン　エルランゲン・プログラム』共立出版、1670年、p. 221)。

(19) Rabouin, *op. cit*., p. 359.

(20) 理念的要素ないし理想元（die idealen Elemente）とは、ヒルベルトが「無限について」において提示した、無限の概念をはじめとして、無限遠点や虚数、イデアル数など、数学において使用される理念に対して、形式主義的な解釈を与えるものである。そこでは、それらは理念的要素として具体的・内容的意味を抽象され、もっぱら抽象的・形式的なものとして扱われる。こうして、記号体系の一般的理論としての数学の理念が形成される。たとえば、幾何学では、「無限遠点」という理想元を考えることによって、より一般的な定理が成立し、非常に便利な結果が得られる。また代数学では、「複素数」という理想元により、方程式の根の存在、およびその個数に関する定理が単純化される。ヒルベルトは、これらと同様に、カントールの「実無限」も、それを理想元とみなし、初等整数論で行われる論法のもつ確かさを心がけ、任意の抽象的な概念構成を許容しないよう注意深く推論していけば、数学に背を向けないで集合論の逆理から逃れることができるとする。こうして数学者は、カントールの楽園から追放さ

れずに済む、と論じる（ヒルベルト、前掲書、pp. 220-242）。

(21) ライプニッツは、任意の微分に対し、それより高階の微分は「比較不可能なほど小さい」（incomparablement petit）とする。例えば、dx は x に対して、ddx は dx に対して比較不可能なほど小さい。したがってこの場合 dx は無視できる量であり、$dx = 0$ としてもよいとライプニッツは考えた。

(22) 非アルキメデス性とは、任意の 2 数 a, b について、$a < b$ のとき、どれだけ自然数 n を大きくとろうとも、$b < na$ とはならないことを言う。このとき、a が無限小であるか、b が無限大であるとみなすことができる。

(23) 小林道夫「ライプニッツにおける数理と自然の概念と形而上学」『哲学研究』第581号、pp. 22-24。我孫子信・出口康夫・松田克進編『デカルトをめぐる論戦』、京都大学出版会、2013、pp. 83-87, p. 186も参照せよ。

(24) 石黒ひで「ライプニッツの無限小概念」『ライプニッツの哲学――論理と言語を中心に――』、岩波書店、増補改訂版、2003年、93-118頁。

(25) Cf. 池田真治「ライプニッツの無限小概念――最近の議論を中心に――」『哲学論叢』第33号、2006、pp. 138-149。

(26) M. Parmentier（2001）. “Démonstration et infiniment petits dans la Quadratura arithmetica de Leibniz”, *Revue d'histoire des sciences*, 54-3, 275-289.

(27) Jesseph, *op. cit*., p. 199.

(28) $c \neq e$ とする、ということ。

(29) $\angle XCY = \angle ACE \neq 90°$ とするということ。

(30) V. J. カッツ『数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳、共立出版、2005年、第12.6節参照。

(31) G.W. Leibniz, *La réforme de la dynamique*. De corporum concursu (1678) *et autre textes inédites*, Edition, prrésentation, traductions et commentaires par M. Fichant, Paris : Vrin, 1994.

(32) 無限小と連続律の関わりについては、前掲の小林道夫「ライプニッツにおける数理と自然の概念と形而上学」『哲学研究』第581号、pp. 1-28および第582号、pp. 1-24が簡潔明瞭である。

(33) ライプニッツは無限小を正当化するために用いた連続律を、理由律によって正当化するのだが、その検討のためには、さらにライプニッツの形而上学に深入りしなければならず、本稿の範囲を超える。

Reality Through Fiction

Leibniz on the nature of infinitesimals

Shinji IKEDA（Toyama）

Focusing on the "fictionalistic" interpretations of infinitesimals, we study in this article Leibniz's conception of the nature of infinitesimals. The key of this article is Leibniz's statement in a letter to Varignon (Feb. 2, 1702): "though continuity is something ideal and there is never anything in nature with perfectly uniform parts, the real, in turn, never ceases to be governed perfectly by the ideal and the abstract and that the rules of the finite are found to succeed in the infinite". Through analyzing carefully this sentence, we assert that Leibniz's fictionalistic understanding of infinitesimals cannot be understood as a mere instrumentalism. First, we check his use and understanding of infinitesimals in the *Nova Methodus* of 1684. We find here that Leibniz lacks the definition of infinitesimals and several other fundamental ideas to justify his use of infinitesimals in his differential calculus. Secondly, we summarize recent interpretations of Leibniz's infinitesimals. Surveying recent articles on this topic, and analyzing Leibniz's letters to Varignon, we assert that fictionalism is the standard and natural view on the nature of Leibniz's infinitesimals. Since fictionalism is not intended to give the justification and the rigorous foundation of the infinitesimal calculus, we then verify the way Leibniz justifies his use of infinitesimals, firstly in his largest mathematical monograph *De Quaduratura arithmetica* of 1675 and secondly in the "Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire" of 1702. To justify his calculus, he also needs to appeal to the law of continuity, which is derived from his considerations of the collision problem of bodies. We pay attention that the law of continuity needs more mathematical tools such as the convergence condition and more metaphysical foundations such as the Principle of

Sufficient Reason. Through this article, we conclude that Leibniz's fictionalistic view of infinitesimals is not only coherent with the rigorous demonstration by the method of exhaustion, but also coherent with his understanding of the material world.