# $K$-理論版特殊多項式の組み合わせ論 自由フェルミオン表示と可積分系

岩尾慎介

東海大学理学部

07/07/2021

# 背景

グロタンディーク多項式とはシューベルト多項式の一般化の一種で、旗多様体の $K$ 理論の研究から導出されたものである（A. Lascoux [12, 13], 1980 年代）。

対称グロタンディーク多項式は、そのうちグラスマン多様体に対応するものの名称である。これはシューベルト多項式の一部であるシューア多項式に対応する。

（対称グロタンディーク多項式のことを単に「グロタンディーク多項式」と呼ぶ慣例がある。本講演でもこの慣例に従う。）

# 背景

| | コホモロジー | $K$ 理論 |
|---|---|---|
| 旗多様体 | シューベルト | グロタンディーク |
| グラスマン多様体 | シューア | （対称）グロタンディーク |

# グロタンディーク多項式について（先行研究）

シューア多項式の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

集合値ヤング盤を用いた組み合わせ論的解釈 [2] や、非可換シューア関数による実現 [20] などの代数的組み合わせ論的側面からの一般化。

行列式公式 (ワイル型 [6, 10, 20]、ヤコビ-トゥルーディー型 [10, 14])、$K$ 理論的クリスタル [18] といった表現論的側面からの一般化。

# グロタンディーク多項式について（先行研究）

可積分系との関係:

Motegi-Sakai [15, 16] は可解格子模型（TASEP,melting crystal）の逆散乱解法からグロタンディーク多項式が導出されることを発見した。

Nagai-I [9] は古典可積分系（離散戸田方程式）の特殊解として双対安定グロタンディーク多項式が現れることを示した。

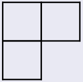
# 動機

個々の可積分系に依存しない方法で、$K$ 理論的対称多項式を記述できないか？

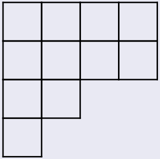
# 例（ヤング盤を用いた表示）

$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ を分割とする $(|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty)$.

## 例



$\lambda = (2, 1),$



$\lambda = (4, 4, 2, 1).$

# 例（ヤング盤を用いた表示）

有限個の自然数を左から右に向かって広い意味で単調増加
上から下に向かって狭い意味で単調増加
に入れたものを半標準ヤング盤もしくは単にヤング盤という。

## 例

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

# 例（ヤング盤を用いた表示）

$ST^n(\lambda)$ を、形が $\lambda$ で 1 以上 $n$ 以下の数字が入っているヤング盤全体の集合とする。
$T \in ST^n(\lambda)$ に対して

$$x^T = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{(T\text{ に含まれる数字 } i \text{ の個数})}$$

とする。

## 定義

$\lambda$ に対応するシューア多項式 $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ を

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in ST^n(\lambda)} x^T$$

と定める。

# 例（ヤング盤を用いた表示）

## $\lambda = (2,1)$ のとき

$ST^3(\lambda)$ の元は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

の 8 つ。シューア多項式 $s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)$ は

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

という対称多項式である。

# 基本的な例

## $\lambda = (1,1,1) = (1^3)$ のとき

$ST^4(\lambda)$ の元は

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

の 4 つ。よって、

$$\begin{aligned} s_{(1^3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ &= e_3(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

(基本対称多項式)

# 基本的な例

## $\lambda = (3)$ のとき

$ST^4(\lambda)$ の元は

$$\boxed{1|1|1}\ \boxed{1|1|2}\ \boxed{1|1|3}\ \boxed{1|1|4}\ \boxed{1|2|2}\ \boxed{1|2|3}$$
$$\boxed{1|2|4}\ \boxed{1|3|3}\ \boxed{1|3|4}\ \boxed{1|4|4}\ \boxed{2|2|2}\ \boxed{2|2|3}$$
$$\boxed{2|2|4}\ \boxed{2|3|3}\ \boxed{2|3|4}\ \boxed{2|4|4}\ \boxed{3|3|3}\ \boxed{3|3|4}$$
$$\boxed{3|4|4}\ \boxed{4|4|4}$$

の $\binom{6}{3} = 20$ 個。よって、

$$s_{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le 4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} = h_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

(完全対称多項式)

# シューアア多項式の性質

**定理**

シューア多項式は対称多項式である。

# 集合値ヤング盤

ヤング盤のルールを緩め、一つの箱に相異なる複数の数字が入ることを許したものを集合値ヤング盤 (set-valued tableau) という。数字の大きさのルールは変更なし。

集合値ヤング盤の集合を $SST^n(\lambda)$ と書く。

# 集合値ヤング盤

## $\lambda = (2,1)$ のとき

$SST^3(\lambda)$ の元は

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

など 27 個。

# 集合値ヤング盤を用いた定義

## 定義

$\lambda$ に対応する (対称) グロタンディーク多項式 $G_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ を

$$G_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in SST^n(\lambda)} \beta^{ex(T)} x^T,$$

と定める。$\beta$ はパラメータ。
$ex(T) =$(数字の個数)$-$(箱の個数)$+1$：“超過した数字” の個数。

# 集合値ヤング盤

## 例

$$
\begin{aligned}
&G_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)\\
&= (x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots) + 2x_1x_2x_3\\
&\qquad + \beta(x_1^2x_2^2 + \cdots) + 3\beta(x_1^2x_2x_3 + \cdots)\\
&\qquad\qquad + 2\beta^2(x_1^2x_2^2x_3 + \cdots) + \beta^3x_1^2x_2^2x_3^2
\end{aligned}
$$

(項の数は 27)

# 基本的なグロタンディーク多項式

## $\lambda = (1^3)$, $n = 4$ のとき

$$G_{(1^3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + 3\beta x_1x_2x_3x_4$$

$\beta = 0$ のときは $s_{(1^3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ に一致する。

# 基本的なグロタンディーク多項式

## $\lambda = (3)$, $n = 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
&G_{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \sum_{1 \le i \le j \le k \le 4} x_i x_j x_k + \beta \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le j \le k \le 4} x_{i_1} x_{i_2} x_j x_k \\
&\qquad + \cdots + \beta^3 (x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 + \cdots)
\end{aligned}
$$

$\beta = 0$ のときは $s_{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ に一致する。
最高の次数は 6。
6 次の項は 10 個。

# グロタンディーク多項式の性質

**定理**

上のように定義した多項式 $G_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ の対称多項式である。

# 基本的なアイデア

自由フェルミオンを用いたシューア多項式の表示。

*Cf.) T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, "*ソリトンの数理（*Solitons, Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras (En)*）*," Iwanami Shoten, Tokyo, 1993 (Jp), Cambridge University Press, 2000 (En).*

アイデア: これを一般化してグロタンディーク多項式の自由フェルミオン表示を得たい。

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

$[A, B]_+ = AB + BA$ とする。
以下の反交換関係を満たす自由フェルミオン $\{\psi_m, \psi_n^*\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \qquad [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{m,n},$$

の生成する $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{A}$ とする。
（自由フェルミオンの代数・クリフォード代数）

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

**真空ベクトル** $|0\rangle,\ \langle 0|$:

$$\psi_m|0\rangle = \psi_n^*|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_n = \langle 0|\psi_m^* = 0, \qquad m<0,\ n\geq 0.$$

$m<0,\ n\geq 0$ に対して、

| | |
|---|---|
| $\psi_m,\ \psi_n^*$ | **消滅演算子** |
| $\psi_n,\ \psi_m^*$ | **生成演算子** |

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

$$\psi_{n_1}\psi_{n_2}\cdots\psi_{n_r}\psi^*_{m_1}\psi^*_{m_2}\cdots\psi^*_{m_s}|0\rangle$$

$(r, s \geq 0,\ n_1 > \cdots > n_r \geq 0 > m_s > \cdots > m_1)$ の形の元の生成する $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{F}$ とする。

$$\langle 0|\psi_{m_s}\cdots\psi_{m_2}\psi_{m_1}\psi^*_{n_r}\cdots\psi^*_{n_2}\psi^*_{n_1}$$

$(r, s \geq 0,\ n_1 > \cdots > n_r \geq 0 > m_s > \cdots > m_1)$ の形の元の生成する $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{F}^\dagger$ とする。

$\mathcal{F}$ は左 $\mathcal{A}$ 加群、$\mathcal{F}^\dagger$ は右 $\mathcal{A}$ 加群の構造を持つ。（フォック空間）

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

## 事実

関係

1. $\langle 0|0\rangle = 1$,
2. $(\langle w|\psi_n)|v\rangle = \langle w|(\psi_n|v\rangle)$,
3. $(\langle w|\psi_n^*)|v\rangle = \langle w|(\psi_n^*|v\rangle)$.

を満たす双線形形式

$$\mathcal{F}^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \to \mathbb{C}; \qquad \langle w| \otimes |v\rangle \mapsto \langle w|v\rangle$$

が一意的に存在する。

$X \in \mathcal{A}$ について

$$\langle X\rangle := \langle 0|X|0\rangle$$

を $X$ の真空期待値という。

# 真空期待値

## 例

$$
\begin{aligned}
& \langle 0|\psi_0^*\psi_1^*\psi_1\psi_0|0\rangle \\
= \;& \langle 0|\psi_0^*(1-\psi_1\psi_1^*)\psi_0|0\rangle \\
= \;& \langle 0|\psi_0^*\psi_0|0\rangle - \langle 0|\psi_0^*\psi_1\psi_1^*\psi_0|0\rangle \\
= \;& \langle 0|\psi_0^*\psi_0|0\rangle \\
= \;& \langle 0|(1-\psi_0\psi_0^*)|0\rangle \\
= \;& \langle 0|0\rangle - \langle 0|\psi_0\psi_0^*|0\rangle \\
= \;& 1.
\end{aligned}
$$

# 真空期待値

## 例

$$
\begin{aligned}
& \langle 0|\psi_0^*\psi_1^*\psi_2\psi_0|0\rangle \\
= \ & -\langle 0|\psi_0^*\psi_2\psi_1^*\psi_0|0\rangle \\
= \ & \langle 0|\psi_2\psi_0^*\psi_1^*\psi_0|0\rangle \\
= \ & 0.
\end{aligned}
$$

# 真空期待値

真空期待値に関するウィックの定理

$$\langle \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_r} \cdots \psi^*_{n_1} \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi^*_{n_j} \rangle)_{1 \le i,j \le r}.$$

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

## シフトされた真空ベクトル

$$|m\rangle = \begin{cases} \psi_{m-1}\psi_{m-2}\cdots\psi_0|0\rangle, & m \geq 0, \\ \psi^*_m \cdots \psi^*_{-2}\psi^*_{-1}|0\rangle, & m < 0, \end{cases}$$

$$\langle m| = \begin{cases} \langle 0|\psi^*_0\psi^*_1 \ldots \psi^*_{m-1}, & m \geq 0, \\ \langle 0|\psi_{-1}\psi_{-2} \ldots \psi_m, & m < 0. \end{cases}$$

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

$: \cdot :$ を normal ordering (消滅演算子をすべて右に寄せる記号)、
$p_n(x) = x_1^n + x_2^n + \cdots$ を $n$ 次べき和とする。

## 作用素 $a_m$, $H(x)$, $e^{H(x)}$

以下の無限和はすべて作用素 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ として意味を持つ。

- $a_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_k \psi^*_{m+k} :$
- $H(x) = \sum_{n>0} \frac{p_n(x)}{n} a_n$
- $e^{H(x)} = 1 + H(x) + \frac{H(x)^2}{2!} + \frac{H(x)^3}{3!} + \cdots.$

# シューア多項式の自由フェルミオン表示

**定理**

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するシューア関数 $s_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$s_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1 - 1} \psi_{\lambda_2 - 2} \cdots \psi_{\lambda_r - r} | -r \rangle.$$

# 主結果

新しい作用素 $\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を

$$\Theta = \beta a_{-1} - \frac{\beta^2}{2} a_{-2} + \frac{\beta^3}{3} a_{-3} - \cdots$$

にて定める。

## 定理

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するグロタンディーク多項式 $G_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$G_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1 - 1} e^{\Theta} \psi_{\lambda_2 - 2} e^{\Theta} \cdots \psi_{\lambda_r - r} e^{\Theta} | -r \rangle.$$

# 主結果

$$s_\lambda(x) = \langle 0| e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1}\psi_{\lambda_2-2}\cdots\psi_{\lambda_r-r}|-r\rangle$$
$$G_\lambda(x) = \langle 0| e^{H(x)} \psi_{\lambda_1-1} e^{\Theta} \psi_{\lambda_2-2} e^{\Theta} \cdots \psi_{\lambda_r-r} e^{\Theta} |-r\rangle.$$

# 主結果の証明

$G_\lambda(x)$ を自由フェルミオンを用いて書けると見抜いてしまえば、
証明は容易。

ウィックの定理

$$\langle \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_r} \cdots \psi^*_{n_1} \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi^*_{n_j} \rangle)_{1 \le i,j \le r}.$$

を用いて行列式表示を計算し、既知の行列式公式 [10, 14]:

$$G_\lambda(x) = \det\left( \sum_{m=0}^{\infty} \binom{i-1}{m} \beta^m h_{\lambda_i - i + j + m}(x) \right)_{1 \le i,j \le r}$$

と一致することをチェックすればよい。(線形代数の演習問題)

# 主結果の証明

$[A, B] = AB - BA$ とする。

$[A, B]$ が $A, B$ いずれとも交換するとき $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$

および

$$[\Theta, \psi_n] = \beta\psi_{n+1} - \frac{\beta^2}{2}\psi_{n+2} + \frac{\beta^3}{3}\psi_{n+3} - \cdots$$

より、

$$e^{k\Theta}\psi_n e^{-k\Theta} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \beta^i \psi_{n+i} \tag{A}$$

が成り立つ。

# 主結果の証明

真空期待値

$$\begin{aligned}&\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{\Theta}\cdots\psi_{\lambda_r-r}e^{\Theta}|-r\rangle\\&=\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}(e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{-\Theta})(e^{2\Theta}\psi_{\lambda_3-3}e^{-2\Theta})\cdots\\&\qquad\qquad\qquad(e^{r\Theta}\psi_{\lambda_r-r}e^{-r\Theta})e^{(r+1)\Theta}|-r\rangle\end{aligned}$$

に公式 (A) およびウィックの定理を用いると、

$$\det\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{i-1}{m}\beta^m h_{\lambda_i-i+j+m}(x)\right)_{1\le i,j\le r}$$

と一致することが確かめられる。

# 派生結果

自由フェルミオンを用いた表示はとても強力で、
以下の未知/既知の結果の証明が機械的に次々と得られる。

- Hudson-Ikeda-Matsumura-Naruse 型の行列式（[4] の結果の別証明）.
- 双対（安定）グロタンディーク多項式の行列式（[11, 19] の別証明）.
- 非可換シューア作用素のグロタンディーク多項式および双対多項式への（たぶん）新しい作用の発見。系としてピエリの公式の証明が与えられる（[14, 20] の別証明）。

# 線形代数の道具としては便利

Hudson-Ikeda-Matsumura-Naruse 型の行列式（先ほどとは別タイプの行列式）は、真空期待値の計算

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{\Theta}\cdots\psi_{\lambda_r-r}e^{\Theta}|-r\rangle \\
&=\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}(e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{-\Theta})(e^{2\Theta}\psi_{\lambda_3-3}e^{-2\Theta})\cdots \\
&\qquad\qquad (e^{(r-1)\Theta}\psi_{\lambda_r-r}e^{-(r-1)\Theta})e^{r\Theta}|-r\rangle
\end{aligned}
$$

を "ぎなた読み" して

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{\Theta}\cdots\psi_{\lambda_r-r}e^{\Theta}|-r\rangle \\
&=\langle 0|e^{H(x)}e^{-\Theta}(e^{\Theta}\psi_{\lambda_1-1}e^{-\Theta})(e^{2\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{-2\Theta})\cdots \\
&\qquad\qquad (e^{r\Theta}\psi_{\lambda_r-r}e^{-r\Theta})e^{(r+1)\Theta}|-r\rangle
\end{aligned}
$$

とすると得られる。

# 一般化

この結果を一般化して、歪グロタンディーク多項式や歪双対グロタンディーク多項式の自由フェルミオン表示も与えることができる [7]。

また、$C$ 型の旗多様体の $K$ 理論から得られる $K$-理論的 $Q$ 関数 [6] のニュートラルフェルミオン表示も得ることが可能である [8]。

# そもそもソリトン方程式の関係とは？

ここまで可積分系の技法を用いて $K$ 理論的対称多項式を調べた。

一方で、可積分系に対してなにかいいことはないのか？
（例: 既知のソリトン方程式の解と一致するなど）。

現時点であまりいいことはない…

# 可積分系とグロタンディーク多項式（再掲）

可積分系との関係:

Motegi-Sakai [15, 16] は可解格子模型（TASEP,melting crystal）の逆散乱解法からグロタンディーク多項式が導出されることを発見した。

Nagai-I [9] は古典可積分系（離散戸田方程式）の特殊解として双対安定グロタンディーク多項式が現れることを示した。

# 可積分系と対称多項式

可解格子模型と対称多項式の関係は盛んに調べられている:

- LLT polynomials と "Gamma ice, Delta ice model" [1]
- refined dual Grothendieck polynomials と 6 頂点模型 [17]
- flagged.. colored... などの拡張 [3]

論文 [1] では、LLT polynomial を可解格子模型で実現し、
転送行列と、フォック空間上の頂点作用素の対応を具体的に証明し、
LLT polynomial の真空期待値表示を得ている。

**問題 1**

論文 [1] を参考に、Grothendieck polynomial の可解格子模型の実現 [17] と、真空期待値表示 [7] を直接結びつけよ。

# ソリトン方程式と関係はあるか

KP 方程式の自由フェルミオン表示。ソリトン方程式との関係。

**問題 2**

Grothendieck polynomial の自由フェルミオン表示とソリトン理論（無限次元グラスマニアン上の運動）の関係はあるか？

# Forthcoming works

実はグロタンディーク多項式より一般的な以下の対称多項式の自由フェルミオン表示も得られる（in preparation）：

1. multi-Schur functions
2. refined dual Grothendieck polynomials
3. ↑の dual
4. $K$-theoretic Catalan functions (Katalan functions)
5. $K$-theoretic $k$-Schur functions ($K$-$k$-Schur functions)

1.4.5. に対応する可解格子模型は（おそらく）知られていない。
2. は [17].

# Forthcoming works

## 問題 3

multi-Schur function, $K$-$k$-Schur function の自由フェルミオン表示を用いて、以下の問題にチャレンジできないか。

- それぞれの対称多項式を実現する可解格子模型を見つける
- $K$-theoretic Peterson isomorphism [5] の計算。
- 上記の計算と古典可積分系の関係。

# 参考文献 I


[1] Ben Brubaker, Valentin Buciumas, Daniel Bump, and Henrik PA Gustafsson, *Vertex operators, solvable lattice models and metaplectic Whittaker functions*, Communications in Mathematical Physics **380** (2020), no. 2, 535–579.

[2] Anders S Buch, *A Littlewood-Richardson rule for the $K$-theory of Grassmannians*, Acta mathematica **189** (2002), no. 1, 37–78.

[3] Valentin Buciumas and Travis Scrimshaw, *Double grothendieck polynomials and colored lattice models*, International Mathematics Research Notices (2020).

# 参考文献 II

[4] Thomas Hudson, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura, and Hiroshi Naruse, *Degeneracy loci classes in $K$-theory — determinantal and Pfaffian formula*, Advances in Mathematics **320** (2017), 115–156.

[5] Takeshi Ikeda, Shinsuke Iwao, and Toshiaki Maeno, *Peterson isomorphism in K-theory and relativistic Toda lattice*, International Mathematics Research Notices (2018), rny051.

[6] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, *$K$-theoretic analogues of factorial Schur $P$- and $Q$-functions*, Advances in Mathematics **243** (2013), 22–66.

[7] Shinsuke Iwao, *Grothendieck polynomials and the boson-fermion correspondence*, Algebraic Combinatorics **3** (2020), no. 5, 1023–1040.

# 参考文献 III


[8] ———, *Neutral-fermionic presentation of the $K$-theoretic $Q$-function*, arXiv:1904.02279 (2021).

[9] Shinsuke Iwao and Hidetomo Nagai, *The discrete toda equation revisited: dual $\beta$-Grothendieck polynomials, ultradiscretization, and static solitons*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51** (2018), no. 13, 134002.

[10] Anatol N Kirillov, *On some quadratic algebras I $\frac{1}{2}$: Combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and reduced polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **12** (2016), 002.

# 参考文献 IV


[11] Alain Lascoux and Hiroshi Naruse, *Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **90** (2014), no. 7, 87–91.

[12] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger, *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variétié de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), no. 11, 629–633.

[13] ———, *Symmetry and flag manifolds*, Invariant theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 996, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983, pp. 118–144.

[14] Cristian Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Annals of Combinatorics **4** (2000), no. 1, 67–82.

# 参考文献 V


[15] Kohei Motegi and Kazumitsu Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (2013), no. 35, 355201.

[16] ———, *K-theoretic boson–fermion correspondence and melting crystals*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47** (2014), no. 44, 445202.

[17] Kohei Motegi and Travis Scrimshaw, *Refined dual Grothendieck polynomials, integrability, and the Schur measure*, arXiv:2012.15011 (2020).

[18] Oliver Pechenik and Travis Scrimshaw, *K-theoretic crystals for set-valued tableaux of rectangular shapes*, arXiv:1904.09674 (2019).

# 参考文献 VI


[19] Mark Shimozono and Mike Zabrocki, *Stable Grothendieck polynomials and Ω-calculus (unpublished)*, (2011).

[20] Damir Yeliussizov, *Duality and deformations of stable Grothendieck polynomials*, Journal of Algebraic Combinatorics **45** (2017), no. 1, 295–344.