On the Basis of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation in Economic Dynamics

細矢祐誉

中央大学

May 25, 2022

ＨＪＢ方程式

ハミルトン＝ヤコビ方程式は、いわゆる退化楕円型微分方程式の一種である。この方程式はある種のパラメータ付き変分問題の値と関連を持ち、特にパラメータに対して問題の値を返すいわゆる価値関数がこの方程式の解になることが多い。この文脈で当該方程式を研究する場合にはベルマンの名を加え、ハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン（ＨＪＢ）方程式と呼ばれる場合が多い。この方程式は経済学にも多数の応用例が見られる。今回は主にマクロ経済動学の応用例を扱う。

ＨＪＢ方程式の問題点 (1)

すでに述べたように、経済学にはＨＪＢ方程式の応用が多数あるのだが、その数学的基礎付けを探そうとするとすぐに壁にぶち当たる。これはいくつかの理由がある。列挙すると以下の通り。

- 通常、物理などの応用に使われる変分問題と、経済学で出てくる変分問題の構造が異なる。
- そもそもＨＪＢ方程式自体が退化楕円型微分方程式という解析の難しいクラスの方程式である。
- 経済学の定番の仮定と、変分問題でＨＪＢ方程式を扱うときの定番の仮定が食い違う。

ＨＪＢ方程式の問題点 (2)

第一の問題は時間区間の問題である。物理などで出てくるＨＪＢ方程式は、有限時間の費用関数の積分が目的関数の問題に付随して現れる（時には区間自体を選ぶ問題もある）。これに対して経済学では、時間区間は $[0,+\infty[$ で固定で、無限時間の問題を扱うのが普通である。つまり、最も盛んに研究されているタイプのＨＪＢ方程式と、経済学で出てくるＨＪＢ方程式は、バックグラウンドのモデルの構造が根本的に違っていて、そのままでは議論を適用できない場合がほとんどである。

ＨＪＢ方程式の問題点 (3)

第二の問題は、経済学におけるＨＪＢ方程式の応用がほとんどの場合、この方程式の普通の解（古典解）が価値関数であると考えて議論しているということである。これは、価値関数がＨＪＢ方程式の古典解であるという主張と、ＨＪＢ方程式の古典解は価値関数であるという主張を両方含む。ところが、そもそも退化楕円型方程式であるＨＪＢ方程式は古典解の存在を保証することすら難しく、Lions (1982), Crandall and Lions (1983) 以降、粘性解と呼ばれる「弱い解」を扱うのが普通となっている。つまり、「価値関数が古典解になること」はおろか、「古典解があること」すら、基礎づけがない場合がある。

ＨＪＢ方程式の問題点 (4)

第三の問題は、目的関数のクラスに関係している。通常、特にマクロ経済学で出てくる経済学の最適化問題では、目的関数が対数関数を含むいわゆるＣＲＲＡ型のクラスであることがほとんどである。このクラスの関数は上か下か、少なくともどちらか一方は非有界である。一方、ＨＪＢ方程式の無限時間の解析をするときに定番の仮定は費用関数の有界性を仮定することで、新しめの研究成果（たとえば Bardi and Dolcetta (2008) など）はたいていこれを仮定していい性質を出している。つまり、新しめの研究成果ですら、経済学における典型的な応用はカバーできない。

今回の報告の概要 (1)

今回の報告の概要は以下の通りである。まず、通常の（確率的ショック項を持たない）ラムゼイ型経済成長モデルの仮定を「ほんの少しだけ」逸脱したモデルを考えると、そこではＨＪＢ方程式は価値関数であることの必要条件にも十分条件にもならないことを見る。このような反例自体は簡単に作れて、たとえば価値関数が恒等的に $+\infty$ であった場合、ＨＪＢ方程式は微分方程式である時点で実数値関数のみが満たせるため、価値関数はＨＪＢ方程式と関係を持たない。しかし我々が構築するのはそのような自明な例ではなく、任意の時間選好 ρ に対して価値関数が有限値であるにも関わらず、価値関数はＨＪＢ方程式の古典解どころか粘性解ですらなく、一方でＨＪＢ方程式の解自体は無数に存在するような例である。これは問題の深刻さとしては一段階上である。

今回の報告の概要 (2)

すると次に気になるのは、この「ほんの少しだけ」の逸脱がないモデルでは価値関数はＨＪＢ方程式の唯一の解になるのかという疑問である。これに答えるため、我々はかなり一般化した（ただし、相変わらず確率項はない）マクロ動学モデルを考え、いくつかの妥当な仮定の下で価値関数がＨＪＢ方程式の唯一の古典解になっていることを証明する。またおまけとして、ＨＪＢ方程式の解から元問題の解を算出する方法も作ることに成功した。この方法は解がシンプルな一次元の常微分方程式で記述されるという点で、通常の位相図解析と違った魅力を持っている。

反例 (1)

我々が考えるのは以下の問題である。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))dt \\
\text{subject to.} \quad & k(t) \ge 0,\ c(t) \ge 0, \\
& c(t) \text{ is locally integrable}, \\
& \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) \text{ a.e.}, \\
& k(0) = \bar{k} > 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

与えられた $\rho > 0$ に対して、この問題の価値関数を V_ρ と記述する。

反例 (2)

この問題 (1) に付随するＨＪＢ方程式とは、未知関数 V についての以下の微分方程式を言う。

$$\sup_{c \geq 0}\{(f(k) - c)V'(k) + u(c)\} - \rho V(k) = 0. \tag{2}$$

以下、我々は $u(c) = c$ かつ $f(k) = \sqrt{k}$ とし、下記の主張を証明する。

1) 価値関数 V_ρ は有限な凹関数である。
2) 方程式 (2) には無数の古典解が存在する。
3) 方程式 (2) の任意の粘性解は凹関数にならない。

反例 (3)

まず、$g(k) = \rho k + \frac{1}{4\rho}$ とする。この $g(k)$ は $f(k)$ の $k = \frac{1}{4\rho^2}$ における接線に当たるものであるため、f の凹性から、$g(k) \geq f(k)$ がすべての k に対して成り立つ。そこで以下の改変した問題を考える。

$$\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t))dt \\
\text{subject to.} \quad & k(t) \geq 0,\ c(t) \geq 0, \\
& c(t) \text{ is locally integrable,} \\
& \dot{k}(t) = g(k(t)) - c(t) \text{ a.e.,} \\
& k(0) = \bar{k} > 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

反例 (4)

ここで $k^*(t) = \bar{k}$ かつ $c^*(t) = \rho\bar{k} + \frac{1}{4\rho}$ とするとこのペアはオイラー方程式と横断性条件を満たし、よって問題 (3) の解である。
一方、問題 (1) の制約条件を満たす $(k(t), c(t))$ に対して、
$\tilde{c}(t) = g(k(t)) - \dot{k}(t)$ と定義すれば $\tilde{c}(t) \ge c(t)$ で、かつ $(k(t), \tilde{c}(t))$ は問題 (3) の制約条件をすべて満たす。以上の考察から、
$V_\rho(k) \le k + \frac{1}{4\rho^2}$ がわかる。一方、$u(c)$ は非負なので $V_\rho(k) \ge 0$ であり、よって V_ρ は有限である。

反例 (5)

いま k_0, k_1 と $s \in [0,1]$ を取り、$k_s = (1-s)k_0 + sk_1$ とする。また $(k_i(t), c_i(t))$ はそれぞれ $\bar{k} = k_i$（ただし $i \in \{0,1\}$）のときに (1) の制約条件を満たすペアとし、

$$k_s(t) = (1-s)k_0(t) + sk_1(t),\ c_s(t) = f(k_s(t)) - \dot{k}_s(t)$$

と定義する。このとき $(k_s(t), c_s(t))$ は $\bar{k} = k_s$ のときに (1) の制約条件を満たすペアであり、さらに f の凹性から

$$c_s(t) \geq (1-s)c_0(t) + sc_1(t)$$

を得る。これを使うと容易に V_ρ が凹であることを得るので、1) は正しい。

反例 (6)

次に主張 2) について。定数 $A > 0$ に対して

$$V(k) = Ae^{2\rho\sqrt{k}-2\rho} \tag{4}$$

と定義すると、

$$V'(k) = \frac{\rho V(k)}{\sqrt{k}}$$

という条件を満たす。特にここから、

$$\lim_{k\to 0} V'(k) = \lim_{k\to\infty} V'(k) = +\infty \tag{5}$$

を得るので、$V'(k)$ には最小値が存在し、しかもそれは A について線形である。よって十分 A が大きければ、すべての $k > 0$ に対して $V'(k) \geq 1$ を満たす。

反例 (7)

一方、(2) 式は今回の場合、

$$\sup_{c\geq 0}\{(\sqrt{k}-c)V'(k)+c\}=\rho V(k)$$

と表されるが、$V'(k)\geq 1$ が常に成り立てば左辺の値は $c=0$ の時に達成され、したがって

$$\sqrt{k}V'(k)=\rho V(k)$$

という方程式になる。よって、十分 A が大きければ (4) 式で表されるすべての $V(k)$ は (2) の古典解である。

反例 (8)

最後に 3) について。V が凹関数である (2) の粘性解としよう。凹関数は任意のコンパクト区間でリプシッツなので、ほとんどすべての点で微分可能である。したがって粘性解のよく知られた性質から、ほとんどすべての $k>0$ に対して

$$\sup_{c\geq 0}\{(\sqrt{k}-c)V'(k)+c\}=\rho V(k)$$

が成り立つことになる。左辺は $V'(k)<1$ なら $+\infty$ なので、$V'(k)\geq 1$ が常に成り立たなければならず、よって左辺の値は $c=0$ の時に達成される。したがって

$$\sqrt{k}V'(k)=\rho V(k)$$

が成り立たなければならない。この方程式の一般解は (4) であるが、すでに示したように (5) が成り立つため、この関数は凹ではあり得ず、矛盾が生じる。よって 3) も正しい。

なにが問題なのか？ (1)

以下の説明は Malliaris and Brock (1988) に出てきたＲＢＣモデルによるＨＪＢ方程式の説明を、確率ショックのない形に書き改めたものである。まず、簡単な評価から価値関数 V について

$$V(\bar{k}) = \sup_{k(s),c(s)} \left\{ \int_0^t e^{-\rho s} u(c(s))ds + e^{-\rho t} V(k(t)) \right\}$$

という関係式を出す。次にこれを、

$$\sup_{k(s),c(s)} \left\{ \int_0^t e^{-\rho s} u(c(s))ds + e^{-\rho t} V(k(t)) - e^{-\rho 0} V(k(0)) \right\} = 0$$

と変形する。

なにが問題なのか？ (2)

$c(s)$ が連続で V が微分可能だとすると、$k(s)$ は自動的に連続微分可能になるので、

$$
\begin{aligned}
0 &= \sup_{k(s),c(s)} \left\{ t \times \frac{d}{dT} \left[\int_0^T e^{-\rho s} u(c(s))ds + e^{-\rho T} V(k(T)) \right] \Big|_{T=0} + o(t) \right\} \\
&= \sup_{k(s),c(s)} \{ t[u(c(0)) - \rho V(k(0)) + V'(k(0))\dot{k}(0)] + o(t) \}
\end{aligned}
$$

となる。$k(0) = \bar{k}$ と $\dot{k}(0) = f(\bar{k}) - c(0)$ が決まっているので、最後の行は $c(0)$ だけに依存していて、それを代入すると

$$
\sup_{c \geq 0} \{ t[u(c) + V'(\bar{k})(f(\bar{k}) - c)] + o(t) \} - \rho V(\bar{k})t = 0
$$

となって、t で割り算して $t \downarrow 0$ とすればＨＪＢ方程式が得られる。

なにが問題なのか？ (3)

しかし少なくとも問題 (1) の価値関数 V_ρ という反例が出た以上は、この証明にはどこかしら問題がありそうだと気づく。すぐ考えつくのは $c(t)$ が不連続かもしれないという問題、V が連続微分可能でないかもしれないという問題だが、実は $c(t)$ が不連続であるという問題は一切関係ない。なぜなら、問題 (1) の制約に $c(t)$ の連続性を仮定しても上の反例の証明はそのまま成り立つからである。また、V の連続微分可能性は劣微分解析で代用できる。より本質的に怪しいのは $o(t)$ の評価である。前のスライドでは「最後の行は $c(0)$ だけに依存していて」と書いたが、その行には $o(t)$ があって、これは $k(s)$ と $c(s)$ に依存して変わる。そして $k(s)$ と $c(s)$ を固定すれば $o(t)$ であるこの項は、上限を取ったときにも $o(t)$ であるかはわからない。

なにが問題なのか？ (4)

もし (1) に解 $(k^*(t), c^*(t))$ が存在したとすると、オイラー方程式から $c^*(t)$ は連続で、Benveniste-Scheinkman の包絡線定理から価値関数は微分可能で、そして最後に指摘した $o(t)$ の問題も解を使って評価すればよくなって、上の証明で価値関数がＨＪＢ方程式の古典解であることが示せる。よって問題なのは (1) における解の非存在である。逆に言うと、解の存在が保証できるモデルではこのような問題は生じない。
しかし、ＨＪＢ方程式を使う元々の動機は解を見つけることが難しすぎるからであるため、解の存在を確認してからＨＪＢ方程式を使おうという方針には無理がある。よって、解の存在を一切経由せずに、価値関数がＨＪＢ方程式を満たすことを保証する条件が必要である。以降我々はこの問題を、ラムゼイ型のモデル (1) よりずっと一般化されたモデルで考える。

考える問題

今回考える問題は以下の問題である。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t), k(t)) dt \\
\text{subject to.} \quad & c(t) \ge 0, \ \ k(t) \ge 0, \\
& c(t) \text{ is locally integrable}, \\
& \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t), k(t)) dt \text{ can be defined}, \\
& \dot{k}(t) = F(k(t), c(t)) \text{ a.e.}, \\
& k(0) = \bar{k} > 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

通常のラムゼイ型成長モデルでは $u(c, k) = u(c)$ で $F(k, c) = f(k) - dk - c$ となる（$d \ge 0$ は資本減耗率）が、今回はもっと複雑にいろいろなパターンが考えられるモデルにした。

仮定群 (1)

以下、本報告では経済学で標準的な $\mathbb{R}^n_+$ や $\mathbb{R}^n_{++}$ などの記号を用いる。このページに定義を書いておくと、

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \ge 0 \text{ for all } i\},$$

$$\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \text{ for all } i\},$$

である。$n = 1$ のときは n は省略される。

仮定 1

$\rho > 0$ である。

仮定群 (2)

仮定 2

$u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は連続で凹である。さらに、$u(c,k)$ は k について非減少、c については増加的で、$\mathbb{R}^2_{++}$ 上では連続微分可能である。さらに、ある $c > 0$ に対して $u(c,0) > -\infty$ である。

仮定 2 の最後の条件は、たとえば $u(c,k) = \log c + \log k$ などを禁止している。技術的には、証明内部でファトゥの補題の適用可能性を確保するために必要である。実質的には、たとえばラムゼイモデルでは u は k に一切影響を受けないので、この条件はさほど強くない。
k について非減少というのは k に依存しない可能性を含むので、この仮定 2 は $u(c,k)$ が $u(c)$ とだけ書かれるモデルを許容することに注意。

仮定群 (3)

仮定 3

$F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ は連続な凹関数で $F(0,0) = 0$ を満たし、また $F(k,c)$ は c について減少的である。さらに、ある $d_1, d_2 \geq 0$ が存在して、$k > 0$ かつ $c \geq 0$ なら $F(k,c) > -d_1k - d_2c$ である。さらに、任意の c に対してある k が存在して $F(k,c) > F(0,c)$ である。

ラムゼイモデルでは $F(k,c) = f(k) - dk - c$ なので、
$d_1 = d, d_2 = 1$ とすれば仮定は成り立つ。稲田条件は仮定していないことに注意。したがって (1) の線形技術は問題にならない。
ただし、d_2 の存在は若干やっかいである。この条件は、$c(t)$ が局所可積分であるときに $F(k(t), c(t))$ も局所可積分であることを保証するために必要である。が、このために $F(k,c) = f(k) - c^2$ などは禁止される。

仮定群 (4)

なお、問題 (6) の $c(t)$ の条件を「局所可積分」から「可測かつ局所有界」に改めることで、仮定３は次の物に差し替えられる。

仮定３’

$F:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ は連続な凹関数で $F(0,0)=0$ を満たし、また $F(k,c)$ は c について減少的である。さらに、ある $d_1 \geq 0$ と増加関数 $\delta_2(c)$ が存在して、$\delta_2(0)=0$ であり、$k>0$ かつ $c \geq 0$ なら $F(k,c) > -d_1k - \delta_2(c)$ である。さらに、任意の c に対してある k が存在して $F(k,c) > F(0,c)$ である。

これならば $F(k,c)=f(k)-c^2$ も扱える。が、今回の報告ではこの部分は省く。

仮定群 (5)

仮定 4

関数 $\frac{\partial u}{\partial c}(c,k)$ は c について減少的で、$k>0$ ならば常に $\lim_{c\to 0}\frac{\partial u}{\partial c}(c,k)=+\infty$ と $\lim_{c\to\infty}\frac{\partial u}{\partial c}(c,k)=0$ が成り立つ。さらに、どんな $k>0$ と $M>0$ に対しても、$c\mapsto\frac{\partial u}{\partial k}(c,k)$ は $]0,M]$ 上で有界である。

この仮定はだいたいの一次同次関数 u を禁止する。特に、我々が考えた反例はこの仮定だけを逸脱している。$u(c,k)=(c^\rho+k^\rho)^{1/\rho}$ も禁止されるが、$0<A<1$ に対して $u(c,k)=(c^\rho+k^\rho)^{A/\rho}$ は許容してくれる。
最後の条件については、$\lim_{c\to 0}\frac{\partial u}{\partial k}(c,k)=+\infty$ となるケースを禁止している。これはさして強い条件ではない。

仮定群 (6)

仮定 5

$\frac{\partial F}{\partial c}(k,c)$ は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上常に存在し、連続である。

この最後の仮定は価値関数が微分可能になるために必要である。ラムゼイモデルでは $F(k,c) = f(k) - dk - c$ なので、生産関数 f が微分可能でなくともこの仮定は成り立つ。

価値関数と問題の解 (1)

定義 1（許容可能性）

$\mathbb{R}_+$ 上で定義された非負関数のペア $(k(t), c(t))$ は、$k(t)$ が任意のコンパクト区間上で絶対連続、$c(t)$ が局所可積分で、積分 $\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t), k(t))dt$ が定義でき（$\pm\infty$ でも可）、$\dot{k}(t) = F(k(t), c(t))$ がほとんどすべての t について成り立つとき、**許容可能** (admissible) と言う。許容可能で $k(0) = \bar{k}$ を満たす $(k(t), c(t))$ をすべて集めた集合を $A_{\bar{k}}$ と書くことにする。

これを使うと問題 (6) は以下のように書き直せる。

$$\max \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t), k(t))dt$$

$$\text{subject to.} \quad (k(t), c(t)) \in A_{\bar{k}}.$$

価値関数と問題の解 (2)

定義２（価値関数）

関数

$$\bar{V}(\bar{k}) = \sup\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t),k(t))dt \,\middle|\, (k(t),c(t)) \in A_{\bar{k}}\right\}$$

を**価値関数** (value function) と呼ぶ。

価値関数の定義域は $\mathbb{R}_+$ とする。ただし、後に議論するＨＪＢ方程式の議論では、$\mathbb{R}_{++}$ の部分だけしか関係しない。

価値関数と問題の解 (3)

定義 3（問題の解）

$(k^*(t), c^*(t)) \in A_{\bar{k}}$ が問題の**解** (solution) であるとは、

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c^*(t), k^*(t))dt = \bar{V}(\bar{k}) \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを言う。

解の定義の中に、目的関数の値が有限であるという要請が入っていることに注意。

ＨＪＢ方程式

問題 (6) に付随するＨＪＢ方程式は、未知関数 $V(k)$ に対する以下の式で表される。

$$\sup_{c\geq 0}\{F(k,c)V'(k)+u(c,k)\}-\rho V(k)=0. \tag{7}$$

$\mathbb{R}_+$ 上で定義された広義実数値関数 V がこの問題の**古典解**であるとは、V が $\mathbb{R}_{++}$ 上では実数値連続微分可能な関数で、さらに上の式がすべての $k>0$ に対して成り立つことを言う。なお、**粘性解**というより弱い概念もあるが、本報告では定義の説明は省略する。

純集積過程

補題 1

仮定 3 が成り立っているとする。このとき、任意の $\bar{k} > 0$ に対して、以下の微分方程式

$$\dot{k}(t) = F(k(t), 0), \; k(0) = \bar{k}$$

は $\mathbb{R}_+$ 上で定義された解 $k^+(t, \bar{k})$ を持つ。さらに、$\inf_{t \geq 0} k^+(t, \bar{k}) > 0$ がすべての $\bar{k} > 0$ に対して成り立つ。

$(t, \bar{k})$ に対して $k^+(t, \bar{k})$ を返す関数 k^+ を**純集積過程** (pure accumulation path) と呼ぶ。

増大条件

定義 4（増大条件）

関数 $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は、以下の条件

$$\lim_{T \to \infty} e^{-\rho T} V(k^+(T, \bar{k})) = 0 \tag{8}$$

をすべての $\bar{k} > 0$ に対して満たすとき、**増大条件** (growth condition) を満たすと言う。

以下、$\mathscr{V}$ という記号を、増加的、凹で増大条件を満たすような関数 $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ をすべて集めてできた集合とする。
なお、$D_{k,-}F(k, 0) < \rho$ となる $k > 0$ がひとつでも存在した場合、(8) はすべての凹関数が満たすことを証明することができる。この場合、$\mathscr{V}$ は増加的かつ凹な $\mathbb{R}_+$ 上の実数値関数全体からなる空間である。

命題 1

命題 1

仮定１－４が成り立っているとする。このとき、$\mathbb{R}^2_{++}$ 上で定義されたある正値連続関数 $c^*(p,k)$ が存在して、

$$F(k, c^*(p,k))p + u(c^*(p,k), k) = \sup_{c \ge 0}\{F(k,c)p + u(c,k)\}$$

が成り立つ。

この関数 c^* は、離散時間のときの政策関数に対応するような関数である。

命題２

命題２

仮定１－３が成り立っているとする。このとき、$\bar{V}(\bar{k}) > -\infty$ が常に成り立つ。また価値関数 $\bar{V}$ は非減少かつ凹である。

命題２からただちに、我々は $\bar{V}(\bar{k}) < +\infty$ となる点 $\bar{k}$ が存在することと、すべての $\bar{k} > 0$ で $\bar{V}(\bar{k}) < +\infty$ となることが同値だということがわかる。この場合、我々は価値関数 $\bar{V}$ は**有限** (finite) だと呼ぶことにする。

命題３

命題３

仮定１－４が成り立っているとする。もし価値関数 $\bar{V}$ が有限ならば、それは増加的で、ＨＪＢ方程式の粘性解である。さらに仮定５も成り立っていれば、$\bar{V}$ は連続微分可能で、ＨＪＢ方程式の古典解である。

したがって、後は $\bar{V}$ の有限性を保証する条件があれば、価値関数がＨＪＢ方程式を満たすための条件を記述しきれることになる。

ＣＲＲＡ関数

次の仮定を定義する前に、ＣＲＲＡ関数を念のために定義しておこう。

定義５（ＣＲＲＡ関数）

パラメータ $\theta > 0$ に対して、

$$u_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{if } \theta \neq 1, \\ \log x & \text{if } \theta = 1 \end{cases}$$

と定義する。この関数 u_θ をＣＲＲＡ関数と呼ぶ。

仮定 6

仮定 6

ある $k^*, k^+ > 0, c^* \geq 0, \gamma, \delta, \theta > 0, a > 0, b \geq 0, C \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$F(k^*, c^*) > 0, \tag{9}$$

$$(\gamma, -\delta) \in \partial F(k^*, c^*),\ 0 < D_{k,+}F(k^+, 0) \leq \gamma, \tag{10}$$

$$\rho - (1-\theta)\gamma > 0, \tag{11}$$

$$u(c,k) \leq au_\theta(c) + bu_\theta(k) + C \text{ on } \mathbb{R}^2_{++}, \tag{12}$$

がすべて成り立つ。

この仮定は見た目ほど強くない。たとえば、
$F(k,c) = f(k) - dk - c$ で f が稲田条件を満たしていたりしたら、
最後の行を満たす θ が存在することくらいしか条件としては残らない。

最初の主結果

定理 1

仮定１－６が成り立っているとすれば、$\bar{V} \in \mathscr{V}$ であり、かつ $\bar{V}$ はＨＪＢ方程式の古典解である。

というわけで、価値関数がＨＪＢ方程式の解であるための条件についてはこれで解決した。

仮定 7

仮定 7

$\frac{\partial F}{\partial c}$ と $\frac{\partial u}{\partial c}$ は両方とも k について連続微分可能である。また、ある $k > 0$ が存在して、$\inf_{c \ge 0} D_{k,+}F(k,c) > \rho$ となる。

これもさほど強くない仮定である。たとえば $F(k,c) = f(k) - dk - c$ である場合、上の仮定は f の微分可能性すら仮定していないことに注意。

ルベーグ積分と広義積分

次の命題に行く前に、ひとつ追加の記号が必要である。我々は $A_{\bar{k}}$ の定義の中で、$\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c(t),k(t))dt$ が定義されているという要請を置いた。これは当然ながらルベーグ積分の意味で定義されているという意味であったが、これを拡張し、

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\rho t}u(c(t),k(t))dt$$

が存在するという要請に緩めた場合のペア $(k(t),c(t))$ の集合を $B_{\bar{k}}$ と書く。

命題４ (1)

命題４

仮定１－５と７が成り立っていたとし、$V \in \mathscr{V}$ がＨＪＢ方程式の古典解であるとする。すると、次の微分方程式

$$\dot{k}(t) = F(k(t), c^*(V'(k(t)), k(t))),\ k(0) = \bar{k} \tag{13}$$

は、$\mathbb{R}_+$ 上で定義された、$\inf_{t \ge 0} k^*(t) > 0$ を満たす解 $k^*(t)$ を持つ。さらに $c^*(t) = c^*(V'(k^*(t)), k^*(t))$ と定義すると、
$(k^*(t), c^*(t)) \in B_{\bar{k}}$ で、かつ

$$V(\bar{k}) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-\rho t} u(c^*(t), k^*(t)) dt$$

が成り立つ。（続く）

命題 4 (2)

命題 4（続き）

さらに $(k(t), c(t)) \in B_{\bar{k}}$ かつ $\inf_{t \geq 0} k(t) > 0$ ならば

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t), k(t)) dt \leq V(\bar{k})$$

が成り立つ。

二番目の主結果

定理１と命題４を合わせると、次の結果を得られる。

定理２

仮定１－７が成り立っていたとすれば、$\bar{V}$ は $\mathscr{V}$ 上のＨＪＢ方程式の唯一の古典解である。

解の導出

さらに命題４の (13) 式を使うことで、以下も示せる。

系 1

仮定１－７が成り立っていたとする。微分方程式

$$\dot{k}(t) = F(k(t), c^*(\bar{V}'(k(t)), k(t))),\ \ k(0) = \bar{k} \tag{14}$$

は、$\mathbb{R}_+$ で定義された、$\inf_{t \geq 0} k^*(t) > 0$ を満たす解 $k^*(t)$ を持つ。$c^*(t) = c^*(\bar{V}'(k^*(t)), k^*(t))$ と定義したとき、以下のどれかが成り立っていた場合、$(k^*(t), c^*(t))$ は問題 (6) の解である。１）$u(c, k)$ が上に有界か下に有界。２）$k^*(t)$ が有界。３）$\liminf_{k \to \infty} c^*(p, k) > 0$ である。

系１への注

系１に複雑な仮定がある理由は、$k^*(t) \to \infty$ かつ $c^*(t) \to 0$ という複雑なケースにおいて、積分 $\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c^*(t), k^*(t)) dt$ がルベーグの意味で確定できるかどうかがわからないという点にある。上の積分はリーマン広義積分の意味では確定できるため、
$(k^*(t), c^*(t)) \in B_{\bar{k}}$ は言えて、そこまででも定理２の証明には十分である。しかし解であるためには $(k^*(t), c^*(t)) \in A_{\bar{k}}$ である必要があるため、難しい問題が起こる。
ただし、たとえば $F(k, c) = f(k) - dk - c$ かつ $f'(k) < d$ となる k がある場合など、系１の条件が自動的に満たされる状態は案外多い。

系 2

不思議なことに、系 1 の逆はほとんど無条件で成立する。

系 2

仮定 1 – 7 が成り立っていたとする。もし、問題 (6) に解 $(k^*(t), c^*(t))$ があり、$\inf_{t\geq 0} k^*(t) > 0$ ならば、$k^*(t)$ は (14) の解であり、$c^*(t)$ は $c^*(\bar{V}(k^*(t)), k^*(t))$ とほとんどすべての点で一致する。

したがって、少なくとも解は系 1 の $(k^*(t), c^*(t))$ 以外にはあり得そうにない、というところまでは言えそうである。

証明のポイント (1)

以下、主結果の証明のポイントについて簡単に説明していく。まず、鍵となるのは以下の補題 5 である。

補題 5

$(k^*(t), c^*(t)) \in A_{\bar{k}}$ かつ $\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c^*(t), k^*(t))dt > -\infty$ であるとする。ここで $c_n(t) = \min\{c^*(t), n\}$ と定義すると、$k_n(t) \ge k^*(t)$ が常に成り立ちつつ $(k_n(t), c_n(t)) \in A_{\bar{k}}$ となるような関数 $k_n(t)$ が存在する。さらに $u(n, 0) > -\infty$ ならば $\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_n(t), k_n(t))dt > -\infty$ である。

証明のポイント (2)

補題 5 の証明のアイデアを簡単に述べる。まず微分方程式

$$\dot{k}(t) = F(k(t), c_n(t)),\ k(0) = \bar{k}$$

の解で $k(t) \geq k^*(t)$ を満たすものの空間にツォルンの補題を適用し、定義域が極大な解 $\hat{k}(t)$ を取る。この $\hat{k}(t)$ の定義域が $\mathbb{R}_+$ であれば $\hat{k}(t) = k_n(t)$ として証明が終わるので、背理法の仮定として $\hat{k}(t) = [0, T]$ という形だと仮定する。このとき簡単に、$\hat{k}(T) = k^*(T) = 0$ であることが示せる。

証明のポイント (3)

ここで、$\varepsilon > 0$ を十分小さく取って、$I = [T, T+\varepsilon]$ とし、X は I 上で定義された連続関数で $x(t) \ge k^*(t)$ を常に満たし、さらにとある関数（定義は省略）$r(t)$ に対して $|x(t) - x(s)| \le \int_s^t r(\tau)d\tau$ を常に満たすような $x(t)$ の全体とする。そしてこの空間 X 上で

$$P(x(\cdot))(t) = \int_T^t F(x(s), c_n(s))ds$$

と定義する。アスコリ＝アルゼラの定理から X は一様ノルムについて凸コンパクトで、P は X から X への連続写像であることが示せるので、シャウダーの不動点定理から不動点が存在するが、これは $\hat{k}(t)$ に不動点をつなげてより長い解を導出できることになり、矛盾が生ずる。こうして証明が完成する。

証明のポイント (4)

補題５の $(k_n(t), c_n(t))$ に対して、ファトゥの補題から

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_n(t), k_n(t))dt \geq \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t), k(t))dt$$

が示せる。実を言うとこれが本質的に最も重要な評価式で、これを用いることによって、我々は本質的な議論の大部分を $c(t)$ が有界であるという仮定の下で行うことができる。これが問題の難易度を大幅に引き下げてくれることになる。特に命題３は、このアイデアを用いれば u が有界な場合とほとんど同じ証明に帰着する。

計算例 (1)

応用例として、いわゆる対数ＡＫモデルの価値関数を計算してみよう。$u(c,k)=\log c$ で $F(k,c)=\gamma k-c$ とし、ただし $\gamma>\rho$ を仮定する。このモデルは仮定１－７を満たすことが簡単にわかるので、価値関数が $\mathscr{V}$ 上の唯一のＨＪＢ方程式の解である。そこでたとえば

$$\bar{V}(k)=A\log k+B$$

という形だと推測して、ＨＪＢ方程式の解になるような A と B を見つけてみよう。まずこの場合、

$$c^*(p,k)=\frac{1}{p}$$

かつ

$$\bar{V}'(k)=\frac{A}{k}$$

である。

計算例 (2)

したがって、

$$\sup_{c\geq 0}\{(\gamma k-c)\bar{V}'(k)+u(c)\}=\log k+A\gamma-1-\log A$$

となる。よって、$\bar{V}$ がＨＪＢ方程式の解になるためには、

$$\log k+A\gamma-1-\log A=\rho A\log k+\rho B$$

が成り立つ必要があり、左辺と右辺を比べることで

$$A=\frac{1}{\rho},\ B=\frac{1}{\rho}\left[\log\rho+\frac{\gamma}{\rho}-1\right]$$

という値が出てくる。よって価値関数は

$$\bar{V}(k)=\frac{1}{\rho}\left[\log k-\log\rho+\frac{\gamma}{\rho}-1\right]$$

と定まる。

計算例 (3)

後は方程式 (14) を計算すると

$$\dot{k}(t) = (\gamma - \rho)k(t),\ k(0) = \bar{k}$$

となって、これは線形常微分方程式なので公式で簡単に解けて、結果として系１から

$$k^*(t) = \bar{k}e^{(\gamma-\rho)t},\ c^*(t) = \rho\bar{k}e^{(\gamma-\rho)t}$$

が元問題 (6) の解であることがわかる。

残された課題

残された課題としては、多次元化がすぐに思いつく。しかし、これはそう容易ではない。
また、確率ショックが入った成長モデルに援用したいというのもある。確率ショックが入るとＨＪＢ方程式は二階の微分方程式になってますます解析が難しくなるのだが、幸いにもアレクサンドロフの定理から、連続微分可能な凹関数はほとんどすべての点で二階微分可能である。なにかやりようがあるのではないかと思われる。
最後に、ＨＪＢ方程式をコンピュータで近似計算する手法についてはなにも調べていない。離散時間ＤＰが隆盛した理由はそこがうまく行ったからだと思っているので、十分近似した V で (13) 式を解いたら元の解に近いものが出る、などといった結果が出るといいな、と思っている。

Thank you for your attention.