The Axiom for Concavifiable Preference in View of Alt's Theory

細矢祐誉

中央大学

November 7, 2021

凹効用関数（1）

経済学において、効用関数に仮定してよいとされる性質には二種類のものが存在している。第一のものは「順序の性質として妥当な解釈を持つ」もので、連続性や準凹性が該当する。第二のものは「解釈はしにくいが、非常に便利である」もので、微分可能性などがこれに当たる。
今回は、効用関数の凹性について考えてみたい。効用関数に凹性を仮定することは、普通は忌避される。まず、選好関係を表現する凹効用関数が存在するための必要十分条件は Kannai (1977) で知られているが、その条件は経済学的な解釈が不可能なほど難しく、また数学的にも確かめにくい。結果として、順序の性質として妥当な性質と見なせるかどうかがわからない。

凹効用関数（2）

効用関数にとって凹性の仮定が第一の性質を満たさないことがわかったので、今度は第二の性質を見てみよう。たしかに、凹関数であることは便利である。たとえば、凹であれば劣微分を用いてラグランジュ未定乗数法が使える。また、同じ順序を表現する凹効用関数の族には「凹度」に関する自然な順序があり、この順序が不確実性回避などの概念と関係があること（Epstein and Zhang (1999)）や、最小元の存在と正アフィン変換についての一意性（Debreu (1976)）などが知られていて、応用もある。しかし、どれも少し決め手に欠け、結果として凹性は微分可能性ほど「非常に便利」な仮定だと見なされていない傾向がある。

凹効用関数（3）

現状、順序を表現する凹関数の存在は、たいていの場合、経済学では仮定されない。しかし、これは第一の性質である「解釈のしにくさ」について、「必要十分条件」にこだわった結果なのではないかと考えられる。つまり、経済学的に解釈しやすい凹効用関数の存在の十分条件があって、それがそんなに強くないように見受けられるのならば、効用関数に課す仮定として凹関数であることを、もっと積極的に使ってよいように思えるのである。
今回は、Alt (1936) の古い効用理論に関連して、この順序の凹表現可能性について扱ってみたい。

アルトの表現理論（1）

アルトの結果は1936年にドイツ語で出版され、1971年に英語に翻訳された。これは、順序を表すだけではなく、変化の強さも計るという意味で、いわゆる基数的効用理論の一種として考えられている。今回扱うのは、このアルトの効用が凹であるための必要十分条件である。

当然ながら、凹表現可能な効用関数が存在することよりも、「アルトの効用」という特別な効用が凹であることの方が仮定としては強い。しかしながら、この仮定は非常に解釈がしやすく、古典的なゴッセンの第一法則との関連が強い。

アルトの表現理論（2）

以下、X はなんらかの集合であるとする。アルトの効用理論は、X 上の四項関係 $\geq$ を用いて議論される。この四項関係 $\geq$ を本研究では「アルト機構」と呼ぶことにする。
アルト機構 $\geq$ は、X^2 上の弱順序であることを仮定される。
$(x, y, z, w) \in \geq$ は「y から x への変化による改善の方が、w から z への変化による改善よりも『強い』」という、改善の強度を表す。
これを用いて、通常の選好関係に当たる次の X 上の二項関係 $\succsim$ が定義される。

$$\succsim = \{(x, y) \in X^2 | (x, y, y, y) \in \geq\}. \tag{1}$$

アルトの効用理論（3）

実数値関数 $u : X \to \mathbb{R}$ がアルト機構 $\geq$ を表現するとは、以下の条件

$$(x, y, z, w) \in \geq \Leftrightarrow u(x) - u(y) \geq u(z) - u(w) \tag{2}$$

が成り立つことを言う。アルト機構の表現関数においては $u(x) - u(y)$ は y から x への状態の変化による改善の強さを表す数値となっている。この場合、

$$(x, y) \in \succsim \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \tag{3}$$

となっているため、アルト機構の表現関数は自動的に (1) で定義される $\succsim$ を表現する効用関数になっている。

アルト機構の書き方

いつものように、$(x,y)\in\succsim$ の代わりに $x\succsim y$ と書く。$\succ$ と $\sim$ の記号もいつものように定義する。一方で、$(x,y,z,w)\in\geq$ の方は、$[x,y]\geq[z,w]$ と略記することにする。$[x,y]\geq[z,w]$ かつ $[z,w]\geq[x,y]$ であることは、$[x,y]=[z,w]$ と書く。また $[x,y]\geq[z,w]$ かつ $[x,y]\neq[z,w]$ であることは $[x,y]>[z,w]$ と書く。

アルト機構の表現関数の存在

アルト機構の表現関数の存在定理は、Alt (1936) がユークリッド空間の部分集合（おそらくは弧状連結）で証明しているが、公理が多く、独立していない公理が多数見受けられる。Kranz et al. (1971) は空間の位相的要請を外して示しているが、公理が多く、解釈しにくい。Shapley (1975) は非常に少ない公理で存在定理を示しているが、X が実数の凸部分集合に限定される。Wakker (1988) も少ない公理から存在定理を示しているが、こちらは X の弧状連結性を連結性に弱められる代わりに、シャプレーのものより公理が強い。今回の研究は、シャプレーの結果を可分で弧状連結な位相空間に拡張することから始める。

整合性公理（1）

いくつかの公理を紹介していく。

整合性公理

アルト機構 $\geq$ が**整合性公理**を満たすとは、任意の $x, y, z \in X$ に対して、

$$x \precsim y \Leftrightarrow [x, z] \geq [y, z]$$

が成り立つことを言う。

整合性公理（2）

整合性公理は読み方が少し難しい公理である。まず、ある z に対して $[x, z] \geq [y, z]$ だとすると、整合性公理から $x \succsim y$ である。次に、$x \succsim y$ だとすると、**任意の** z に対して $[x, z] \geq [y, z]$ である。このように、整合性公理は対称形の公理のように見えて、少し非対称に見える性質を持つため、証明で用いるときに混乱の元になることがある。

上記の考察から、整合性公理があると、ある z に対して
$[x, z] \geq [y, z]$ ならばすべての w に対して $[x, w] \geq [y, w]$ である、という帰結が得られる。

整合性公理（3）

整合性公理の下では、(1) で定義された $\succsim$ は弱順序になる。たとえば完備性を示すには、$x \not\succsim y$ ならば $[x, y] \not\geq [y, y]$ なので、$\geq$ の完備性から $[y, y] \geq [x, y]$ で、これに整合性公理を適用することで $y \succsim x$ が得られる。推移性については、$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ ならば、まず後者から $[y, z] \geq [z, z]$ である。一方、前者に整合性公理を適用すると $[x, z] \geq [y, z]$ がわかる。よって、$\geq$ の推移性から $[x, z] \geq [z, z]$ を得て、$x \succsim z$ となる。

整合性公理（4）

最後に、もし u が $\geq$ を表現していれば、整合性公理は単に

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(z) \geq u(y) - u(z)$$

という意味なので、自動的に成り立つ。よって、整合性公理は表現関数 u の存在の必要条件の一つであることがわかる。

交差公理（1）

次の公理は、整合性公理よりは少し解釈が難しい。

交差公理

アルト機構 $\geq$ が**交差公理**を満たすとは、任意の $x, y, z, w \in X$ に対して、

$$[x, y] = [z, w] \Rightarrow [x, z] = [y, w]$$

が成り立つことを言う。

交差公理（2）

交差公理があると、次のことがわかる。まず、$\geq$ は弱順序であるから、$[x,y]=[x,y]$ である。これに交差公理を適用すると、$[x,x]=[y,y]$ を得る。つまり、交差公理の下で「変化しない」ことは常に同程度の強度である。一方、整合性公理の下では、$x \sim y$ であるならば $[x,z]=[y,z]$ であるが、これに交差公理を適用すると $[x,y]=[z,z]$ が得られるので、「無差別なものに変える」ことと「変化しない」ことも同程度の強度である。
また、$=$ は対称的な関係だから、交差公理からただちに

$$[x,y]=[z,w] \Rightarrow [w,y]=[z,x]$$

という関係も得られる。

交差公理（3）

最後に、もし u が $\geq$ を表現していれば、交差公理は単に

$$u(x) - u(y) = u(z) - u(w) \Rightarrow u(x) - u(z) = u(y) - u(w)$$

という関係であり、これもまた当然成り立つ。よって交差公理も、表現関数 u の存在の必要条件の一つである。

連続性公理

最後の公理のためには、X が位相空間である必要がある。

連続性公理

アルト機構 $\geq$ が**連続性公理**を満たすとは、$\geq$ が X^4 の直積位相において閉であることを言う。

もしアルト機構を表現する連続関数 u が存在すれば、

$$\geq = \{(x, y, z, w) \in X^4 | u(x) + u(w) - u(y) - u(z) \geq 0\}$$

であるから、連続性公理は明らかに成り立つ。また、$\geq$ が閉集合であれば当然、(1) 式で定義された $\succsim$ も閉集合になる。

表現関数の存在定理

以下の結果が我々の表現定理である。

定理 1

X は可分で弧状連結なハウスドルフ位相空間とする。このとき、X 上のアルト機構 $\succsim$ が整合性公理、交差公理、連続性公理を満たすことと、それを表現する連続関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在することは同値である。さらに、それは正アフィン変換を除いて一意である。

この定理の証明では一箇所だけ X の連結性ではなく、弧状連結性が必要になる場所がある。よって、ドブリューの効用関数の存在定理よりも、X に対する要求が強くなっている。

技術的な補足

この定理を使うに当たって、以下の補題が必要である [1]。

補題

$v : X \to \mathbb{R}$ は (3) 式を満たす定数関数ではない連続関数とし、D は $v(x)$ が $\frac{i}{2^k}$ の形になるような x の集合とする。このとき、任意の $x \in X$ に対して、$x \sim x'$ となるある $x' \in X$ と、x' に収束する D 上の点列 (x_n) が存在する。さらに、x が v の最大点でなければ、$v(x_n) > v(x)$ を満たすように (x_n) を取ることができ、また逆に x が v の最小点でなければ、$v(x_n) < v(x)$ を満たすように (x_n) を取ることができる。

この補題の証明に X の弧状連結性がどうしても必要なため、定理１は弧状連結でないと証明できない。逆に言うと、この補題が連結な位相空間で成り立つならば、定理１の弧状連結性は連結性に弱められる。

[1] 後の証明セクションの補題６である。

一般化されたゴッセンの第一法則（1）

以降、X は線形位相空間の凸集合とする。アルトの表現関数が凹関数であるための条件を述べよう。

一般化されたゴッセンの第一法則

アルト機構 $\succeq$ が**一般化されたゴッセンの第一法則**を満たすとは、任意の $x, y \in X$ に対して、$z = \frac{1}{2}(x+y)$ としたとき、

$$[z, x] \succeq [y, z]$$

が成り立つことを言う。もし、$x \neq y$ の時には常に

$$[z, x] \succ [y, z]$$

が成り立つならば、この機構は**一般化された強いゴッセンの第一法則**を満たすと言う。

一般化されたゴッセンの第一法則（2）

X が $\mathbb{R}^n_+$ である場合を考え、$y = x + 2ae_i$ であるとしよう（e_i は第 i 単位ベクトル)。このとき、$z = x + ae_i$ であるため、表現関数を u としたとき、一般化されたゴッセンの第一法則は

$$\begin{aligned} &u(x_1, ..., x_i + a, ..., x_n) - u(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \\ &\geq u(x_1, ..., x_i + 2a, ..., x_n) - u(x_1, ..., x_i + a, ..., x_n) \end{aligned}$$

という意味になる。もし u が微分できれば、平均値の定理から、これは概ね、偏微分 $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ が非増加である、という事実に対応する。もちろん「強い」方を仮定すれば、偏微分が減少的であること、つまり「限界効用の逓減」を意味し、これが古典的なゴッセンの第一法則である。したがって我々の「一般化されたゴッセンの第一法則」は、ゴッセンの第一法則を少し強めたものであると言える。

一般化されたゴッセンの第一法則（3）

一般化されたゴッセンの第一法則は、以下の条件と同値である：
$x, x+2v \in X$ ならば、

$$[x+v, x] \geq [x+2v, x+v]$$

が必ず成り立つ。v を改善の方向と見た場合、最初に v だけ改善した場合の改善強度は、そこからまた v だけ改善した場合の改善強度よりも高くなければならない。つまり、改善方向を一定として改善しようとすると、改善効率がだんだん悪くなっていくのである。これが一般化されたゴッセンの第一法則の経済学的な含意である。

凹表現定理

以下の結果が最も重要な定理である。

定理 2

X はハウスドルフ線形位相空間内の可分な凸集合で、X 上のアルト機構 $\succeq$ を表現する連続な関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在するとする。このとき、この関数が凹であるための必要十分条件は、一般化されたゴッセンの第一法則である。また、この関数が狭義凹であるための必要十分条件は、一般化された強いゴッセンの第一法則である。

こうして、アルト機構の凹表現の公理化が成功した。

定理２の補足（１）

なお、アルト機構の表現関数は正アフィン変換を除いて一意であるため、一般化されたゴッセンの第一法則は表現関数が**必ず**凹になるための条件である。この意味でも、通常の凹表現可能な効用の存在条件よりも一般化されたゴッセンの第二法則の方が強い。しかし、解釈のしやすさにおいて、一般化されたゴッセンの第一法則は凹関数による効用表現のいままで知られていたどんな条件よりも容易であると思われる。また、「アルトの効用が凹である」こと自体にも、ある程度の意味合いがある。つまり、アルトの表現関数は改善強度を測る効用関数であると見なせるため、様々な応用に使える可能性がある。

定理２の補足（２）

たとえば、ベンサム型、ロールズ型、ナッシュ型などの、よく知られたほとんどのサミュエルソン＝バーグソン型の社会的厚生関数は準凹である。アルトの効用は、解釈上自然に、社会的厚生関数への入力物と見なせる。そこで、たまたま同じ効用関数を持つ二人の個人がいたとしよう。この効用関数が凹である場合、準凹と凹の合成は準凹なので、二人の状態を近づけることによって厚生は下がらない。狭義準凹と狭義凹の合成は狭義準凹だから、もし社会的厚生関数が狭義準凹ならば、二人の状態を近づけることによって厚生は上がる。特に、社会的に最善な状態ではこの二人は平等でなければならない。こうして、「同じような人は同じようにせよ」という倫理基準が正当化できる。一方、効用関数が凹でなければ、二人をあえて違う状態にしたほうが厚生が改善することがあるため、上の倫理基準は正当化できない。このように、凹であるかどうかは倫理基準に影響を与えるくらい大きな問題である。

微分可能性（1）

ゴッセンの第一法則は限界効用を用いているため、限界効用が定義できる可能性、つまり微分可能性について議論しておこう。以降では X は $\mathbb{R}^n_+$ とする。

単調性

アルト機構 $\geq$ が**単調**であるとは、$x \gg y$ ならば $x \succ y$ となることを言う。

ドブリューの滑らかさ

アルト機構 $\geq$ が**ドブリューの意味で滑らか**であるとは、無差別関係 $\sim$ のグラフと $(\mathbb{R}^n_{++})^2$ の共通部分が $2n-1$ 次元の C^1 級多様体であることを言う。

微分可能性（2）

線分の滑らかさ

アルト機構 $\succeq$ が単調で、かつそれを表現する連続な効用関数 u が存在するとし、$e = (1, 1, ..., 1)$ とする。このとき、$0 < a < b$ ならば必ず $f(a, b) > 0$ が存在して、

$$[f(a,b)e, (b-a)e] = [(b+a)e, f(a,b)e]$$

が成り立つ。このとき、この機構が**線分の意味で滑らか**であるとは、以下の極限評価が常に成り立つことを言う：

$$\lim_{a \downarrow 0} \frac{b - f(a,b)}{a} = 0.$$

微分可能性（3）

定理 3

X は $\mathbb{R}^n_+$ で、X 上のアルト機構 $\geq$ を表現する連続で凹な関数 u が存在し、またこれは単調であるとする。このとき、u が $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で C^1 かつ非退化であるための必要十分条件は、それがドブリューの意味と線分の意味両方で滑らかであることである。

弱順序 $\succsim$ が連続、単調で、かつドブリューの意味で滑らかであれば、$\succsim$ を表現する C^1 で非退化な (3) を満たす関数が存在する。しかしここではアルト機構を表現する関数の滑らかさであるため、線分の意味での滑らかさという追加条件が必要となる。

技術的な補足（1）

実のところ、凹でない u に対しては定理 3 が成り立つかどうかは不明である。定理 3 の証明には、u から構成した $g(a) = u(ae)$ が凹であることを使っているからである。また、u が C^2 であるための必要十分条件も現状ではまだわかっていない。$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ が凹とは限らないため、定理 3 で用いた技術がそのまま使えないのである。

技術的な補足（２）

アルトの効用は、ＡＬＥＰの代替・補完と言われる概念と密接に関係している。財 i が財 j に対してＡＬＥＰの意味で代替的であるとは、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) < 0 \tag{4}$$

が成り立つこととして定義される。別の言い方をすると、財 j の消費量の増加が財 i の魅力を削ぐ場合に、i は j に対して代替的とするのが、ＡＬＥＰの定義である。
この定義は von Auspitz and Lieben (1889) に始まり、Edgeworth (1897) と Pareto (1906) も論じているが、経済学の中で序数的効用の理論が支配的になるにつれて姿を消していった概念である。しかし、アルトの効用はこの定義の解釈にぴったりな効用理論なので、これについてＡＬＥＰの代替・補完を議論することには意味がある。

技術的な補足（3）

しかしながら、(4) が定義できるためには u は二階微分可能でなければならない。C^1 の凹関数はほとんどすべての点で二階微分可能である（アレクサンドロフの定理）が、これを「すべての点」に改良できるための条件が欲しい。しかし、前のスライドで議論したように、現状ではこの問題は未解決である。

第二整合性

以下、定理１の証明を念のために記しておく。まず、以下の性質は公理ではなく、先に紹介した３公理から出てくる結果であるが、名前をつけておいた方が後々便利である。

第二整合性

任意の $x, y, z \in X$ に対して、

$$x \succsim y \Leftrightarrow [z, y] \geq [z, x]$$

が成り立つ。

定理の証明には、この性質がどうしても必要である。したがってまず定理の証明は、この結果を証明するところから始まる。（今回は、ややこしいので割愛）

第一の補題（1）

第二整合性を証明する過程で出てくる次の補題は、証明が簡単なのでで示してみよう。これは今後も繰り返し何度も使う。

補題 1

もし

$$[x_1, y] \geq [z, w] \geq [x_2, y]$$

であるとすれば、ある $x_3 \in X$ が存在して、

$$[x_3, y] = [z, w]$$

が成り立つ。さらに $x_1 \succsim x_3 \succsim x_2$ である。x_4 も同じ条件を満たしているとすれば、$x_3 \sim x_4$ である。

第一の補題（2）

補題1の証明のために、まず

$$U = \{x \in X | [x, y] \geq [z, w]\},\ D = \{x \in X | [z, w] \geq [x, y]\}$$

と定義する。連続性から、U も D も閉集合であり、また $x_1 \in U,\ x_2 \in D$ なので、二つとも非空である。よって X の連結性から、$x_3 \in U \cap D$ が存在しなければならない。このとき明らかに

$$[x_3, y] = [z, w]$$

である。整合性公理から $x_1 \succsim x_3 \succsim x_2$ であり、またもし $[x_4, y] = [z, w]$ ならば、

$$[x_3, y] = [x_4, y]$$

であり、よって整合性公理から $x_3 \sim x_4$ である。以上で証明が完成した。

第二の補題

整合性の代わりに第二整合性を用いることによって、以下の補題は補題１とまったく同様に示せる。証明はほぼ一緒なので省略する。

補題２

もし
$$[y, x_2] \geq [z, w] \geq [y, x_1]$$
であれば、ある $x_3 \in X$ に対して
$$[y, x_3] = [z, w]$$
が成り立つ。さらに $x_1 \succsim x_3 \succsim x_2$ であり、また x_4 も同じ性質を持っていたとすれば、$x_3 \sim x_4$ である。

第三の補題（1）

次の補題も簡単に示せるので、示してみたい。

補題 3

$x \succ z$ であるとすれば、

$$[x, y] = [y, z]$$

を満たす $y \in X$ が存在し、$x \succ y \succ z$ である。もし y' も同じ条件を満たしていたとすれば $y \sim y'$ である。

補題 1、2 と同様、この証明にも、X の連結性が用いられる。

第三の補題（2）

まず、

$$U = \{w \in X | [w, z] \geq [x, w]\},\ D = \{w \in X | [x, w] \geq [w, z]\}$$

と定義すると、これらは共に閉集合であり、また $x \in U$ かつ $z \in D$ なので、両方非空である。したがって $y \in U \cap D$ が存在しなければならない。明らかに

$$[x, y] = [y, z]$$

である。ここで $y' \succ y$ ならば

$$[y', z] > [y, z] = [x, y] > [x, y']$$

であり、$y \succ y'$ ならば

$$[x, y'] > [x, y] = [y, z] > [y', z]$$

なので、$[x, y'] = [y', z]$ ならば $y \sim y'$ でしかあり得ない。

第三の補題（3）

最後に、仮に $y \succsim x$ ならば $y \succ z$ なので、

$$[y, z] \geq [x, z] > [x, y] = [y, z]$$

となって矛盾が生じる。よって $x \succ y$ でなければならない。同様にして $y \succ z$ もわかるので、これで補題３の証明が完全に完成した。

第四の補題（1）

補題 4

$x \succ y$ であり、$z \succ x$ であるとすれば、ある有限列 $a_0, a_1, ..., a_k$ が存在して、

$$a_0 = y,\ a_1 = x,\ [a_{i+1}, a_i] = [a_{i+2}, a_{i+1}] \text{ for all } i,$$

$$z \succsim a_k,\ [a_1, a_0] > [z, a_k]$$

が成り立つ。同様に $y \succ w$ であればある有限列 $a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-k}$ が存在して、

$$a_0 = y,\ a_1 = x,\ [a_{i+1}, a_i] = [a_{i+2}, a_{i+1}] \text{ for all } i,$$

$$a_{-k} \succsim w,\ [a_1, a_0] > [a_{-k}, w]$$

が成り立つ。

第四の補題（2）

第四の補題の証明は複雑なので省略する。これはアルトなどは公理として置いていたものである。重要なことは、この補題の持つ意味である。これは、「x と y の効用差と比べて、z と x の効用差は無限大ではない」という意味を持っている。具体的に言うと、それは k より小さくなければならない。y の効用が 0 で x の効用が 1 なら、a_i の効用は i にならなければならず、したがって z の効用は $k+1$ より小さくなければならないのである。（a_{k+1} が存在するかどうかはわからない。これは後で議論する際に問題になる）
なお、この補題の証明には、Debreu (1954) による効用関数の存在定理を用いる。したがってここで X のハウスドルフ性、可分性、連結性、および $\succsim$ の閉性を用いている。

鍵となる集合の生成（1）

ここで、すべての x, y に対して $x \sim y$ であれば、すべての x, y, z, w に対して $[x, y] = [z, w]$ であることが言えるので、定数関数、そしてそれだけが $\geq$ を表現することがわかり、証明が終わる。そこで、以降では少なくとも一組、$x^* \succ y^*$ となる x^*, y^* の存在を仮定して、そこから議論を始める。
以降、帰納的に D_k という集合を定義していく。まず $a_0^0 = y^*, a_1^0 = x^*$ とする。a_i^0 が存在するとき、$[x, a_i^0] \geq [a_1^0, a_0^0]$ となる x があれば、補題 1 から、$[a_{i+1}^0, a_i^0] = [a_1^0, a_0^0]$ となる a_{i+1}^0 が存在する。もしそのような x がなければ、a_{i+1}^0 は定義しない。
同様に a_{-i}^0 が存在するとき、$[a_{-i}^0, x] \geq [a_1^0, a_0^0]$ となる x があれば、補題 2 から、$[a_{-i}^0, a_{-i-1}^0] = [a_1^0, a_0^0]$ となる a_{-i-1}^0 が存在する。そのような x がなければ、a_{-i-1}^0 は定義しない。
D_0 はこうして定義された a_i^0 をすべて集めてできた集合とする。

鍵となる集合の生成（2）

次に、$k = k^*$ まで $D_k = (a_i^k)$ という可算集合が定まっていて、すべての i, j に対して $[a_{i+1}^k, a_i^k] = [a_{j+1}^k, a_j^k]$ であり、また $a_i^k = a_{2i}^{k+1}$ が成り立っていると仮定しよう。D_{k^*+1} を定義したい。まず、$a_{2i}^{k^*+1}$ は $a_i^{k^*}$ として定義する。次に、$a_i^{k^*}$ と $a_{i+1}^{k^*}$ が定義されているとき、補題 3 から

$$[a_{2i+1}^{k^*+1}, a_i^{k^*}] = [a_{i+1}^{k^*}, a_{2i+1}^{k^*+1}]$$

を満たす $a_{2i+1}^{k^*+1}$ が存在するので、それをひとつ取る [2]。

[2]後で述べるが、我々は効用を、a_i^k の効用が $\frac{i}{2^k}$ になるように作ろうとしている。

鍵となる集合の生成（3）

いま、$a_i^{k^*}$ は存在するが $a_{i+1}^{k^*}$ は存在しない状況を考えよう。もし $[x, a_i^{k^*}] \geq [a_1^{k^*+1}, a_0^{k^*+1}]$ となる x が存在するならば、補題 1 から $[a_{2i+1}^{k^*+1}, a_i^{k^*}] = [a_1^{k^*+1}, a_0^{k^*+1}]$ となる $a_{2i+1}^{k^*+1}$ が存在するので、それを取る。そのような x が存在しなければ、$a_{2i+1}^{k^*+1}$ は定義しない。また $a_{2i+1}^{k^*+1}$ が定義されているとき、$a_{2i+2}^{k^*+1}$ に該当するものは存在しない：もしそのようなものがあれば、$a_{i+1}^{k^*}$ が定義できてしまい、当初の仮定に矛盾するからである。
同様に、$a_i^{k^*}$ は定義されているが $a_{i-1}^{k^*}$ が定義されていないときも類似の処理を行う。$a_i^{k^*+1}$ をすべて集めてできる集合を D_{k^*+1} とすれば、これは先ほどの仮定をすべて満たす。$D = \cup_k D_k$ と定義する。

第五の補題

補題 5

$x \succ y$ とすれば、$x \succ z \succ y$ となるような $z \in D$ が存在する。

直観的には、これは補題４の逆である。補題４は要するに、「ある改善が他の改善よりも無限に大きいことはない」という主張だったが、逆に補題５は、「ある改善が他の改善よりも無限に小さいことはない」という主張を意味している。
この証明も非常に複雑なので省略する。

効用関数の構成（1）

さて、効用関数を作ろう。最初に $D' = \{x \in X | \exists z \in D \text{ s.t. } z \sim x\}$ と定義する。$x \in D'$ に対して、$z \sim x$ となる $z \in D$ を取って、$z = a_i^k$ であるとき、$v(x) = \frac{i}{2^k}$ と定める。この定義は k に依らず一意的に定まり、したがって v は D' 上で定義された実数値関数である。

D' 上に限定すれば、v が $\geq$ を表現しているということを示そう。示さなければいけないのは以下の式である。

$$[x, y] \geq [z, w] \Leftrightarrow v(x) - v(y) \geq v(z) - v(w).$$

効用関数の構成（2）

まず、$x, y, z, w \in D'$ を任意に取ると、
$x \sim x'$, $y \sim y'$, $z \sim z'$, $w \sim w'$ となる $x', y', z', w' \in D$ が存在する。k を十分大きく取れば $x' = a^k_{i_x}$, $y' = a^k_{i_y}$, $z' = a^k_{i_z}$, $w' = a^k_{i_w}$ となるような i_x, i_y, i_z, i_w が存在する。
もし、

$$v(x) - v(y) \geq v(z) - v(w)$$

が成り立っているとすれば、これは

$$i_x - i_y \geq i_z - i_w$$

を意味する。もし $i_x - i_y \geq 0 \geq i_z - i_w$ ならば

$$[x, y] \geq [y, y] = [z, z] \geq [z, w]$$

となる。

効用関数の構成（3）

もし $i_x - i_y \geq i_z - i_w \geq 0$ であれば、$i_* = \min\{i_y, i_w\}$ に対して、$a^k_{i_*+i_x-i_y}$ と $a^k_{i_*+i_z-i_w}$ は共に存在し、そして簡単に示せるように、

$$[x, y] = [a^k_{i_*+i_x-i_y}, a^k_{i_*}] \geq [a^k_{i_*+i_z-i_w}, a^k_{i_*}] = [z, w]$$

となる。$0 \geq i_x - i_y \geq i_z - i_w$ のときも同様なので、結局我々は

$$v(x) - v(y) \geq v(z) - v(w) \Rightarrow [x, y] \geq [z, w]$$

を示したことになる。
この推論をほとんど同様に繰り返すことで、

$$v(x) - v(y) > v(z) - v(w) \Rightarrow [x, y] > [z, w]$$

も示せる。よって我々の主張は正しく、v は D' 上では $\geq$ を表現する関数になっている。

効用関数の構成（4）

以上の結果を X 全体に拡張するために、まず v の定義域を X 全体に拡張しなければならない。x が $\succsim$ の最大元でない場合、

$$v(x) = \inf\{v(z) | z \in D,\ z \succsim x\}$$

とすれば、また x が $\succsim$ の最小元でない場合、

$$v(x) = \sup\{v(z) | z \in D,\ x \succsim z\}$$

とすればよい。この v の二つが両方とも定義できる場合に一致することは簡単に示せる。

効用関数の構成（5）

この $v: X \to \mathbb{R}$ について、まずは

$$x \succsim y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$$

を示そう。これは以下と同値である。

$$x \succsim y \Rightarrow v(x) \geq v(y),\ x \succ y \Rightarrow v(x) > v(y).$$

前者については、定義を考えれば成り立つことは明らかである。後者は、$x \succ y$ ならば補題5から $x \succ z \succ y$ となる $z \in D$ が存在するので、成り立つ。よってこの主張については正しいことがわかる。

効用関数の構成（6）

今度は、v の連続性を示す。このためには、半直線 $]-\infty, a], [a, +\infty[$ の逆像が閉集合であればよい。しかし、$a \in]\inf v, \sup v[$ だった場合、

$$v^{-1}([a, +\infty[) = X \setminus \cup_{y \in D: v(y) < a} \{z \in X | y \succ z\},$$

$$v^{-1}(]-\infty, a]) = X \setminus \cup_{y \in D: v(y) > a} \{z \in X | z \succ y\},$$

と書けるので、これらは明らかに閉集合である。$a \notin]\inf v, \sup v[$ のときの例外処理は簡単なので省略する。よって v は連続である。X は連結であるから、$v(X)$ は凸集合であることに注意。

効用関数の構成（7）

我々の証明の目標は

$$[x,y] \geq [z,w] \Leftrightarrow v(x)-v(y) \geq v(z)-v(w)$$

である。これは次のふたつの主張が示せればよい。

$$v(x)-v(y) \geq v(z)-v(w) \Rightarrow [x,y] \geq [z,w],$$

$$v(x)-v(y) > v(z)-v(w) \Rightarrow [x,y] > [z,w].$$

まず、前者の主張が正しければ、後者の主張も正しいことを示そう。前者が正しいとし、$v(x)-v(y) > v(z)-v(w)$ とする。このとき、x が v の最小点でないか、y が v の最大点でないかのどちらかが成り立たなければならない。x が最小元でなければ、$x \succ x'$ かつ $v(x')-v(y) \geq v(z)-v(w)$ となる $x' \in D$ が存在するので、

$$[x,y] > [x',y] \geq [z,w]$$

となって正しいことがわかる。y が最大元でない場合も同様である。

第六の補題

補題 6

任意の $x \in X$ に対して、$v(x) = v(x')$ となる $x' \in X$ と、$\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ となる D' の点列 (x_n) が存在する。しかも x が v の最大元でないなら、$v(x_n) > v(x')$ が常に成り立つとしてよく、また x が v の最小元でないなら、$v(x_n) < v(x')$ が常に成り立つとしてよい。

この証明は省略するが、この定理の証明でここでのみ、X の連結性ではなく、弧状連結性が必要になる。

第六の補題の帰結（１）

$v(x) - v(y) \geq v(z) - v(w)$ が成り立っていることを仮定する。y と z が両方とも v の最小点であれば、

$$[x, y] \geq [x, w] \geq [z, w]$$

となる。また x と w が両方とも v の最大点であれば、

$$[x, y] \geq [z, y] \geq [z, w]$$

となる。したがって、以下で $[x, y] \geq [z, w]$ を示そうとするときには、x と w のどちらかは v の最大点ではないということ、および y と z のどちらかは v の最小点ではないということを仮定してよい。以下では x が v の最大点ではなく、y が v の最小点でない場合だけを扱うが、残りの場合の証明もまったく同様に行える。

第六の補題の帰結（２）

補題にある x', y', z', w' と D' 上の点列 $(x_n), (y_n), (z_n), (w_n)$ を取ってくる。この際、x は v の最大点でないので、$v(x_n) > v(x)$ が常に成り立つことを仮定してよい。また y は v の最小点ではないので、$v(y_n) < v(y)$ が常に成り立つことを仮定してよい。すると次が常に成り立つ。

$$v(x_n) - v(y_n) > v(z) - v(w).$$

したがってある増加関数 $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して、

$$v(x_n) - v(y_n) > v(z_{k(n)}) - v(w_{k(n)})$$

でなければならない。これはすでに示したように

$$[x_n, y_n] > [z_{k(n)}, w_{k(n)}]$$

を意味する。

第六の補題の帰結（3）

したがって連続性から、

$$[x, y] = [x', y'] \geq [z', w'] = [z, w]$$

となって、言いたいことが示せた。以上で v が $\geq$ を表現していることの証明が終わった。

一意性

最後に、w が連続で、$\geq$ を表現しているとする。このとき、先ほどの証明で使った x^* と y^* を取り、

$$u(x) = \frac{w(x) - w(y^*)}{w(x^*) - w(y^*)}$$

と定義する。このとき、任意の $x \in D'$ に対しては、明らかに $u(x) = v(x)$ である。一般の $x \in X$ に対しては、補題 6 から、x と同じ効用水準を持つ x^+ と、そこに収束する D' の点列 (x_n) が存在するので、u と v の連続性から、やはり $u(x) = v(x)$ である。したがって、w は v の正アフィン変換でしかあり得ない。以上で、すべての主張の完成した。

Thank you for your attention.