

# Non-Smooth Integrability Theory

細矢祐誉

中央大学

October 16, 2022

# これまでの研究の話

積分可能性理論の自分なりの目標は、効用関数の推定という計量経済学的な問題につなげることである。(カリブレーションの一般化、ノンパラ化など)

このために、以下の要素が必要である。

- 1) 需要関数が選好関係に対応しているための条件を導出
- 2) 需要関数から選好を計算する方法を与える
- 3) 需要関数に対応する選好の一意性を保証する
- 4) 需要関数から選好への対応関係の連続性を保証する

これについて、需要関数や逆需要関数が連続微分可能という仮定の下では、1)-4) まですべて解決済みである。

# 研究の動機 (1)

Hosoya (2017) において、以下の結果が出ている。

## 定理 4 (Hosoya (2017)) 概略

$(f^k)$  が  $C^1$  級の需要関数の列で、 $f$  という  $C^1$  級の需要関数に広義  $C^1$  収束しているとする。このとき、いくつかの追加条件の下で、対応する効用関数  $u_{f^k, \bar{p}}$  は  $u_{f, \bar{p}}$  に広義一様収束する。

この結果を適用することで、4) の問題を解決できるという考えであったが、仮定が強いのが当初から気になっていた。というのも、この定理の背後に想定している問題は計量経済学の問題である。 $f^k$  が  $k$  個の需要データに対する推定された需要関数で、 $f$  が真の需要関数であるとして、「一致性」が成り立つ、つまり  $f^k \rightarrow f$  の場合に、対応する効用関数の一致性も言えるか否か、という問題を考えている。

## 研究の動機 (2)

ここで、 $f^k$  が  $f$  に広義  $C^1$  位相で収束するという条件は、いくつかの聞き取り調査をした結果、計量理論的には強すぎて容認できない話のようである。したがって位相の条件を緩めたい。

幸いにも、 $f^k$  が  $f$  に広義一様収束し、さらに価格と所得の空間  $\mathbb{R}_{++}^{n+1}$  に含まれる任意のコンパクト集合  $C$  について、 $f^k$  のすべてと  $f$  に共通のリプシッツ定数  $L_C > 0$  があると仮定すると、うまく作った  $f^k$  に対応する「間接効用関数」の列が、 $f$  の間接効用関数に広義一様収束することが示せる。効用関数ではなく間接効用関数なのをいったん置いておけば、位相の問題はこの結果でかなり緩められるように見えるが、ここで追加の問題がある。

## 研究の動機 (3)

問題になるのは  $f$  についての「 $C^1$ 」という仮定である。 $(f^k)$  が  $C^1$  関数の列であるとして、 $f$  に広義  $C^1$  収束しているとすれば、 $f$  は自動的に  $C^1$  である。さらにその場合、 $f^k$  のスルツキー行列も  $f$  のスルツキー行列に広義一様収束するので、半負値定符号性や対称性などは保たれ、よって  $f^k$  さえ需要関数であれば、 $f$  もたしかに需要関数である。しかし収束の条件を緩めた結果、どちらも言えなくなっている。 $f$  は  $C^1$  ではないかもしれないし、たとえ  $C^1$  だったとしても、スルツキー行列が収束するわけではないので、需要関数ではないかもしれない。

このあたりを解決するために、一度需要関数から  $C^1$  という仮定を根本的に取ってみようというのが今回の研究である。

# 需要候補 (Candidate of Demand)

消費集合は常に  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  とする。

$f: \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \Omega$  は、予算不等式  $p \cdot f(p, m) \leq m$  が常に満たされるとき、**需要候補** (Candidate of Demand) と呼ぶことにする。予算不等式が常に等号で成り立つ場合、 $f$  は**ワルラス法則**を満たすと言う。一方、 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  上で定義された一般の関数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $(p, m)$  で微分可能であるとき、

$$S_f(p, m) = D_p f(p, m) + D_m f(p, m) f^T(p, m)$$

という形で**スルツキー行列**を定義しておく。

また、 $R(f)$  という記号で  $f$  の値域を定義しておく。

# 需要関数

$\Omega$  上のある弱順序  $\succsim$  に対して、

$$f^{\succsim}(p, m) = \{x \in \Omega \mid p \cdot x \leq m \text{ and } \forall y \in \Omega, p \cdot y \leq m \Rightarrow x \succsim y\}$$

と定義する。もしある実数値関数  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$$

となるときには、 $f^{\succsim}$  を  $f^u$  とも書く。需要候補である  $f$  は、 $f = f^{\succsim}$  となるとき、 $\succsim$  に対応する**需要関数**と呼ぶ。 $f = f^u$  のときは「 $u$  に対応する」という言い方も用いる。また、単に「 $f$  は需要関数である」と言った場合、それは  $f = f^{\succsim}$  となる弱順序が存在するという意味である。

# 局所リプシッツ関数

$U \subset \mathbb{R}^N$  上で定義された関数  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^M$  が局所リプシッツであるとは、任意のコンパクト集合  $C \subset U$  に対して数  $L > 0$  が存在して、 $x_1, x_2 \in C$  であれば必ず

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

となることを言う<sup>1</sup>。

$U$  が開集合だとすると、連続微分可能な関数は、有限増分の公式から必ず局所リプシッツであることが示せる。逆に開集合上で定義された関数が局所リプシッツであれば、それはほとんどすべての点で全微分可能であることが知られている。(ラーデマッハーの定理) したがって需要候補が局所リプシッツならば、スルツキー行列はほとんどすべての点で定義される。

---

<sup>1</sup> $U$  全体でこの不等式を満たす数  $L > 0$  が存在するときには、単にリプシッツと呼ばれる。また、数  $L$  はリプシッツ定数と呼ばれる。



# 第一の結果 (1)

まず第一の結果を述べよう。この結果がその後のすべての結果の基盤になる。

## 定理 1

$f$  は局所リプシッツでワルラス法則を満たす需要候補とし、そのスルツキー行列はほとんどすべての点で対称かつ半負値定符号とする。いま、 $\bar{p} \gg 0$  をひとつ固定し、以下のように関数  $u_{f, \bar{p}}$  を定義する。まず、 $x \notin R(f)$  のときには、 $u_{f, \bar{p}}(x) = 0$  とする。一方、 $x = f(p, m)$  となる  $(p, m)$  がひとつでも存在するときには、常微分方程式

$$\dot{c}(t) = f((1-t)p + t\bar{p}, c(t)) \cdot (\bar{p} - p), \quad c(0) = m \quad (1)$$

を解いて  $u_{f, \bar{p}}(x) = c(1)$  とする。このとき、以下が成り立つ。  
(続く)

# 第一の結果 (2)

## 定理 1 (続き)

1.  $c(1)$  は  $x = f(p, m)$  であるような  $(p, m)$  の取り方に依らず一意的に定まり、よって  $u_{f, \bar{p}}$  は well-defined である。
2.  $f = f^{u_{f, \bar{p}}}$  が成り立つ。
3.  $u_{f, \bar{p}}$  は  $R(f)$  上で上半連続である。
4. もし  $f = f^{\tilde{\cdot}}$  で、かつ  $\tilde{\cdot}$  は  $R(f)$  上で上半連続な弱順序であるとするれば、任意の  $x, y \in R(f)$  に対して以下が成り立つ：

$$u_{f, \bar{p}}(x) \geq u_{f, \bar{p}}(y) \Leftrightarrow x \tilde{\succ} y.$$

# 第一の結果の系 (1)

この系として、以下のようなものが示せる。

## 系 1

$f$  はワルラス法則を満たす局所リプシッツな需要候補とする。このとき、以下の4条件は同値である。

- ▶  $f$  はなんらかの弱順序に対応する需要関数である。
- ▶  $f = f^{u_{f,\bar{p}}}$  である。ただし  $u_{f,\bar{p}}$  は定理1で定義されている。
- ▶  $f$  のスルツキー行列はほとんどすべての点で半負値定符号かつ対称である。
- ▶ どんな  $(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^n \times \mathbb{R}_{++}$  に対しても、次の偏微分方程式は  $\mathbb{R}_{++}^n$  上で定義された  $C^1$  級の凹解を持つ。

$$DE(q) = f(q, E(q)), \quad E(p) = m.$$

# 第一の結果の系 (2)

この系1の4番目の条件は、偏微分方程式の解の存在と、それが凹であるという主張に分解できるが、どこにも強い不等号が出てこない。一般に需要候補が需要関数であることの特徴付けは顕示選好の強公理で行われるが、強公理には主張の最後に強い不等号が入っていて、極限操作で壊れる可能性を排除できない。それに対して系2の4番目の性質は、極限操作で壊れる性質がなにも入っていないという、極めて都合のいい特徴を有している。

# 需要関数の空間の性質 (1)

系1の4番目の条件を用いることで、我々は容易に次の結果を導出することができる。

## 定理2

$(f^k)$  はワルラス法則を満たす局所リプシッツな需要関数の列で、需要候補  $f$  に広義一様収束しているとする。もし  $f$  も局所リプシッツであるならば、 $f$  は需要関数である。

このように、極限操作で壊れないという微分方程式の解の存在条件を用いることで、我々は需要関数の空間の性質を引き出すことができる。

## 需要関数の空間の性質 (2)

いま、 $L = (L_\nu)$  を正の数列とし、 $\Delta_\nu = [\nu^{-1}, \nu]^{n+1}$  上で  $L_\nu$  をリプシッツ定数として持つ需要関数  $f$  全体からなる空間を  $\mathcal{F}_L$  と書く。この空間上で広義一様収束に対応する距離  $\rho$  を

$$\rho(f, f') = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \arctan \left( \sup_{(p,m) \in \Delta_\nu} \|f(p, m) - f'(p, m)\| \right).$$

このとき定理 2 から、ただちに次の結果を得る。

### 系 2

$\mathcal{F}_L$  は距離  $\rho$  の下で完備距離空間になる。

# C公理

少し寄り道として、 $u_{f,\bar{p}}$ の性質について議論しておこう。以下では  $R(f)$  は  $\mathbb{R}_{++}^n$  を含むとする。このとき、 $f$  の逆需要対応  $G^f : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_{++}^n$  を

$$G^f(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}_{++}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, f(p, p \cdot x) = x \right\}$$

で定義する。 $f$  が **C公理** を満たすとは、 $G^f$  がコンパクト凸値な優半連続対応であることを言う。すると次が成り立つ。

## 補題 1

$u_{f,\bar{p}}$  が  $\mathbb{R}_{++}^n$  上で連続であることと、 $f$  が C公理を満たすことは同値である。

# 計算結果の連続性 (1)

これを利用して、次の定理を導くことができる。

## 定理 3

$(f^k)$  はワルラス法則を満たし局所リプシッツな需要関数の列で、すべての  $k$  について  $R(f^k)$  は  $\mathbb{R}_{++}^n$  を含み、 $f^k$  はC公理を満たすとすする。また  $(f^k)$  は距離  $\rho$  について  $f$  に収束し、 $f$  も局所リプシッツな需要関数で、 $R(f)$  が  $\mathbb{R}_{++}^n$  を含み、 $f$  はC公理を満たすとすする。このとき  $u_{f^k, \bar{p}}$  は  $u_{f, \bar{p}}$  に  $\mathbb{R}_{++}^n$  上で広義一様収束する。



## 計算結果の連続性 (2)

今度は  $M = (M_\nu)$  を正の数列であるとし、任意の  $x \in ]\nu^{-1}, \nu[$  に対して  $p \in G(x)$  ならばすべての座標  $i$  に対して  $p_i \geq M_\nu$  となっているような  $\mathcal{F}_L$  の元の全体を  $\mathcal{F}_{L,M}$  と書くことにする。すると次が成り立つ。

### 系 3

$\mathcal{F}_{L,M}$  は距離  $\rho$  の下に完備であり、さらにこの空間上の点列  $(f^k)$  が  $f$  に収束するならば  $u_{f^k, \bar{p}}$  は  $u_{f, \bar{p}}$  に  $\mathbb{R}_{++}^n$  上で広義一様収束する。

## 二つの問題 (1)

定理 2、定理 3 に関連して、いくつか疑問が湧く。まず、 $(f^k)$  は  $\mathcal{F}_L$  の点列で  $f$  に収束するとし、 $R(f^k)$  は  $\mathbb{R}_{++}^n$  を含むとする。このとき、 $R(f)$  も同じ条件を満たすだろうか？ これは残念ながら、 $f^k$  を CES 型需要関数として簡単な反例がある。つまり、条件がないと極限  $f$  における値域が十分に広くなるとは限らない。値域が広がらないと効用関数をちゃんと計算できる範囲が狭くなるため、これは大きな問題である。この問題を解決する方法は考えなければならない。いまのところ、 $\mathcal{F}_{L,M}$  ではこの問題は起こらないことしかわかっていない。

## 二つの問題 (2)

第二に、 $R(f)$  は通常  $\mathbb{R}_+^n$  全体にならない。定理 1 の  $u_{f,\bar{p}}$  の作り方だこの場合  $R(f)$  に含まれていない点ではどうしても正しい効用の値が逆算できない。

幸い、 $u_{f,\bar{p}}$  の定義を少しだけ修正することによって、もし  $R(f)$  が  $\mathbb{R}_{++}^n$  を含む  $\mathbb{R}_+^n$  の開集合であれば、 $u_{f,\bar{p}}$  は  $\mathbb{R}_+^n$  上で上半連続であることを示すことができる。問題は  $u_{f,\bar{p}}$  の連続性であるが、これは残念ながらどう修正しても上半連続にならない例があることがわかっている。C 公理を仮定してもこの問題は解決しない。(Hosoya (2020) の例)

## 二つの問題 (3)

この問題に関連して、定理3の仮定を満たす  $(f^k)$  と  $f$  で、前のスライドのように修正した  $u_{f^k, \bar{p}}$  と  $u_{f, \bar{p}}$  の間に乖離が出る例が見ついている。つまり、 $\mathbb{R}_{++}^n$  上では  $u_{f^k, \bar{p}}$  は  $u_{f, \bar{p}}$  に広義一様収束するのだが、 $\mathbb{R}_+^n$  には含まれつつも  $\mathbb{R}_{++}^n$  には含まれないある  $x$  において、 $u_{f^k, \bar{p}}(x)$  が  $u_{f, \bar{p}}(x)$  に収束しない例が見ついている。この点にどう対処するかも未解決問題である。

# 残された問題 (1)

積分可能性理論には直接法と間接法があって、今回の研究は直接法の研究である。間接法は、 $f(g(x), g(x) \cdot x) = x$  が常に成り立つ関数  $g$  (逆需要関数と呼ばれる) を扱い、ラグランジュの一階条件

$$Du(x) = \lambda(x)g(x)$$

を常に満たす関数  $(u, \lambda)$  の存在を問題とする。これについて、 $g$  が連続微分可能なときには、フロベニウスの定理と呼ばれる有名な存在定理がある。ところが実はこれは定理 2 と非常に関係が深いことがわかっている。

## 残された問題 (2)

### 定理 (フロベニウスの定理)

$U$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合で、 $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  は  $C^1$  とする。このとき、任意の  $x^* \in U$  に対して、以下の全微分方程式

$$Du(x) = \lambda(x)g(x)$$

の  $x^*$  の近傍上での解  $(u, \lambda)$  (ただし  $u$  は  $C^1$  で  $\lambda$  は連続かつ至る所で正值) が存在するための必要十分条件は、以下のヤコービの積分可能性条件

$$g_i \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right) + g_j \left( \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right) + g_k \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

がすべての  $i, j, k$  について成り立つことである。

## 残された問題 (3)

ここで、 $f$ が定理2の条件に加えて連続微分可能性を満たしていた場合、定理2の結論は、

$$g(p, m) = (f(p, m), -1)$$

にフロベニウスの定理の結論を適用するだけで簡単に示せてしまおう (この  $g$  について、ヤコービの積分可能性条件は  $S_f$  の対称性と同値であることが計算ですぐわかる)。

逆に定理2を前提にすれば、一般性を失うことなく  $g_n(x^*) \neq 0$  とし、

$$f_i(x) = -\frac{g_i(x)}{g_n(x)}$$

と定義してやるとこれのスルツキー行列の対称性とヤコービの積分可能性条件が同値で、ここから  $u$  の無差別超曲面を計算してやることができ、多少の操作を経てフロベニウスの定理を出せる。つまり定理2とフロベニウスの定理は陰関数定理と逆関数定理のような関係にある。

## 残された問題 (4)

実際のところ、定理 2 は局所リップシツツしか仮定していないので、古典的なフロベニウスの定理よりも仮定が弱い。これを使って、フロベニウスの定理は  $g$  が局所リップシツツな場合に拡張できる。そして、逆需要関数から効用関数を逆算する間接法の積分可能性理論は Hosoya (2013) で研究されているので、そのやり方を援用することで、新しい結果が作れるかもしれない。逆需要関数については需要関数と違って、逆需要関数の広義一様収束から効用関数の広義一様収束を示す簡単な方法があるので、有力なライバルたり得る。これが現在考えている問題である。



Thank you for your attention.