On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies

細矢祐誉

中央大学

October 5, 2021

研究の背景：部分均衡 (1)

以下の部分均衡の図を見てみよう。

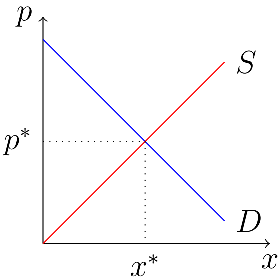

Figure: 部分均衡

青い線 D が需要曲線、赤い線 S が供給曲線である。交点 (p^*, x^*) は均衡と呼ばれる。この図では D が右下がりで S が右上がりなので、均衡はひとつしか存在しない。

研究の背景：部分均衡 (2)

次に、均衡価格 p^* より高い p' を取る。

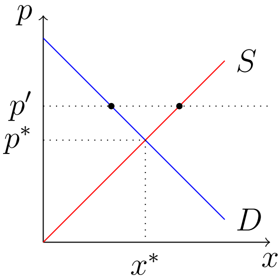

Figure: 超過供給

このとき、高さ p' において需要曲線より供給曲線の方が右側にある。この状況を超過供給と言う。この場合には市場は売れ残りが続出し、結果として値下げを誘発するため、価格は下がると予想される。

研究の背景：部分均衡 (3)

今度は均衡価格 p^* より低い価格 p' を取る。

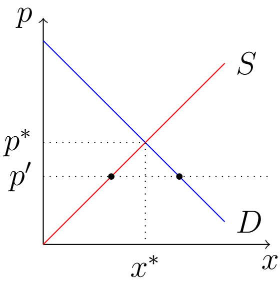

Figure: 超過需要

今度は p' の高さでは供給曲線よりも需要曲線の方が右側にあり、この状況は超過需要と呼ばれる。売り切れが続出している状態なので、価格は上がると予想される。

研究の背景：部分均衡 (4)

まとめると、この D が右下がりで S が右上がりの状況では、均衡はただひとつしかないし、そこから外れた価格が実現するとそれは均衡の方へ「引き寄せられる」状況（この状況を「安定的」と言う）にある。つまり、部分均衡の典型的な図では、均衡は唯一かつ安定的なのである。

研究の背景：部分均衡 (5)

部分均衡分析には、背景となる一般均衡理論のモデルが存在する。そのモデルでは財の種類はふたつ、効用関数は準線形（つまり、$U(x,y)=u(x)+y$ の形状）で、生産者はニュメレール財を消費して取引される財を生産する。このモデルでは、最適化の二階の条件から自然に、D が右下がりで S が右上がりであるという結論が得られる。
したがって、部分均衡の結果は二財準線形の一般均衡のモデルにそのまま拡大できる。つまり、二財ですべての消費者の効用関数が準線形な経済においては、均衡価格は（なんらかの正規化の下に）一意で、しかも模索過程について大域安定である。

研究の背景：部分均衡 (6)

この結果は、「二財の」「準線形経済」についての話だった。準線形の仮定を取り除くと、ソンネンシャイン＝マンテル＝ドブリューの定理から、ただちに我々は不可能性の帰結を得る。つまり、均衡は一般的に一意ではないし、安定的とも限らない。つまり、以上の話において「準線形」という仮定は本質的に重要だったのである。では、「二財」の方はどのくらい重要なのだろうか？　これが本研究の問題意識である。

本稿の結果

本稿では L 財準線形経済を扱う。簡単化のために、生産は導入せず純粋交換経済を考える。この仮定の下で、我々の出した結果は以下のふたつである。第一に、均衡価格は正規化の下一意に定まる。第二に、均衡価格は模索過程について局所安定である。

補足

なお、準線形経済の特徴を出すためには、ニュメレール財の需要が端点に来るような解は避けなければならない。このため、我々は本稿において常に、以下のどちらかの仮定を置く。第一の仮定は、ニュメレール財については負の消費が可能である。第二の仮定は、ニュメレール財の負の消費は許さないが、代わりに消費者全員が十分に多くのニュメレール財を初期保有として所有している。第一の仮定を満たす経済を第一タイプの準線形経済、第二の仮定を満たす経済を第二タイプの準線形経済と呼ぶことにする。

純粋交換経済 (1)

純粋交換経済とは、以下の四つ組
$E = (N, (\Omega_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}, (\omega^i)_{i \in N})$ で表される。ただし、これらの記号は以下の意味を持つ。

(1) $N = \{1, ..., n\}$ は消費者の集合である。
(2) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^L$ は i 番目の消費者の実行可能な消費計画全体の集合であり、$U_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ は i 番目の消費者の効用関数である。
(3) $\omega^i \in \Omega_i$ は i 番目の消費者の初期保有である。

純粋交換経済 (2)

以下の問題は**効用最大化問題**と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \max \quad & U_i(x), \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega_i, \\ & p \cdot x \le m, \end{aligned} \tag{1}$$

ただし $p \gg 0$ かつ $m > 0$ である。解の集合は $f^i(p,m)$ と書かれ、この集合値関数 f^i は**需要関数**と呼ばれる。ただし、後に我々は需要関数が一価になるような仮定を置く。

純粋交換経済 (3)

消費者 i の**超過需要関数** X^i を以下で定義する。

$$X^i(p) = f^i(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i,$$

経済全体の**超過需要関数** ζ はこの足し合わせである。つまり、

$$\zeta(p) = \sum_i X^i(p).$$

p^* が**均衡価格**であるとは、$0 \in \zeta(p^*)$ が成り立つことを指す。
ζ は正 0 次同次性

$$\zeta(ap) = \zeta(p) \text{ for all } a > 0,$$

を満たすので、p^* が均衡価格ならば $a > 0$ に対して ap^* も均衡価格である。したがって、正規化を行わない限り均衡価格の一意性は論じられないという点に注意。

純粋交換経済 (4)

以下の微分包含式を**模索過程**と呼ぶ。

$$\dot{p}(t) \in \zeta(p(t)),\ p(0) = p_0.$$

均衡価格 p^* が**局所安定**であるとは、ある近傍 U が存在して、もし $p_0 \in U$ ならば上の微分包含式には $\mathbb{R}_+$ 上で定義された解が存在し、またそのような解はすべて p^* の定数倍に収束する、という性質が成り立つことを言う。
もし f^i が普通の一価で連続微分可能な需要関数であれば、ζ もそうであり、したがって上の微分包含式はただの微分方程式になる。つまり、以下のようになる。

$$\dot{p}(t) = \zeta(p(t)),\ p(0) = p_0. \tag{2}$$

準線形経済 (1)

今回の発表を通じて、$x \in \mathbb{R}^L$ に対して $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{L-1}) \in \mathbb{R}^{L-1}$ という記法を用いる。
以下の仮定は第一の準線形経済における効用関数の仮定である。

仮定 F

すべての $i \in N$ に対して $\Omega_i = \mathbb{R}_+^{L-1} \times \mathbb{R}$ であり、

$$U_i(x) = u_i(\tilde{x}) + x_L \tag{3}$$

が成り立つ。さらに、u_i は $\mathbb{R}_+^{L-1}$ 上で凹、非減少、連続であり、$\mathbb{R}_{++}^{L-1}$ 上では二階連続微分可能で非退化、さらにヘッセ行列はどこでも負値定符号である。

準線形経済 (2)

第二の準線形経済では、少しだけ違った仮定を置く。

仮定 S 1

すべての $i \in N$ に対して、$\Omega_i = \mathbb{R}^L_+$ であり、U_i は仮定 F と同じ仮定を満たす。

準線形経済 (3)

第二の準線形経済では初期保有について追加の仮定が必要である。

仮定 S 2

$$\alpha_i = \sup\{u_i(\tilde{x}^i) - u_i(\tilde{\omega}^i) | \sum_j (x^j - \omega^j) = 0,$$
$$U_j(x^j) \geq U_j(\omega^j) \text{ for every } j \neq i\}.$$

と定義すると、$\omega_L^i > \alpha_i$ がすべての $i \in N$ に対して成り立つ。

準線形経済 (4)

さらにふたつの仮定が必要である。

仮定Q

すべての $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ と $m > 0$ に対して、以下の問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i(\tilde{x}) \\ \text{subject to.} \quad & \tilde{x} \in \mathbb{R}^{L-1}_{+}, \\ & \tilde{p} \cdot \tilde{x} \le m \end{aligned} \tag{4}$$

は内点解 $\tilde{x}^* \gg 0$ を持つ。また、以下の方程式 $Du_i(\tilde{x}) = \tilde{p}$ も内点解を持つ。もし $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{L-1}_{+}$ かつ $u_i(\tilde{x}) > u_i(0)$ ならば、u_i は $\tilde{x} + \mathbb{R}^{L-1}_{+}$ 上で強単調である。

準線形経済 (5)

仮定U

すべての $i \in N$ に対して、$\omega^i \geq 0$ かつ $\omega^i \neq 0$ である。さらに、$\sum_i \omega^i \gg 0$ である。

準線形経済 (6)

定義

- 純粋交換経済 E は、仮定Ｆ、Ｑ、Ｕを満たすとき、**第一タイプの準線形経済**と呼ばれる。
- 純粋交換経済 E は、仮定Ｓ１、Ｓ２、Ｑ、Ｕを満たすとき、**第二タイプの準線形経済**と呼ばれる。
- 純粋交換経済 E が第一タイプか第二タイプいずれかの準線形経済であるとき、それは**準線形経済**と呼ばれる。

主結果

定理 1

E は準線形経済であるとする。このとき、均衡価格は少なくともひとつ存在する。また p^* が均衡価格であれば、以下が成り立つ。

(1) すべての均衡価格は p^* の定数倍である。

(2) p^* は局所安定である。

よって、二財準線形経済から導出した部分均衡で成り立っていた結果は、L 財準線形経済でも同様に成り立つことがわかった。

簡単な解説 (1)

まず、主結果のために最も重要なのは、均衡において以下の評価が成り立つことである。

命題

E が準線形経済で、ζ がその超過需要関数とする。このとき、任意の均衡点 p^* のまわりで ζ は連続微分可能であり、さらに

$$D\zeta(p^*) = \sum_{i=1}^{n} S_{f^i}(p^*, p^* \cdot \omega^i) \tag{5}$$

が成り立つ。ただし S_{f^i} は消費者 i の需要関数 f^i のスルツキー行列である。

簡単な解説 (2)

この結果を使うことで、以下のような結果が示せる。まず、十分小さな $\varepsilon > 0$ を取り、

$$S = \{v \in \mathbb{R}^L | \|v\| = \varepsilon,\ p^* \cdot v = 0\},$$

$$p(t,v) = \frac{\|p^*\|}{\|p^* + tv\|}(p^* + tv)$$

と定義しよう。

補題

ある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |t| \le \delta$ かつ $v \in S$ ならば

$$(p(t,v) - p^*) \cdot (\zeta(p(t,v)) - \zeta(p^*)) < 0 \tag{6}$$

が成り立つ。

簡単な解説 (3)

ここからただちに、この均衡価格の「指数」が +1 であることが示せる。任意の均衡価格の指数が 0 以外なので、この経済は正則経済である。よって正規化された均衡価格は有限個で、その指数の合計は +1 である。しかし、すべての均衡価格の指数が +1 で、合計も +1 なのだから、均衡価格はただひとつしか存在し得ない。また、上の補題から (2) のリャプノフ関数を作ることも容易にできるため、局所安定性も言える。
以上から、上の命題こそが本研究の要である。ではこれはなぜ準線形経済では成り立つのか？

簡単な解説 (4)

実はこの結果は、「たまたま初期保有が均衡配分だった」ときには、準線形ではない経済においても成り立つことが容易に示せる。これは Kihlstrom et al. (1977) で補題として示され、さらに Balasko (1978) はそれを用いて、「たまたま初期保有が均衡配分だった」場合の均衡価格の局所安定性を導出している。
実際には初期保有は均衡配分ではない場合が普通であり、その場合所得効果の影響によってこの命題は壊れてしまう。ところが、準線形経済では所得効果がニュメレール財にしか現れず、しかも均衡だとその影響も足し合わせると打ち消しあって消えてしまう。したがって、上のような知られていた結果は、準線形経済では「初期保有が均衡配分でなくとも」成り立つのである。これが、本研究で定理が導出できた理由である。

課題 (1)

本研究では純粋交換経済に絞って議論を行った。これは部分均衡の図だと、供給曲線が垂直線であるモデルに対応する。

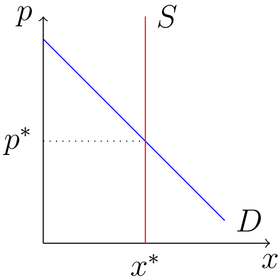

Figure: 純粋交換の部分均衡

課題 (2)

生産を入れた場合、規模に関する収穫逓減な生産技術の経済には、おそらく本研究の結果は拡張できると思われる。これにはホテリングの補題の拡張を始めとした様々な技術的な問題があるが、しかしどれも克服可能なレベルの難易度だと思われる。これが現時点で考えている主要な問題である。
しかし、規模に関する収穫一定の生産技術では、そもそも超過需要関数が空値になる場合があり、また多価写像であることが避けられないため、非常に難しくなる。その場合の拡張はとても難しいと思われる。

課題 (3)

本研究では一般の次元の準線形経済を、部分均衡の拡張として考えている。である以上、部分均衡のもうひとつの魅力である余剰分析の可能性についても探っていきたい。これについては先行研究があまり見つかっていないが、線積分を用いたいくつかの論文を見つけている。それらの適用可能性については今後の課題としたい。

Thank you for your attention.