Pushing/Blocking TASEP と 非可換シューア作用素

岩尾慎介

慶應義塾大学

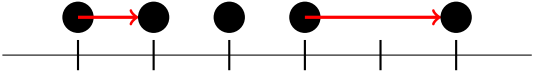
2023/10/12

研究集会「非線形波動から可積分系へ 2023」/富山県立大学

(Based on a joint work with K.Motegi and T.Scrimshaw)

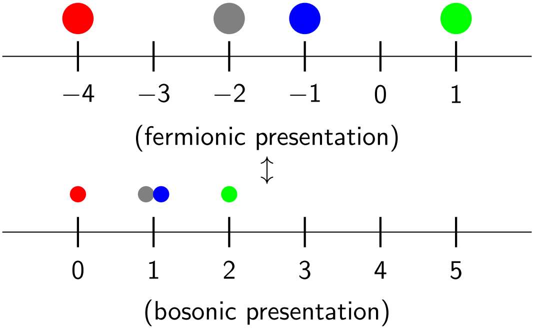
背景

Dieker-Warren [1] の discrete TASEP.



- 各サイトは、粒子が存在するかしないかの 2 状態をとる。
- 時間発展 $(t \mapsto t+1)$ 時、各粒子は一定の確率・規則（後述）で右に進むか、どの程度進むかを決定する。

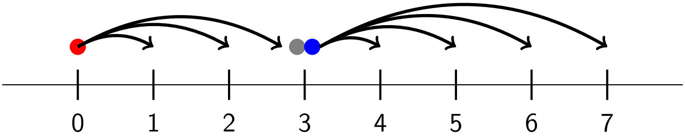
Bosonic presentation



場所 τ_i に第 i 粒子がある (fermion)$\leftrightarrow$ 場所 $\tau_i + i$ に第 i 粒子がある (boson)

幾何分布による時間発展規則 (プロトタイプ)

$t \in \mathbb{Z}$ について、$0 < x_t < 1$ とする。



- 一番右の粒子を第 1 粒子といい、左に向かって第 2 粒子, 第 3 粒子,... と呼ぶ。
- 時間発展 $(t \mapsto t+1)$ 時、以下の確率分布に従い非負整数 $w_{i,t} \geq 0$ を決める。

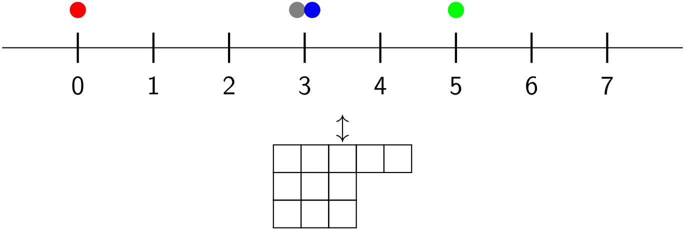
$$P(w_{i,t} = k) = A_t x_t^k, \qquad (A_t = 1 - x_t).$$

- 左の粒子から順番に、各粒子を $w_{i,t}$ サイト右に動かす。

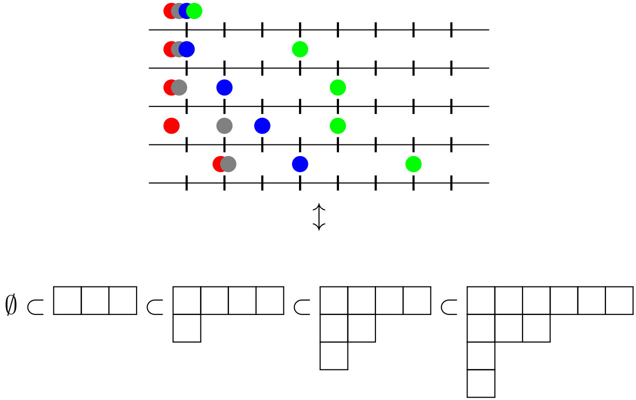
問題（プロトタイプ）

粒子たちの追い抜きが発生しなかったときの、各状態の発生する条件付き確率。

ヤング図形との対応



ヤング図形の成長



各成長の差分は**水平帯** (holizontal strip, 1 つの列に 2 つ以上の箱が同時に追加されることはない).

シューア作用素

$\mathcal{P}$ をヤング図形のなす集合とする。

$$\mathbb{R}[\mathcal{P}] := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{R} \cdot \lambda.$$

$\mathbb{R}$ 線形作用素 $u_i : \mathbb{R}[\mathcal{P}] \to \mathbb{R}[\mathcal{P}]$ を、

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \lambda \cup \{\text{ 第 } i \text{ 行目の箱 }\} & (\lambda \text{ の第 } i \text{ 行に箱を } 1 \text{ つ追加可能}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

で定義する。

シューア作用素

Example

$$u_1 \cdot \ydiagram{3,3,1} = \ydiagram{4,3,1}, \quad u_2 \cdot \ydiagram{3,3,1} = 0, \quad u_3 \cdot \ydiagram{3,3,1} = \ydiagram{3,3,2}$$

Example

$$u_1 \cdot \emptyset = \ydiagram{1}, \quad u_i \cdot \emptyset = 0 \quad (i > 1).$$

$\emptyset$ は空のヤング図形をあらわす。($\emptyset$ と 0 は異なる。)

作用素 $\mathcal{H}(x)$

$i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $t \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{H}_i(x_t) = 1 + x_t u_i + x_t^2 u_i^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x_t u_i}$$

とおく。

Example

$$\mathcal{H}_2(x_t) \cdot \ydiagram{3,1,1} = \ydiagram{3,1,1} + x_t \cdot \ydiagram{3,2,1} + x_t^2 \cdot \ydiagram{3,3,1}$$

$$\propto \sum_{\lambda} (\text{第 2 粒子を動かすときの遷移確率}) \cdot \lambda$$

幾何分布による時間発展

$$\mathcal{H}(x_t) := \mathcal{H}_1(x_t)\mathcal{H}_2(x_t)\mathcal{H}_3(x_t)\cdots$$

とおく。
粒子状態の時間発展 (=ヤング図形の成長)

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$$

について、以下が成り立つ。

Proposition

λ をヤング図形とする。x_t のみに依存する正規化定数 A_t が存在して、

$$\mathcal{H}(x_t) \cdot \lambda = A_t \sum_{\mu} P(Y_{t+1} = \mu \mid Y_t = \lambda \wedge (\text{粒子の追い抜きがない})) \cdot \mu$$

が成り立つ。

幾何分布による時間発展

初期状態を $\emptyset$ とするとき、

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(x_T)\cdots\mathcal{H}(x_2)\mathcal{H}(x_1)\cdot\emptyset\\&=A_1A_2\cdots A_t\sum_\lambda P(Y_T=\lambda\mid Y_0=\emptyset\wedge(\text{追い抜きがない}))\cdot\lambda.\end{aligned} \tag{1}$$

Theorem

$s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ をヤング図形 λ に対応するシューア関数とするとき、

$$\mathcal{H}(x_T)\cdots\mathcal{H}(x_2)\mathcal{H}(x_1)\cdot\emptyset=\sum_\lambda s_\lambda(x_1,\dots,x_T)\cdot\lambda$$

が成り立つ。

遷移確率とシューア関数

係数比較により

$$P(Y_T = \lambda \mid Y_0 = \emptyset \wedge (\text{追い抜きがない})) = \frac{s_\lambda(x_1, \ldots, x_T)}{A_1 A_2 \cdots A_T}. \tag{2}$$

ただし、$A_i = 1 - x_i$.

シューア関数はよく知られている

Theorem (ヤコビ・トゥルーディー公式 (cf.[5]))

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_T) = \det(h_{\lambda_i - i + j}(x_1,\dots,x_T))_{1\le i,j\le \ell(\lambda)}.$$

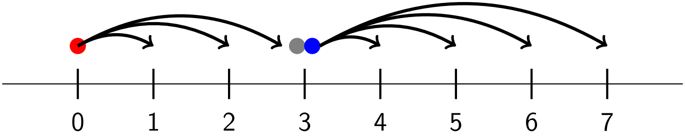
ただし $h_k(x_1,\dots,x_T)$ は k 次完全対称多項式。

Corollary

$$P(Y_T=\lambda \mid Y_0=\emptyset \wedge (\text{追い抜きがない})) = \frac{\det(h_{\lambda_i-i+j}(x_1,\dots,x_T))_{1\le i,j\le \ell(\lambda)}}{A_1A_2\cdots A_T}.$$

Pushing TASEP (Dieker-Warren)

$t \in \mathbb{Z}$ について、$0 < x_t < 1$ とする。

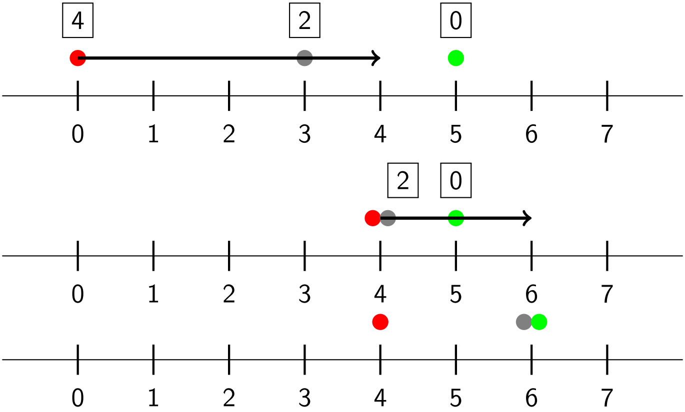


- 一番右の粒子を第 1 粒子といい、左に向かって第 2 粒子, 第 3 粒子,... と呼ぶ。
- 時間発展 $(t \mapsto t+1)$ 時、以下の確率分布に従い非負整数 $w_{i,t} \geq 0$ を決める。

$$P(w_{i,t} = k) = A_t x_t^k, \qquad (A_t = 1 + x_t).$$

- 左の粒子から順番に、各粒子を $w_{i,t}$ サイト右に動かす。
- 移動中に他の粒子にぶつかった場合、その粒子ごと押し進む (Pushing)。

例



先行研究

Dieker-Warren [1] は、RSK 全単射 (粒子の配置をコード化してヤング盤のペアに対応させる全単射) を用いて Pushing TASEP, Bloking TASEP の遷移確率を、ある行列の行列式としてあらわした。

先行研究

一方、岩尾は論文 [2, 3] にて、グロタンディーク多項式・双対グロタンディーク多項式（シューア関数の K-理論版）のフェルミオン期待値表示をあたえる結果の中で、「K-理論的シューア作用素」を導出した。

→茂木・Scrimshaw 両氏により、Dieker-Warren の TASEP との関係が指摘された (I-Motegi-Scrimshaw [4])。

K 理論的シューア作用素

K-理論的シューア作用素 $u_i : \mathbb{R}[\mathcal{P}] \to \mathbb{R}[\mathcal{P}]$ を以下のように定義する。

任意の非負整数列 $n = (n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$ に対して、ヤング図形

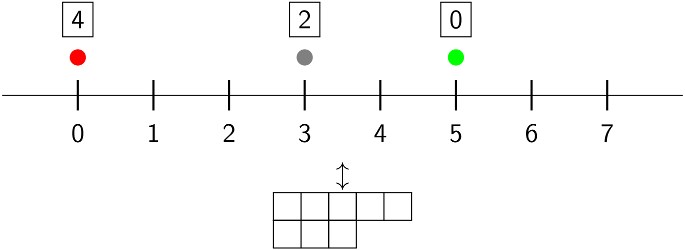
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \qquad \lambda_i = \min[n_i, n_{i+1}, \ldots, n_\ell]$$

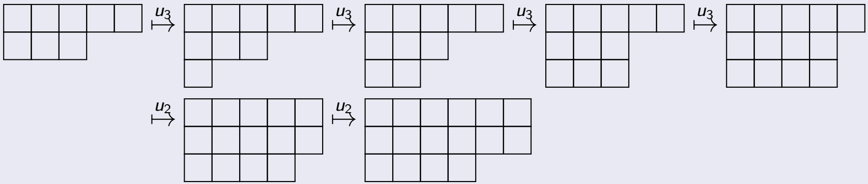
を n を含む最小のヤング図形といい、$\overline{n}$ と書く。

Definition (K 理論的シューア作用素 [3])

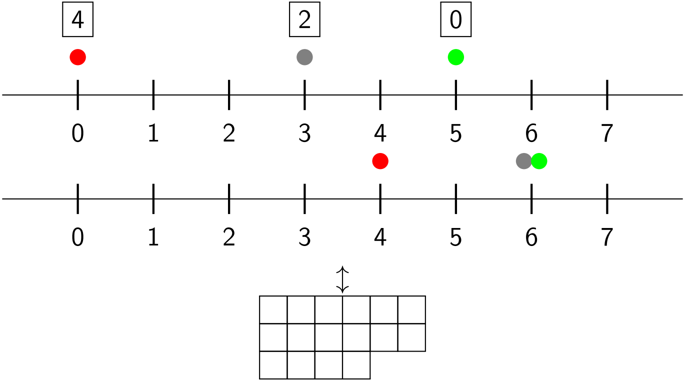
$$u_i \cdot \lambda = \overline{\lambda \cup \{\text{ 第 } i \text{ 行目の箱 }\}}$$

例





例



作用素 $\mathcal{H}(x)$

u_i を K-理論的シューア作用素に置き換えて、先ほどと同様のことを行う。
$i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $t \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{H}_i(x_t) = 1 + x_t u_i + x_t^2 u_i^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x_t u_i}$$

とおく。

$$\mathcal{H}(x_t) := \mathcal{H}_1(x_t)\mathcal{H}_2(x_t)\mathcal{H}_3(x_t)\cdots$$

とおく。
Pushing TASEP の粒子状態の時間発展 (=ヤング図形の成長)

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$$

について、以下が成り立つ。

Proposition

λ をヤング図形とする。x_t のみに依存する正規化定数 A_t が存在して、

$$\mathcal{H}(x_t) \cdot \lambda = A_t \sum_{\mu} P(Y_{t+1} = \mu \mid Y_t = \lambda) \cdot \mu.$$

幾何分布による時間発展

初期状態を $\emptyset$ とするとき、

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(x_T)\cdots\mathcal{H}(x_2)\mathcal{H}(x_1)\cdot\emptyset\\&=A_1A_2\cdots A_t\sum_{\lambda}P(Y_T=\lambda\mid Y_0=\emptyset)\cdot\lambda.\end{aligned}\tag{3}$$

Theorem

$g_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ をヤング図形 λ に対応する双対グロタンディーク多項式とするとき、

$$\mathcal{H}(x_T)\cdots\mathcal{H}(x_2)\mathcal{H}(x_1)\cdot\emptyset=\sum_{\lambda}g_\lambda(x_1,\ldots,x_T)\cdot\lambda$$

が成り立つ。

遷移確率と双対グロタンディーク多項式

係数比較により

$$P(Y_T = \lambda \mid Y_0 = \emptyset) = \frac{g_\lambda(x_1, \ldots, x_T)}{A_1 A_2 \cdots A_T}. \tag{4}$$

ただし、$A_i = 1 - x_i$.

シューア関数はよく知られている

Theorem (ヤコビ・トゥルーディー公式 (Shimozono-Zabrocki [6], Yeliussizov [7], I [2]))

$$g_\lambda(x_1,\dots,x_T) = \det\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{1-i}{m}(-1)^m h_{\lambda_i-i+j-m}(x_1,\dots,x_T)\right)_{1\le i,j\le \ell(\lambda)}.$$

ただし $h_k(x_1,\dots,x_T)$ は k 次完全対称多項式。

Corollary

$$P(Y_T=\lambda \mid Y_0=\emptyset) = \frac{\det\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{1-i}{m}(-1)^m h_{\lambda_i-i+j-m}(x_1,\dots,x_T)\right)_{1\le i,j\le \ell(\lambda)}}{A_1A_2\cdots A_T}.$$

拡張 (I-Motegi-Scrimshaw, [in preparation])

1. Blocking TASEP
2. ベルヌーイ分布
3. より一般的な非可換シューア作用素・対称多項式と、それに応じた TASEP (粒子ごとの遷移確率や、サイトごとの遷移確率を変化させる)

指導原理

$\mathbb{R}[\mathcal{P}]$ に作用する $\mathbb{R}$ 線形作用素の組 $u_1, u_2, \ldots$ で、以下の Knuth relation を満たすものがあれば、似たようなことができるだろう。

$$u_j u_i u_k = u_j u_k u_i, \qquad (i \geq j > k,\ i-k \geq 2),$$
$$u_i u_k u_j = u_k u_i u_j, \qquad (i > j \geq k,\ i-k \geq 2),$$
$$(u_i + u_{i+1}) u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i (u_i + u_{i+1})$$

Reference I

[1] A. B. Dieker and Jonathan Warren, *Determinantal transition kernels for some interacting particles on the line*, Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques **44** (2008), no. 6, 1162–1172 (en). MR 2469339

[2] Shinsuke Iwao, *Grothendieck polynomials and the boson-fermion correspondence*, Algebraic Combinatorics **3** (2020), no. 5, 1023–1040.

[3] ______, *Free-fermions and skew stable Grothendieck polynomials*, Journal of Algebraic Combinatorics **56** (2022), no. 2, 493–526.

[4] Shinsuke Iwao, Kohei Motegi, and Travis Scrimshaw, *Free-fermions and canonical Grothendieck polynomials*, arXiv preprint arXiv:2211.05002 (Accepted to Algebraic Combinatorics).

[5] Ian G Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford university press, 1998.

[6] Mark Shimozono and Mike Zabrocki, *Stable Grothendieck polynomials and Ω-calculus (unpublished)*, (2011).

Reference II

[7] Damir Yeliussizov, *Duality and deformations of stable Grothendieck polynomials*, Journal of Algebraic Combinatorics **45** (2017), no. 1, 295–344.