

Free-fermionic presentation of stable Grothendieck polynomials

岩尾慎介

東海大学理学部

17/03/2021

日本数学会 2021 年度年会

グロタンディーク多項式とはシューベルト多項式の一般化の一種で、旗多様体の K 理論の研究から導出されたものである (A. Lascoux [9, 10], 1980 年代)。

グロタンディーク多項式とはシューベルト多項式の一般化の一種で、旗多様体の K 理論の研究から導出されたものである (A. Lascoux [9, 10], 1980 年代)。

対称グロタンディーク多項式は、そのうちグラスマン多様体に対応するものの名称である。これはシューベルト多項式の一部であるシューア多項式に対応する。

(対称グロタンディーク多項式のことを単に「グロタンディーク多項式」と呼ぶ慣例がある。本講演でもこの慣例に従う。)

	コホモロジー	K 理論
旗多様体	シューベルト	グロタンディーク
グラスマン多様体	シューア	(対称) グロタンディーク

グロタンディーク多項式について（先行研究）

シューア多項式の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

グロタンディーク多項式について（先行研究）

シューア多項式の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

集合値ヤング盤を用いた組み合わせ論的解釈 [1] や、非可換シューア関数による実現 [16] などの代数的組み合わせ論的側面からの一般化。

行列式公式 (ワイル型 [3, 7, 16]、ヤコビ-トゥルーディー型 [7, 11])、 K 理論的クリスタル [14] といった表現論的側面からの一般化。

グロタンディーク多項式について（先行研究）

シューア多項式の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

集合値ヤング盤を用いた組み合わせ論的解釈 [1] や、非可換シューア関数による実現 [16] などの代数的組み合わせ論的側面からの一般化。

行列式公式 (ワイル型 [3, 7, 16]、ヤコビ-トゥルーディー型 [7, 11])、 K 理論的クリスタル [14] といった表現論的側面からの一般化。

可積分系との関係:

Motegi-Sakai [12, 13] は具体的な量子可積分系 (TASEP, melting crystal) の逆散乱解法からグロタンディーク多項式が導出されることを発見した。

グロタンディーク多項式について（先行研究）

シューア多項式の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

集合値ヤング盤を用いた組み合わせ論的解釈 [1] や、非可換シューア関数による実現 [16] などの代数的組み合わせ論的側面からの一般化。

行列式公式（ワイル型 [3, 7, 16]、ヤコビ-トゥルーディー型 [7, 11]）、 K 理論的クリスタル [14] といった表現論的側面からの一般化。

可積分系との関係:

Motegi-Sakai [12, 13] は具体的な量子可積分系（TASEP, melting crystal）の逆散乱解法からグロタンディーク多項式が導出されることを発見した。

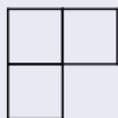
Nagai-I [6] は古典可積分系（離散戸田方程式）の特殊解として双対安定グロタンディーク多項式が現れることを示した。

個々の可積分系に依存しない方法で、 K 理論的対称多項式を記述できないか？

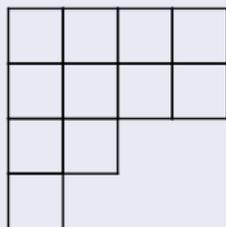
例 (ヤング盤を用いた表示)

$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0)$ を分割とする ($|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty$).

例



$$\lambda = (2, 1),$$



$$\lambda = (4, 4, 2, 1).$$

例 (ヤング盤を用いた表示)

有限個の自然数を左から右に向かって広い意味で単調増加
上から下に向かって狭い意味で単調増加
に入れたものを半標準ヤング盤もしくは単にヤング盤という。

例

1	1
3	

1	1	3	5
2	4	4	6
3	6		
5			

例 (ヤング盤を用いた表示)

$ST^n(\lambda)$ を、形が λ で 1 以上 n 以下の数字が入っているヤング盤全体の集合とする。

$T \in ST^n(\lambda)$ に対して

$$x^T = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{(T \text{ に含まれる数字 } i \text{ の個数})}$$

とする。

定義

λ に対応するシューア多項式 $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \in ST^n(\lambda)} x^T$$

と定める。

例 (ヤング盤を用いた表示)

$\lambda = (2, 1)$ のとき

$ST^3(\lambda)$ の元は

1	1	1	2	1	3	2	2	2	3
2		2		3		3		3	

の 8 つ。シューア多項式 $s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)$ は

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

という対称多項式である。

集合値ヤング盤

ヤング盤のルールを緩め、一つの箱に相異なる複数の数字が入ることを許したものを**集合値ヤング盤**という。数字の大きさのルールは変更なし。

集合値ヤング盤の集合を $SST^n(\lambda)$ と書く。

集合値ヤング盤

$\lambda = (2, 1)$ のとき

$SST^3(\lambda)$ の元は

1	1
2	

1	12
2	

1	13
23	

12	2
3	

1	123
2	

など 27 個。

集合値ヤング盤を用いた定義

定義

λ に対応するグロタンディーク多項式 $G_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を

$$G_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \in SST^n(\lambda)} \beta^{\text{ex}(T)} x^T,$$

と定める。 β はパラメータ。

$\text{ex}(T) = (\text{数字の個数}) - (\text{箱の個数}) + 1$ は超過した箱の個数。

例

$$\begin{aligned} G_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \cdots) + 2x_1 x_2 x_3 \\ &\quad + \beta(x_1^2 x_2^2 + \cdots) + 3\beta(x_1^2 x_2 x_3 + \cdots) \\ &\quad + 2\beta^2(x_1^2 x_2^2 x_3 + \cdots) + \beta^3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{aligned}$$

よく知られた事実

自由フェルミオンを用いたシューア多項式の表示。

Cf.) T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, "ソリトンの数理 (Solitons, Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras (En)) ,"
Iwanami Shoten, Tokyo, 1993 (Jp), Cambridge University Press, 2000 (En).

アイデア: これを一般化してグロタンディーク多項式の
自由フェルミオン表示を得たい。

シューア多項式の自由フェルミオン表示

$[A, B]_+ = AB + BA$ とする。

以下の反交換関係を満たす自由フェルミオン $\{\psi_m, \psi_n^*\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \quad [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{m, n},$$

の生成する \mathbb{C} 代数を \mathcal{A} とする。

(自由フェルミオンの代数・クリフォード代数)

シューア多項式の自由フェルミオン表示

真空ベクトル $|0\rangle, \langle 0|$:

$$\psi_m|0\rangle = \psi_n^*|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_n = \langle 0|\psi_m^* = 0, \quad m < 0, n \geq 0.$$

$m < 0, n \geq 0$ に対して、

ψ_m, ψ_n^* 消滅演算子

ψ_n, ψ_m^* 生成演算子

シューア多項式の自由フェルミオン表示

\mathcal{F} を $\psi_{n_1} \psi_{n_2} \cdots \psi_{n_r} \psi_{m_1}^* \psi_{m_2}^* \cdots \psi_{m_s}^* |0\rangle$,

$(r, s \geq 0, n_1 > \cdots > n_r \geq 0 > m_s > \cdots > m_1)$

の形の元の生成する \mathbb{C} ベクトル空間、

\mathcal{F}^\dagger を $\langle 0 | \psi_{m_s} \cdots \psi_{m_2} \psi_{m_1} \psi_{n_r}^* \cdots \psi_{n_2}^* \psi_{n_1}^*$,

$(r, s \geq 0, n_1 > \cdots > n_r \geq 0 > m_s > \cdots > m_1)$

の形の元の生成する \mathbb{C} ベクトル空間とする。

\mathcal{F} は左 \mathcal{A} 加群、 \mathcal{F}^\dagger は右 \mathcal{A} 加群の構造を持つ。(フォック空間)

シューア多項式の自由フェルミオン表示

事実

関係

- ① $\langle 0|0\rangle = 1,$
- ② $(\langle w|\psi_n)|v\rangle = \langle w|(\psi_n|v\rangle),$
- ③ $(\langle w|\psi_n^*)|v\rangle = \langle w|(\psi_n^*|v\rangle).$

を満たす双線形形式

$$\mathcal{F}^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \langle w| \otimes |v\rangle \mapsto \langle w|v\rangle$$

が一意的に存在する。

$X \in \mathcal{A}$ について

$$\langle X \rangle := \langle 0|X|0\rangle$$

を X の真空期待値という。

シューア多項式の自由フェルミオン表示

シフトされた真空ベクトル

$$|m\rangle = \begin{cases} \psi_{m-1}\psi_{m-2}\cdots\psi_0|0\rangle, & m \geq 0, \\ \psi_m^*\cdots\psi_{-2}^*\psi_{-1}^*|0\rangle, & m < 0, \end{cases}$$

$$\langle m| = \begin{cases} \langle 0|\psi_0^*\psi_1^*\cdots\psi_{m-1}^*, & m \geq 0, \\ \langle 0|\psi_{-1}\psi_{-2}\cdots\psi_m, & m < 0. \end{cases}$$

シューア多項式の自由フェルミオン表示

\therefore を normal ordering (消滅演算子をすべて右に寄せる記号)、
 $p_n(x) = x_1^n + x_2^n + \dots$ を n 次べき和とする。

作用素 $a_m, H(x), e^{H(x)}$

以下の無限和はすべて作用素 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ として意味を持つ。

- $a_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_k \psi_{m+k}^* :$
- $H(x) = \sum_{n>0} \frac{p_n(x)}{n} a_n$
- $e^{H(x)} = 1 + H(x) + \frac{H(x)^2}{2!} + \frac{H(x)^3}{3!} + \dots$

シューア多項式の自由フェルミオン表示

定理

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するシューア関数 $s_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$s_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1} \psi_{\lambda_2-2} \cdots \psi_{\lambda_r-r} | -r \rangle.$$

主結果

新しい作用素 $\Theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を

$$\Theta = \beta a_{-1} - \frac{\beta^2}{2} a_{-2} + \frac{\beta^3}{3} a_{-3} - \cdots$$

にて定める。

定理

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するグロタンディーク多項式 $G_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$G_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1} e^\Theta \psi_{\lambda_2-2} e^\Theta \cdots \psi_{\lambda_r-r} e^\Theta | -r \rangle.$$

主結果

$$s_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1} \psi_{\lambda_2-2} \cdots \psi_{\lambda_r-r} | -r \rangle$$

$$G_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1} e^\ominus \psi_{\lambda_2-2} e^\ominus \cdots \psi_{\lambda_r-r} e^\ominus | -r \rangle.$$

主結果の証明について

$G_\lambda(x)$ を自由フェルミオンを用いて書けると見抜いてしまえば、
証明は容易。

主結果の証明について

$G_\lambda(x)$ を自由フェルミオンを用いて書けると見抜いてしまえば、**証明は容易**。

真空期待値に関する**ウィックの定理**

$$\langle \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi_{n_r}^* \cdots \psi_{n_1}^* \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi_{n_j}^* \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}.$$

を用いて行列式表示を計算し、既知の行列式公式 [7, 11]:

$$G_\lambda(x) = \det \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{i-1}{m} \beta^m h_{\lambda_i - i + j + m}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

と一致することをチェックすればよい。(線形代数の演習問題)

自由フェルミオンを用いた表示はとても強力で、
以下の未知/既知の結果の証明が機械的に次々と得られる。

- Hudson-Ikeda-Matsumura-Naruse 型の行列式 ([2] の結果の別証明) .
- 双対 (安定) グロタンディーク多項式の行列式 ([8, 15] の別証明) .
- 非可換シューア作用素のグロタンディーク多項式および双対多項式への (たぶん) 新しい作用の発見。系としてピエリの公式の証明が与えられる ([11, 16] の別証明)。

この結果を一般化して、歪グロタンディーク多項式や歪双対グロタンディーク多項式の自由フェルミオン表示も与えることができる [4]。

また、 C 型の旗多様体の K 理論から得られる K -理論的 Q 関数 [3] のニュートラルフェルミオン表示も得ることが可能である [5]。

そもそもソリトン方程式の関係とは？

ここまで可積分系の技法で K 理論的対称多項式を調べた。

そもそもソリトン方程式の関係とは？

ここまで可積分系の技法で K 理論的対称多項式を調べた。

一方で、可積分系に対してなにか**いいこと**はないのか？
(例: 既知のソリトン方程式の解と一致するなど)。

そもそもソリトン方程式の関係とは？

ここまで可積分系の技法で K 理論的対称多項式を調べた。

一方で、可積分系に対してなにかいいことはないのか？
(例: 既知のソリトン方程式の解と一致するなど)。

現時点であまりいいことはない…

参考文献 I

- [1] Anders S Buch, *A Littlewood-Richardson rule for the K -theory of Grassmannians*, *Acta mathematica* **189** (2002), no. 1, 37–78.
- [2] Thomas Hudson, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura, and Hiroshi Naruse, *Degeneracy loci classes in K -theory — determinantal and Pfaffian formula*, *Advances in Mathematics* **320** (2017), 115–156.
- [3] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, *K -theoretic analogues of factorial Schur P - and Q -functions*, *Advances in Mathematics* **243** (2013), 22–66.
- [4] Shinsuke Iwao, *Grothendieck polynomials and the boson-fermion correspondence*, *Algebraic Combinatorics* **3** (2020), no. 5, 1023–1040.

- [5] Shinsuke Iwao, *Neutral-fermionic presentation of the k -theoretic q -function*, 2021.
- [6] Shinsuke Iwao and Hidetomo Nagai, *The discrete toda equation revisited: dual β -Grothendieck polynomials, ultradiscretization, and static solitons*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51** (2018), no. 13, 134002.
- [7] Anatol N Kirillov, *On some quadratic algebras I $\frac{1}{2}$: Combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and reduced polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **12** (2016), 002.

参考文献 III

- [8] Alain Lascoux and Hiroshi Naruse, *Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **90** (2014), no. 7, 87–91.
- [9] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger, *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), no. 11, 629–633.
- [10] _____, *Symmetry and flag manifolds*, Invariant theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 996, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983, pp. 118–144.
- [11] Cristian Lenart, *Combinatorial aspects of the K -theory of Grassmannians*, Annals of Combinatorics **4** (2000), no. 1, 67–82.

- [12] Kohei Motegi and Kazumitsu Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (2013), no. 35, 355201.
- [13] ———, *K-theoretic boson–fermion correspondence and melting crystals*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47** (2014), no. 44, 445202.
- [14] Oliver Pechenik and Travis Scrimshaw, *K-theoretic crystals for set-valued tableaux of rectangular shapes*, 2019.
- [15] Mark Shimozono and Mike Zabrocki, *Stable Grothendieck polynomials and Ω -calculus (unpublished)*, (2011).

- [16] Damir Yeliussizov, *Duality and deformations of stable Grothendieck polynomials*, *Journal of Algebraic Combinatorics* **45** (2017), no. 1, 295–344.