GQ 関数の
ニュートラルフェルミオンによる構成

岩尾慎介

東海大学理学部

14/11/2021

今回の話

論文 [9]

S.Iwao, "Neutral-fermionic presentation of the K-theoretic Q-function," Journal of Algebraic Combinatorics (2021), `https://doi.org/10.1007/s10801-021-01064-4`

の内容を紹介

背景

GQ 関数とはシューアの Q 関数の K 類似である。
Lagrangian Grassmannian の K 理論から導出。(Ikeda-Naruse [5])

“対称グロタンディーク多項式の C 型 version.”

K-Q 関数について（先行研究）

シューアの Q 関数の一般化と呼べる数々の性質を持つ。

excited Young diagram を用いた組み合わせ論的解釈 [2, 6]

パフィアン公式 [3, 4].

Ikeda-Naruse による定義

定義 (Ikeda-Naruse [5])

$$GQ_\lambda(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w\in S_n} w\left[[[x_1]]^{\lambda_1}[[x_2]]^{\lambda_2}\cdots[[x_r]]^{\lambda_r}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i+1}^{n}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right],$$

$w\in S_n$ は変数 $x_1,x_2,\dots,x_n$ に作用。

ここで β をパラメータとし、

$$x\oplus y = x+y+\beta xy, \quad x\ominus y = \frac{x-y}{1+\beta y}.$$

$a>0$ に対し $[[x]]^a = (x\oplus x)x^{a-1}$ とする。$a=0$ のときは $[[x]]^0=1$。

方針

Theorem (Hudson-Ikeda-Matsumura-Naruse [4, Theorem 5.21])

λ を長さ r の *strict partition*, r' を r 以上の最小の偶数とする。このとき *K-theoretic Q-polynomial* $GQ_\lambda(x)$ は以下のような *Pfaffian* 表示を持つ:

$$GQ_\lambda(x) = Pf\,(\tau_{i,j})_{1\le i<j\le r'},$$

ここで

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \sum_{p\ge 0,\, p+q\ge 0} f_{p,q}^{i,j} \cdot GQ_{\lambda_i+p}(x)GQ_{\lambda_j+q}(x), & j \neq r+1, \\ \sum_{p\ge 0} f_p^{i,r+1} GQ_{\lambda_i+p}(x), & j = r+1. \end{cases}$$

方針

ここで、係数 $f_{p,q}^{i,j} \in \mathbb{Q}[\beta] \quad (i < j,\ p \geq 0,\ p+q \geq 0)$ は

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+\beta t_i)^{r'-i}} \frac{1}{(1+\beta t_j)^{r'-j}} \frac{t_j - t_i}{t_i + t_j + \beta t_i t_j} = \sum_{p \geq 0,\ p+q \geq 0} f_{p,q}^{i,j} t_i^p t_j^q, & j \neq r+1, \\ \frac{1}{(1+\beta t_i)^{r'-i-1}} = \sum_{p \geq 0} f_p^{i,r+1} t_i^p, & j = r+1. \end{cases}$$

で与えられる。
これらは領域 $\{|t_{r'}| > \cdots > |t_2| > |t_1|\}$ におけるローラン展開とみなす。

$GQ_n(x)$ の再現

Theorem (Hudson-Ikeda-Matsumura-Naruse [4])

$\lambda = (n)$ のとき $GQ_{(n)}(x) = GQ_n(x)$ と書くことにする。このとき

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} GQ_n(x) z^n = \frac{1}{1+\beta z^{-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+(z+\beta)x_i}{1+(z+\beta)\overline{x}_i}.$$

ここで $\overline{x} = 0 \ominus x = \dfrac{-x}{1+\beta x}$.

基本的なアイデア

自由フェルミオンを用いたシューア多項式の表示。

*Cf.) T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, "*ソリトンの数理（*Solitons, Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras (En)*）*," Iwanami Shoten, Tokyo, 1993 (Jp), Cambridge University Press, 2000 (En).*

自由フェルミオンを用いたグロタンディーク多項式（シューア関数の K-類似）の構成 (I,[8, 7])

この"C 型版"をやりたい。

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$[A, B]_+ = AB + BA$ とする。
以下の反交換関係を満たす自由フェルミオン $\{\psi_m, \psi_n^*\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \qquad [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{m,n},$$

の生成する $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{A}$ とする。
（自由フェルミオンの代数・クリフォード代数）

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

真空ベクトル $|0\rangle$, $\langle 0|$:

$$\psi_m|0\rangle = \psi_n^*|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_n = \langle 0|\psi_m^* = 0, \qquad m < 0,\ n \geq 0.$$

$m < 0,\ n \geq 0$ に対して、

$$\begin{array}{ll} \psi_m,\ \psi_n^* & \text{消滅演算子} \\ \psi_n,\ \psi_m^* & \text{生成演算子} \end{array}$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$\mathcal{F}$：フォック空間。$|0\rangle$ の生成する左 A 加群。
$\mathcal{F}^\dagger$：双対フォック空間。$\langle 0|$ の生成する右 A 加群。

真空期待値

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad (\langle w|\psi_n)|v\rangle = \langle w|(\psi_n|v\rangle), \quad (\langle w|\psi_n^*)|v\rangle = \langle w|(\psi_n^*|v\rangle)$$

を満たす双線形形式

$$\mathcal{F}^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \to \mathbb{C}; \qquad \langle w| \otimes |v\rangle \mapsto \langle w|v\rangle$$

が一意的に存在する。

$X \in \mathcal{A}$ について

$$\langle X\rangle := \langle 0|X|0\rangle$$

を X の**真空期待値**という。

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

シフトされた真空ベクトル

$$|m\rangle = \begin{cases} \psi_{m-1}\psi_{m-2}\cdots\psi_0|0\rangle, & m \geq 0, \\ \psi^*_m \cdots \psi^*_{-2}\psi^*_{-1}|0\rangle, & m < 0, \end{cases}$$

$$\langle m| = \begin{cases} \langle 0|\psi^*_0\psi^*_1 \dots \psi^*_{m-1}, & m \geq 0, \\ \langle 0|\psi_{-1}\psi_{-2} \dots \psi_m, & m < 0. \end{cases}$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$:\cdot:$ を normal ordering (消滅演算子をすべて右に寄せる記号)、
$p_n(x) = x_1^n + x_2^n + \cdots$ を n 次べき和とする。

作用素 a_m, $H(x)$, $e^{H(x)}$

以下の無限和はすべて作用素 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ として意味を持つ。

- $a_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} :\psi_k \psi^*_{m+k}: \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$
- $H(x) = \sum_{n>0} \frac{p_n(x)}{n} a_n, \quad H^*(x) = \sum_{n>0} \frac{p_n(x)}{n} a_{-n},$
- $e^{H(x)} = 1 + H(x) + \frac{H(x)^2}{2!} + \frac{H(x)^3}{3!} + \cdots.$

有用な公式: $[a_m, \psi_n] = \psi_{n-m}$, $[a_m, \psi^*_n] = -\psi^*_{n+m}$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

定理

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するシューア関数 $s_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$s_\lambda(x) = \langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}\psi_{\lambda_2-2}\cdots\psi_{\lambda_r-r}|-r\rangle.$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

定理

分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$ に対応するグロタンディーク多項式 $G_\lambda(x)$ は、以下の自由フェルミオン表示を持つ:

$$G_\lambda(x) = \langle 0 | e^{H(x)} \psi_{\lambda_1 - 1} e^{-H^*(-\beta)} \psi_{\lambda_2 - 2} e^{-H^*(-\beta)} \cdots \psi_{\lambda_r - r} e^{-H^*(-\beta)} | -r \rangle.$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$$
\begin{aligned}
s_\lambda(x) &= \langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}\psi_{\lambda_2-2}\cdots\psi_{\lambda_r-r}|-r\rangle \\
G_\lambda(x) &= \langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}e^{-H^*(-\beta)}\psi_{\lambda_2-2}e^{-H^*(-\beta)}\cdots\psi_{\lambda_r-r}e^{-H^*(-\beta)}|-r\rangle.
\end{aligned}
$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$G_\lambda(x)$ を自由フェルミオンを用いて書けると見抜いてしまえば、
証明は容易。

Wick の定理

$$\langle \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_r} \cdots \psi^*_{n_1} \rangle = \det(\langle \psi_{m_i} \psi^*_{n_j} \rangle)_{1 \le i,j \le r}.$$

を用いて行列式表示を計算し、既知の行列式公式 [10, 11]:

$$G_\lambda(x) = \det \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{i-1}{m} \beta^m h_{\lambda_i - i + j + m}(x) \right)_{1 \le i,j \le r}$$

と一致することをチェックすればよい。

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

$[A, B] = AB - BA$ とする。

$[A, B]$ が A, B いずれとも交換するとき $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$

および $\Theta = -H^*(-\beta)$ とおくとき

$$[\Theta, \psi_n] = \beta\psi_{n+1} - \frac{\beta^2}{2}\psi_{n+2} + \frac{\beta^3}{3}\psi_{n+3} - \cdots$$

より、

$$e^{k\Theta}\psi_n e^{-k\Theta} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \beta^i \psi_{n+i} \tag{A}$$

が成り立つ。

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

真空期待値

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{\Theta}\cdots\psi_{\lambda_r-r}e^{\Theta}|-r\rangle \\
&=\langle 0|e^{H(x)}\psi_{\lambda_1-1}(e^{\Theta}\psi_{\lambda_2-2}e^{-\Theta})(e^{2\Theta}\psi_{\lambda_3-3}e^{-2\Theta})\cdots \\
&\qquad\qquad (e^{r\Theta}\psi_{\lambda_r-r}e^{-r\Theta})e^{(r+1)\Theta}|-r\rangle
\end{aligned}
$$

に公式 (A) およびウィックの定理を用いると、

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\langle 0|e^{H(x)}(e^{(i-1)\Theta}\psi_{\lambda_i-i}e^{-(i-1)\Theta})\psi^*_{-j}|0\rangle\right) \\
&=\det\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{i-1}{m}\beta^m h_{\lambda_i-i+j+m}(x)\right)_{1\le i,j\le r}
\end{aligned}
$$

と一致することが確かめられる。

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

フェルミオン場

$$\psi(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n z^n,\quad \psi^*(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n^* z^n$$

Schur function

$$s_\lambda(x)=\begin{pmatrix}\langle 0|e^{H(x)}\psi(z_1)\psi(z_2)\cdots\psi(z_r)|-r\rangle|_{|z_1|<\cdots<|z_r|} \\ \text{の } z_1^{\lambda_1-1}\dots z_r^{\lambda_r-r}\text{の係数}\end{pmatrix}$$

Grothendieck function

$$G_\lambda(x)=$$
$$\begin{pmatrix}\langle 0|e^{H(x)}\psi(z_1)e^{-H^*(-\beta)}\psi(z_2)\cdots\psi(z_r)e^{-H^*(-\beta)}|-r\rangle|_{|z_1|<\cdots<|z_r|} \\ \text{の } z_1^{\lambda_1-1}\dots z_r^{\lambda_r-r}\text{の係数}\end{pmatrix}$$

シューア関数のフェルミオン構成 (A 型の話)

Dual Grothendieck function

$$g_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \langle 0| e^{H(x)}\psi(z_1)e^{H(\beta)}\psi(z_2)\cdots\psi(z_r)e^{H(\beta)}| -r\rangle \\ \text{の } z_1^{\lambda_1-1}\dots z_r^{\lambda_r-r}\text{の係数} \end{pmatrix}$$

Closed K-k-Schur function (K-Catalan function [1] の特別な場合)

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} \langle 0| e^{H(x)}\psi(z_1)e^{H(A_1)}\psi(z_2)e^{H(A_2)}\cdots\psi(z_r)e^{H(A_r)}| -r\rangle \\ \text{の } z_1^{\lambda_1-1}\dots z_r^{\lambda_r-r}\text{の係数} \end{pmatrix}$$

($A_{k-\mu_i+i} = z_i^{-1}$, それ以外の $A_i = 1$).

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

以下の反交換関係を満たすニュートラルフェルミオン $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$[\phi_m, \phi_n]_+ = 2(-1)^m \delta_{m+n,0}.$$

の生成する $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{A}$ とする。

Remark

$\phi_0^2 = 1,$
$\phi_n^2 = 0$ if $n \neq 0.$

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

真空ベクトル $|0\rangle$, $\langle 0|$:

$$\phi_{-n}|0\rangle = \langle 0|\phi_n = 0, \quad n > 0.$$

$n > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} &\phi_{-n}, \qquad \text{消滅演算子} \\ &\phi_n, \qquad \text{生成演算子} \end{aligned}$$

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

$\mathcal{F}$：フォック空間。$|0\rangle$ の生成する左 A 加群。
$\mathcal{F}^\dagger$：双対フォック空間。$\langle 0|$ の生成する右 A 加群。

真空期待値

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad (\langle w|\phi_n)|v\rangle = \langle w|(\phi_n|v\rangle), \quad \langle 0|\phi_0|0\rangle = 0$$

を満たす双線形形式

$$\mathcal{F}^\dagger \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \to \mathbb{C}; \qquad \langle w| \otimes |v\rangle \mapsto \langle w|v\rangle$$

が一意的に存在する。

$X \in \mathcal{A}$ について

$$\langle X\rangle := \langle 0|X|0\rangle$$

を X の真空期待値という。

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

作用素 b_m, $H(x)$, $e^{H(x)}$

以下の無限和はすべて作用素 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ として意味を持つ。

- $b_m = \frac{1}{4}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \phi_{-i-m}\phi_i \qquad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$
- $H(x) = 2\sum_{m:\mathrm{odd}} \dfrac{p_m(x)}{m} b_m, \quad H^*(x) = 2\sum_{m:\mathrm{odd}} \dfrac{p_m(x)}{m} b_{-m},$
- $e^{H(x)} = 1 + H(x) + \dfrac{H(x)^2}{2!} + \dfrac{H(x)^3}{3!} + \cdots.$

有用な公式: $[b_m, \phi_n] = \phi_{n-m}$.

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

ニュートラルフェルミオンを用いて以下のものを再現する必要がある:

係数の母関数

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+\beta t_i)^{r'-i}} \frac{1}{(1+\beta t_j)^{r'-j}} \frac{t_j-t_i}{t_i+t_j+\beta t_i t_j} = \sum_{p\geq 0,\ p+q\geq 0} f_{p,q}^{i,j} t_i^p t_j^q, & j \neq r+1, \\ \frac{1}{(1+\beta t_i)^{r'-i-1}} = \sum_{p\geq 0} f_p^{i,r+1} t_i^p, & j = r+1. \end{cases}$$

$GQ_n(x)$ の生成関数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} GQ_n(x) z^n = \frac{1}{1+\beta z^{-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+(z+\beta)x_i}{1+(z+\beta)\overline{x}_i}.$$

ニュートラルフェルミオンで同じことをやる

Wick の定理

$$\langle 0|\phi_{n_1}\cdots\phi_{n_{2r}}|0\rangle = \mathrm{Pf}(\langle 0|\phi_{n_i}\phi_{n_j}|0\rangle)_{1\le i<j\le 2r}$$

と母関数を結び付けるには？

$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^n$ とおくと、

$$\langle 0|\phi(z)\phi(w)|0\rangle = \frac{z-w}{z+w} = 1 - 2\frac{w}{z} + 2\frac{w^2}{z^2} - \cdots$$

アイデア

母関数の中の

$$\frac{t_j - t_i}{t_i + t_j + \beta t_i t_j}$$

は、

$$\frac{\frac{t_j}{1+\frac{\beta}{2}t_j} - \frac{t_i}{1+\frac{\beta}{2}t_i}}{\frac{t_j}{1+\frac{\beta}{2}t_j} + \frac{t_i}{1+\frac{\beta}{2}t_i}}$$

と変形できる。

アイデア

β-twisted ニュートラルフェルミオン $\phi_n^{(\beta)}$ を

$$\sum_{n\geq 0} \phi_n^{(\beta)} z^n = \sum_{n\geq 0} \phi_n \left(z + \frac{\beta}{2} \right)^n,$$

$$\sum_{n>0} \phi_{-n}^{(\beta)} z^{-n} = \sum_{n>0} \phi_{-n} \left(\frac{z^{-1}}{1 + \frac{\beta}{2} z^{-1}} \right)^n.$$

と定義する。
Informal には

$$\phi^{(\beta)}(z) = \phi(z + \frac{\beta}{2}).$$

アイデア

このとき、

$$\langle 0|\phi^{(\beta)}(z)\phi^{(\beta)}(w)|0\rangle = \frac{(z+\frac{\beta}{2})-(w+\frac{\beta}{2})}{(z+\frac{\beta}{2})+(w+\frac{\beta}{2})} = \frac{z-w}{z+w+\beta}$$

が得られる。z, w の逆数を t_i, t_j とおけば、

$$\frac{t_j - t_i}{t_i + t_j + \beta t_i t_j}$$

と一致する。

交換関係

$$[b_m, \phi^{(\beta)}(z)] = \left(z + \frac{\beta}{2}\right)^m \phi^{(\beta)}(z)$$

より、$\hat{z} = \left(z + \frac{\beta}{2}\right)^{-1} = \frac{z^{-1}}{1+\frac{\beta}{2}z^{-1}}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&e^{H^*(\frac{\beta}{2})}\phi^{(\beta)}(z)e^{-H^*(\frac{\beta}{2})} \\
&= \exp\left([H^*(\tfrac{\beta}{2}), \phi^{(\beta)}(z)]\right) \cdot \phi^{(\beta)}(z) \\
&= \exp\left\{2\left(\frac{\beta}{2}\hat{z} + \frac{\beta^3}{2^3}\frac{\hat{z}^3}{3} + \frac{\beta^5}{2^5}\frac{\hat{z}^5}{5} + \cdots\right)\right\}\phi^{(\beta)}(z) \\
&= \frac{1 + \frac{\beta}{2}\hat{z}}{1 - \frac{\beta}{2}\hat{z}}\phi^{(\beta)}(z) \\
&= (1 + \beta z^{-1})\phi^{(\beta)}(z).
\end{aligned}$$

$GQ_n(x)$ の再現

あとは、[4] の公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} GQ_n(x)z^n = \frac{1}{1+\beta z^{-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+(z+\beta)x_i}{1+(z+\beta)\overline{x}_i}.$$

$\left(\overline{x} = 0 \ominus x = \dfrac{-x}{1+\beta x}\right)$ を出せば良い。

$\rightarrow H(z)$ も β-twist する必要がある。
$(\because H(z)$ には $p_{\mathrm{odd}}(x)$ しか出てこない$)$

$GQ_n(x)$ の再現

β-twisted カレント作用素

$$b_m^{(\beta)} = \left. \frac{(X - \frac{\beta}{2})^m - (-X - \frac{\beta}{2})^m}{2} \right|_{X^k \mapsto b_k},$$

と置くと、

$$[b_m^{(\beta)}, \phi^{(\beta)}(z)] = \frac{z^m - (-z-\beta)^m}{2} \phi^{(\beta)}(z)$$

が得られる。

$GQ_n(x)$ の再現

これを用いると、

$$e^{H^{(\beta)}(x)}\phi^{(\beta)}(z) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(x)}{n}(z^n - (-z-\beta)^n)\right\}\phi^{(\beta)}(z)e^{H^{(\beta)}(x)}.$$

$$e^{H^{(\beta)}(x)}e^{H^*(\frac{\beta}{2})} = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(x)}{n}(-\beta)^n\right)e^{H^*(\frac{\beta}{2})}e^{H^{(\beta)}(x)}$$

が得られる。

$GQ_n(x)$ の再現

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|e^{H^{(\beta)}(x)}\phi^{(\beta)}(z)e^{H^*(\frac{\beta}{2})}\phi_0^{(\beta)}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}|0\rangle \\
&= \frac{1}{1+\beta z^{-1}}\frac{\exp(\sum \frac{p_n(x)}{n}z^n)}{\exp(\sum \frac{p_n(x)}{n}(-\beta)^n)\exp(\sum \frac{p_n(x)}{n}(-z-\beta)^n)} \\
&= \frac{1}{1+\beta z^{-1}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1+x_i\beta)(1+x_i(z+\beta))}{1-x_iz} \\
&= \frac{1}{1+\beta z^{-1}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+x_i(z+\beta)}{1+(z+\beta)\frac{-x_i}{1+\beta x_i}} \\
&= \frac{1}{1+\beta z^{-1}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+(z+\beta)x_i}{1+(z+\beta)\overline{x}_i} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} GQ_n(x)z^n.
\end{aligned}
$$

主結果

$$GQ_\lambda(x) = \begin{cases} \langle 0|e^{H^{(\beta)}(x)}\phi^{(\beta)}_{\lambda_1}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}\phi^{(\beta)}_{\lambda_2}\cdots\phi^{(\beta)}_{\lambda_r}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}|0\rangle, \\ \hfill \text{if } r \text{ is even,} \\ \langle 0|e^{H^{(\beta)}(x}\phi^{(\beta)}_{\lambda_1}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}\phi^{(\beta)}_{\lambda_2}\cdots\phi^{(\beta)}_{\lambda_r}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}\phi^{(\beta)}_{0}e^{H^*(\frac{\beta}{2})}|0\rangle, \\ \hfill \text{if } r \text{ is odd,} \end{cases}$$

参考文献 I

[1] Jonah Blasiak, Jennifer Morse, and George H. Seelinger, *k-theoretic catalan functions*, arXiv preprint:2010.01759 (2020).

[2] William Graham and Victor Kreiman, *Excited Young diagrams, equivariant K-theory, and Schubert varieties*, Transactions of the American Mathematical Society **367** (2015), no. 9, 6597–6645.

[3] Thomas Hudson, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura, and Hiroshi Naruse, *Pfaffian formula for K-theory of odd orthogonal Grassmannians*, arXiv preprint:1602.04448 (2016).

[4] ______, *Degeneracy loci classes in K-theory — determinantal and Pfaffian formula*, Advances in Mathematics **320** (2017), 115–156.

参考文献 II

[5] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions*, Advances in Mathematics **243** (2013), 22–66.

[6] Takeshi Ikeda, Hiroshi Naruse, and Yasuhide Numata, *Bumping algorithm for set-valued shifted tableaux*, 2011, 23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, FPSAC'11 ; Conference date: 13-06-2011 Through 17-06-2011, pp. 527–538 (English).

[7] Shinsuke Iwao, *Free-fermions and skew stable Grothendieck polynomials*, arXiv:2004.09499 (2020).

[8] ———, *Grothendieck polynomials and the boson-fermion correspondence*, Algebraic Combinatorics **3** (2020), no. 5, 1023–1040.

参考文献 III

[9] ———, *Neutral-fermionic presentation of the K-theoretic Q-function*, Journal of Algebraic Combinatorics (2021).

[10] Anatol N Kirillov, *On some quadratic algebras I $\frac{1}{2}$: Combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and reduced polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **12** (2016), 002.

[11] Cristian Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Annals of Combinatorics **4** (2000), no. 1, 67–82.