On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies

細矢祐誉

中央大学

November 6, 2022

研究の背景：部分均衡 (1)

以下の部分均衡の図を見てみよう。

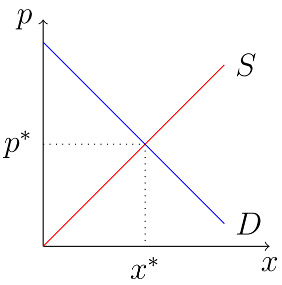

Figure: 部分均衡

青い線 D が需要曲線、赤い線 S が供給曲線である。交点 (p^*, x^*) は均衡と呼ばれる。この図では D が右下がりで S が右上がりなので、均衡はひとつしか存在しない。

研究の背景：部分均衡 (2)

次に、均衡価格 p^* より高い p' を取る。

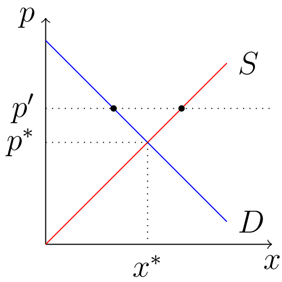

Figure: 超過供給

このとき、高さ p' において需要曲線より供給曲線の方が右側にある。この状況を超過供給と言う。この場合には市場は売れ残りが続出し、結果として値下げを誘発するため、価格は下がると予想される。

研究の背景：部分均衡 (3)

今度は均衡価格 p^* より低い価格 p' を取る。

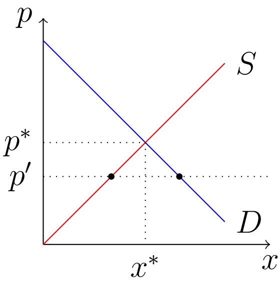

Figure: 超過需要

今度は p' の高さでは供給曲線よりも需要曲線の方が右側にあり、この状況は超過需要と呼ばれる。売り切れが続出している状態なので、価格は上がると予想される。

研究の背景：部分均衡 (4)

まとめると、この D が右下がりで S が右上がりの状況では、均衡はただひとつしかないし、そこから外れた価格が実現するとそれは均衡の方へ「引き寄せられる」状況（この状況を「安定的」と言う）にある。つまり、部分均衡の典型的な図では、均衡は唯一かつ安定的なのである。

研究の背景：部分均衡 (5)

部分均衡分析には、背景となる一般均衡理論のモデルが存在する。そのモデルでは財の種類はふたつ、効用関数は準線形（つまり、$U(x,y)=u(x)+y$ の形状）で、生産者はニュメレール財を消費して取引される財を生産する。このモデルにおいては最適化の二階条件から自然と、D が右下がりで S が右上がりになる。
したがって、部分均衡の結果は二財準線形の一般均衡のモデルにそのまま拡大できる。つまり、二財ですべての消費者の効用関数が準線形な経済においては、均衡価格は（なんらかの正規化の下に）一意で、しかも模索過程について大域安定である。

研究の背景：均衡の一意性(1)

したがって「二財の」「準線形経済」においては、均衡価格は一意的でかつ安定的という結果が出せる。一方で一般の均衡理論ではどのようになっているかを見てみると、実は「準線形経済」の仮定を取り除いた時点で、二財であろうとそうでなかろうと、均衡の一意性は導出が非常に難しい結果であることが知られている。まず、均衡理論でよく使われる「普通の」仮定からは、均衡の個数についてはなにも言えない。これはソンネンシャイン＝マンテル＝ドブリューの定理とウリゾーンの補題を使うと、基本単体上の任意のコンパクト集合に対して、それを均衡価格の集合として含むような「普通の」経済が構築できるためである。したがって均衡価格の個数は一個かもしれないし、一億個かもしれないし、無限個かもしれない。

研究の背景：均衡の一意性 (2)

ソンネンシャイン＝マンテル＝ドブリューの定理で経済に仮定されるのは「人数が財の数より多いこと」という仮定を除けば、「すべての消費者が連続、増加的かつ狭義準凹な効用関数を持つこと」という極めて普通の仮定しか置かれていない。したがって、なにか追加の仮定を経済に置けば、均衡の一意性を回復できる望みは依然として残っている。

しかし文脈上、均衡の一意性命題について知られている仮定は、そのほとんどが「超過需要関数に対する仮定」である。たとえば粗代替性や顕示選好の弱公理等が挙げられるが、これは経済のプリミティブな要素になにを仮定しているかがわからないという問題を持つ。Debreu (1972) はこのような仮定は受け入れられないとはっきり述べている。しかもこれらのうちいくつかは、生産を導入するともはや一意性の結果たり得ないことが指摘されている (Mas-Colell, 1991)。

研究の背景：均衡の一意性(3)

さらに、初等的な数値例で、均衡価格が複数存在する例がよく知られている。たとえば MWG (1995) の１５章の練習問題には、二人二財の純粋交換経済で、効用関数が両方ともＣＥＳ型であるにもかかわらず、均衡価格が正規化の下３つに分かれる例が存在している。したがって、均衡価格の一意性を保障するための条件は、上記の例を排除する程度には強いものでなければならない。
まとめると、準線形経済という仮定を除くと、二財モデルですら均衡の一意性を導出するのはまず不可能であるというのが現状である。では、「準線形経済」という仮定を残したまま、「二財」という仮定をなくしたらどうなるだろうか？

本研究の結果

本研究では L 財準線形経済を扱う。我々の出した結果は以下のふたつである。第一に、均衡価格は正規化の下一意に定まる。第二に、均衡価格は模索過程について局所安定である。

補足

なお、準線形経済の特徴を出すためには、ニュメレール財の需要が端点に来るような解は避けなければならない。このため、我々は本稿において常に、以下のどちらかの仮定を置く。第一の仮定は、ニュメレール財については負の消費が可能である、というもの。第二の仮定は、ニュメレール財の負の消費は許さないが、代わりに消費者全員が十分に多くのニュメレール財を初期保有として所有している、というもの。第一の仮定を満たす経済を第一タイプの準線形経済、第二の仮定を満たす経済を第二タイプの準線形経済と呼ぶことにする。

経済 (1)

本研究において**経済**とは、以下の七つ組
$E = (N, M, (\Omega_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}, (\omega^i)_{i\in N}, (Y_j)_{j\in M}, (\theta_{ij})_{i\in N, j\in M})$ で表される。ただし、これらの記号は以下の意味を持つ。

(1) $N = \{1, ..., n\}$ は消費者の集合、$M = \{1, ..., \mu\}$ は生産者の集合である。特別な場合として、$M = \emptyset$ は許容される。その場合この経済は**純粋交換経済**と呼ばれる。
(2) $\Omega_i \subset \mathbb{R}^L$ は i 番目の消費者の実行可能な消費計画全体の集合であり、$U_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ は i 番目の消費者の効用関数である。
(3) Y_j は j 番目の生産者の生産集合であり、θ_{ij} は i 番目の消費者の j 番目の生産者に対する保有比率である。$\theta_{ij} \geq 0$ と $\sum_{i\in N} \theta_{ij} = 1$ は常に仮定する。
(4) $\omega^i \in \Omega_i$ は i 番目の消費者の初期保有である。

経済 (2)

以下の問題は**効用最大化問題**と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \max \quad & U_i(x), \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega_i, \\ & p \cdot x \le m, \end{aligned} \tag{1}$$

ただし $p \gg 0$ かつ $m > 0$ である。解の集合は $f^i(p, m)$ と書かれ、この集合値関数 f^i は**需要関数**と呼ばれる。ただし、後に我々は需要関数が一価になるような仮定を置く。

経済(3)

以下の問題は**利潤最大化問題**と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \max \quad & p \cdot y, \\ \text{subject to.} \quad & y \in Y_j. \end{aligned} \tag{2}$$

ただし $p \gg 0$ である。解の集合は $y^j(p)$ と書かれ、その値は $\pi^j(p)$ と書かれる。$\pi^j(p)$ は**利潤関数**と、$y^j(p)$ は**供給関数**と呼ばれる。

経済 (4)

所得決定関数 $m^i(p)$ を次のように定義する。

$$m^i(p) = p \cdot \omega^i + \sum_{j \in M} \theta_{ij} \pi^j(p).$$

そして、消費者 i の**超過需要関数** X^i を以下で定義する。

$$X^i(p) = f^i(p, m^i(p)) - \omega^i,$$

消費者サイドの**超過需要関数** X はこの足し合わせである。つまり、

$$X(p) = \sum_{i \in N} X^i(p).$$

後に我々は、この消費者サイドの超過需要関数が連続微分可能になるための条件を課す。

経済 (5)

経済全体の**超過需要関数**は以下で定義される集合値関数 ζ である。

$$\zeta(p) = X(p) - \sum_{j \in M} y^j(p).$$

p^* が**均衡価格**であるとは、$0 \in \zeta(p^*)$ が成り立つことを指す。
ζ は正 0 次同次性

$$\zeta(ap) = \zeta(p) \text{ for all } a > 0,$$

を満たすので、p^* が均衡価格ならば $a > 0$ に対して ap^* も均衡価格である。したがって、正規化を行わない限り均衡価格の一意性は論じられないという点に注意。

経済 (6)

以下の微分包含式を**模索過程**と呼ぶ。

$$\dot{p}(t) \in \zeta(p(t)),\ p(0) = p_0.$$

均衡価格 p^* が**局所安定**であるとは、ある近傍 U が存在して、もし $p_0 \in U$ ならば上の微分包含式には $\mathbb{R}_+$ 上で定義された解が存在し、またそのような解はすべて p^* の定数倍に収束する、という性質が成り立つことを言う。
もし f^i や y^j が普通の一価で連続な関数であれば、ζ もそうであり、したがって上の微分包含式はただの微分方程式になる。つまり、以下のようになる。

$$\dot{p}(t) = \zeta(p(t)),\ p(0) = p_0. \tag{3}$$

準線形経済 (1)

今回の発表を通じて、$x \in \mathbb{R}^L$ に対して $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{L-1}) \in \mathbb{R}^{L-1}$ という記法を用いる。
以下の仮定は第一の準線形経済における効用関数の仮定である。

仮定 F

すべての $i \in N$ に対して $\Omega_i = \mathbb{R}^{L-1}_+ \times \mathbb{R}$ であり、

$$U_i(x) = u_i(\tilde{x}) + x_L \tag{4}$$

が成り立つ。さらに、u_i は $\mathbb{R}^{L-1}_+$ 上で凹、非減少、連続であり、$\mathbb{R}^{L-1}_{++}$ 上では二階連続微分可能で非退化、さらにヘッセ行列はどこでも負値定符号である。

準線形経済 (2)

第二の準線形経済では、少し だけ違った仮定を置く。

仮定 S 1

すべての $i \in N$ に対して $\Omega_i = \mathbb{R}^L_+$ であり、U_i は仮定 F と同じ仮定を満たす。

準線形経済 (3)

第二の準線形経済では初期保有について追加の仮定が必要である。

仮定 S 2

$\hat{\omega}^i = (\omega_1^i, ..., \omega_{L-1}^i, 0)$ と定義し、これを初期保有とし、Ω_i を $\mathbb{R}_+^{L-1} \times \mathbb{R}$ に変更したときの達成可能配分の集合を $\bar{A}_{\hat{\omega}}$ としたとき、

$$\alpha_i = \sup\{u_i(\tilde{x}^i) - u_i(\tilde{\omega}^i) | (x, y) \in \bar{A}_{\hat{\omega}}, \\ U_j(x^j) \geq U_j(\hat{\omega}^j) \text{ for all } j \in N \setminus \{i\}\},$$

と定義すると、$\omega_L^i > \alpha_i$ がすべての $i \in N$ に対して成り立つ。

準線形経済 (4)

さらに消費者にはふたつの仮定が必要である。

仮定Q

すべての $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ と $m > 0$ に対して、以下の問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i(\tilde{x}) \\ \text{subject to.} \quad & \tilde{x} \in \mathbb{R}^{L-1}_{+}, \\ & \tilde{p} \cdot \tilde{x} \le m \end{aligned} \tag{5}$$

は内点解 $\tilde{x}^* \gg 0$ を持つ。また、方程式 $Du_i(\tilde{x}) = \tilde{p}$ も内点解 $\tilde{x}^+ \gg 0$ を持つ。もし $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{L-1}_{+}$ かつ $u_i(\tilde{x}) > u_i(0)$ ならば、u_i は $\tilde{x} + \mathbb{R}^{L-1}_{+}$ 上で強単調である。

$u_i(x) = (x_1x_2)^{1/3}$ も $u_i(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ もこの条件を満たすことに注意。

準線形経済 (5)

仮定U

すべての $i \in N$ に対して、$\omega^i \geq 0$ かつ $\omega^i \neq 0$ である。さらに、$\sum_i \omega^i \gg 0$ である。

準線形経済 (6)

最後に生産についての仮定であるが、こちらは規模に関する収穫逓減型で議論する。

仮定 P

すべての $j \in M$ に対して、$Y_j \cap \mathbb{R}^L_+ = \{0\}$ であり、また Y_j は閉凸で $-\mathbb{R}^L_+$ を含み、$y^1, y^2 \in Y_j \setminus (-\mathbb{R}^L_+)$ かつ $y^1 \neq y^2$ で $0 < t < 1$ ならば $(1-t)y^1 + ty^2$ は Y_j の内部に含まれる。さらに $Y = \sum_{j \in M} Y_j$ について $Y \cap (-Y) = \{0\}$ が成り立つ。最後に、ある $p^+ \in \mathbb{R}^L_{++}$ が存在して、すべての $j \in M$ について $y^j(p^+)$ は非空となる。

（なお、p^+ の存在は他の仮定から導出できる疑惑があるため、将来的にはなくなる可能性あり）

準線形経済 (7)

定義

- 経済 E は、仮定Ｆ、Ｑ、Ｕ、Ｐを満たすとき、**第一タイプの準線形経済**と呼ばれる。
- 経済 E は、仮定Ｓ１、Ｓ２、Ｑ、Ｕ、Ｐを満たすとき、**第二タイプの準線形経済**と呼ばれる。
- 経済 E が第一タイプか第二タイプいずれかの準線形経済であるとき、それは**準線形経済**と呼ばれる。

主結果

定理 1

E は準線形経済であるとする。このとき、均衡価格は少なくともひとつ存在する。また p^* が均衡価格であれば、以下が成り立つ。

(1) すべての均衡価格は p^* の定数倍である。

(2) p^* は局所安定である。

よって、二財準線形経済から導出した部分均衡で成り立っていた結果は、L 財準線形経済でも同様に成り立つことがわかった。

証明の概略

以下、第一タイプの準線形経済における定理１の証明を概観していく。第一タイプに絞る理由は、第二タイプについては仮定Ｓ２から任意の均衡配分においてすべての消費者のニュメレール財の消費が０にならないことが証明できるため、実質的に第一タイプの問題に帰着できるからである。

均衡の存在

消費集合が下に有界でないという問題があるため、第一タイプの準線形経済では達成可能配分の集合がコンパクトになるかどうかがわからない。そこで、達成可能配分のうち、「初期保有以上の効用をすべての消費者に与える」配分の集合を B_ω と書く。この集合がコンパクトであることは証明できる。そして、すべての均衡配分は必ずこの集合に含まれる。そこで、S を十分大きく取って、

$$\Omega_i^S = \mathbb{R}_+^{L-1} \times [-S, +\infty[,$$

$$Y_j^S = Y_j \cap \{y \in \mathbb{R}^L | \|y\| \le S\}$$

と消費集合、生産集合を替えた経済を E_S と置くと、E_S の均衡の集合と E の均衡の集合は一致し、また両者の超過需要関数は均衡価格の近くで同一になる。そして E_S の均衡価格の集合が非空であることは容易に示せる。

均衡の一意性

以下、経済 E_S を考え、均衡の一意性を示すためのアイデアを説明していく。説明は何段階かに分かれている。

- 第一段階では純粋交換経済を考える。この場合のアイデアが基礎となる。
- 第二段階では生産を入れるが、供給関数が連続微分可能だという仮定を置いて議論する。
- 第三段階では供給関数が連続微分可能だという仮定を外すが、ただし正規化された均衡価格の集合が離散集合になることを仮定する。
- 第四段階では第三段階で仮定したことを証明する。

均衡の一意性：第一段階 (1)

第一段階、つまり純粋交換経済を考える。主結果のために最も重要なのは、需要関数の微分である。まず、ラグランジュの未定乗数法の条件から、

$$\lambda = p_L^{-1},\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = \frac{p_j}{p_L}$$

を得る。右側の条件には m が入ってこないので、$j \neq L$ のとき $f_j^i(p,m)$ は m から独立になる。これを利用して計算すると、スルツキー行列の (j,k)-成分 s_{jk}^i を用いて

$$\frac{\partial X_j^i}{\partial p_k}(p) = \begin{cases} s_{jk}^i(p, m^i(p)) & \text{if } j \neq L, \\ s_{jk}^i(p, m^i(p)) - p_L^{-1} X_k^i(p) & \text{if } j = L, \end{cases}$$

を得ることができる。

均衡の一意性：第一段階 (2)

均衡では $\sum_i X^i(p^*) = 0$ なので、次の命題が容易に得られる。

命題

E が準線形経済で、X がその消費者サイドの超過需要関数とする。このとき、任意の均衡点 p^* のまわりで X は連続微分可能であり、さらに

$$DX(p^*) = \sum_{i=1}^{n} S_{f^i}(p^*, m^i(p^*)) \tag{6}$$

が成り立つ。ただし S_{f^i} は消費者 i の需要関数 f^i のスルツキー行列である。

なお、純粋交換経済では $X = \zeta$ であることに注意。

均衡の一意性：第一段階 (3)

ここで次の結果を用いる。$\bar{S}=\{p\in\mathbb{R}^L_{++}|\|p\|=1\}$ とする。

補題

関数 $f:\mathbb{R}^L_{++}\to\mathbb{R}^L$ は以下の 5 条件を満たすとする。

1) f はワルラス法則と正 0 次同次性を満たす連続関数である。
2) f は下から有界である。
3) (p^k) が $\bar{S}$ 上の点列で $k\to\infty$ のときに $p^k\to p\neq 0$ となるとし、ただし $J=\{j|p_j=0\}$ は非空であるとすると、$k\to\infty$ のとき $\|f(p^k)\|\to\infty$ が成り立つ。
4) もし $f(p^*)=0$ であるならば f は p^* の近くで連続微分可能である。
5) もし $f(p^*)=0$ であるならば、
$$\begin{vmatrix} Df(p^*) & p^* \\ (p^*)^T & 0 \end{vmatrix}\neq 0$$
が成り立つ。

（続く）

均衡の一意性：第一段階 (4)

補題（続き）

このとき、任意の $p^* \in \bar{S} \cap f^{-1}(0)$ に対して、

$$g(p^*) = \begin{vmatrix} Df(p^*) & p^* \\ (p^*)^T & 0 \end{vmatrix}$$

とし、

$$\text{index}(p^*) = \begin{cases} +1 & \text{if } (-1)^L g(p^*) > 0, \\ -1 & \text{if } (-1)^L g(p^*) < 0 \end{cases}$$

と定義すると、$\bar{S} \cap f^{-1}(0)$ は有限で、

$$\sum_{p^* \in \bar{S} \cap f^{-1}(0)} \text{index}(p^*) = +1$$

が成り立つ。

証明は Mas-Colell (1985) の命題 5.6.1 を参照。

均衡の一意性：第一段階 (5)

この補題を経済 E_S の超過需要関数 ζ に適用する。条件 1)-4) が成り立っていることは簡単に示せる。スルツキー行列の価格に直交する平面への負値定符号性から、経済 E_S においてはすべての均衡価格で index$(p^*) = +1$ が成り立っていることが示せる。したがって上の補題の条件 5) が成り立ち、$\bar{S}$ に正規化した均衡価格の集合は有限で、index の合計は+1 であるが、すべて+1 で合計も+1 なので、$\bar{S}$ 上には均衡価格はひとつしかない。このようにして一意性の証明が完成した。

均衡の一意性：第二段階 (1)

第二段階では生産が入るが、このとき重要なのは以下の結果である。

拡張されたホテリングの補題

仮定 P の下で経済 E^S における生産者 j の利潤関数 π^j は微分可能であり、その微分の値は供給関数 $y^j(p)$ の転置に等しい。

この補題を利用することで、我々は次の関係

$$\frac{\partial m^i(p)}{\partial p_k} = \omega_k^i + \sum_j \theta_{ij} y_k^j(p)$$

を得ることができる。

均衡の一意性：第二段階 (2)

上記結果を用いて、純粋交換経済のときと同様にラグランジュ未定乗数法を用いて需要関数を評価すると、以下の評価式に行き着く。

$$\frac{\partial X_j^i}{\partial p_k}(p) = \begin{cases} s_{jk}^i(p, m^i(p)) & \text{if } j \neq L, \\ s_{jk}^i(p, m^i(p)) - p_L^{-1}[X_k^i(p) - \sum_\ell \theta_{i\ell} y_k^\ell(p)] & \text{if } j = L. \end{cases}$$

やはり均衡では $\zeta(p^*) = X(p^*) - \sum_j y^j(p^*) = 0$ となるので、上の評価式を用いることで、純粋交換経済で示した「命題」を、今回の場合にも証明することができる。

均衡の一意性：第二段階 (3)

第二段階では供給関数 $y^j(p)$ はすべて微分可能であると仮定されているので、ホテリングの補題から

$$D\zeta(p^*) = DX(p^*) - \sum_{j \in M} D^2\pi^j(p^*)$$

となる。そして、一般に利潤関数は凸関数なので、$D^2\pi^j(p^*)$ は半正値定符号である。これは負値定符号な関数から半正値定符号な関数を引き算しているため、負値定符号である。ここから補題に帰着して均衡の一意性が示せる。

均衡の一意性：第三段階 (1)

第三段階では、軟化子を用いた利潤関数の近似を行う。軟化子とは以下のようなものである。

$$\varphi(p) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-\|p\|^2}} & \text{if } \|p\| < 1, \\ 0 & \text{if } \|p\| \ge 1, \end{cases}$$

$$\varphi_\delta(p) = \delta^L \varphi(p/\delta).$$

これを用いて、

$$\pi_\delta^j(p) = \int_{\mathbb{R}^L} \pi^j(p-q)\varphi_\delta(q)dq,$$

という形で利潤関数を均衡価格の近くで近似する。π^j は凸なので π_δ^j も凸であるが、一方で π_δ^j は何回でも微分可能である。

均衡の一意性：第三段階 (2)

以降、すべての価格はノルムを 1 に正規化されているとして考える。第三段階では正規化された均衡価格の集合 E^* が離散集合であることが仮定されているが、一方で均衡価格の集合は一般にコンパクトである。コンパクトな離散集合は有限集合しか存在しないため、$\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば、どの均衡価格のどの座標も 4ε 以上であり、また異なる二つの均衡価格同士の距離も 4ε 以上は離れているようにできる。そこで、$\hat{S}$ をなんらかの均衡価格 p^* からの距離が 2ε 以下である価格の集合とし、また $\hat{S}^*$ はなんらかの均衡価格 p^* からの距離が ε 以上 2ε 以下である価格の集合とする。このふたつの集合は定義から当然コンパクトであるため、π^j_δ は $\delta \downarrow 0$ のときに π^j にこれらの集合上で C^1 収束する。

均衡の一意性：第三段階 (3)

そこで均衡価格の集合 E^* の元 p^* に対して

$$t_{p^*}(p) = \min\{1, \max\{0, 2 - \varepsilon^{-1}\|p - p^*\|\}\}$$

とする。この関数は p^* からの距離が ε 以下なら 1 で、2ε 以上ならば 0 になるような連続な $[0,1]$ への関数である。これを用いて、

$$\begin{aligned} y_\delta^j(p) = & \left(1 - \sum_{p^* \in E^*} t_{p^*}(p)\right) y^j(p) \\ & + \sum_{p^* \in E^*} t_{p^*}(p)[\nabla \pi_\delta^j(p) + y^j(p^*) - \nabla \pi_\delta^j(p^*)] \end{aligned}$$

と定義する。

均衡の一意性：第三段階 (4)

$y^j_\delta(p)$ は、p^* からの距離が ε を下回っていると何回でも微分可能で、さらに $y^j_\delta(p^*) = y^j(p^*)$ となるように作られている。また、すべての均衡価格から 2ε 以上離れていれば $y^j(p)$ と同じ値である。さらにこれを用いて、

$$m^i_\delta(p) = p \cdot \omega^i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y^j_\delta(p),$$

$$\xi(p) = \sum_i [f^i(p, m^i_\delta(p)) - \omega^i] - \sum_j y^j_\delta(p)$$

と定義していく。$\delta > 0$ が十分小さい場合、p がなんらかの $p^* \in E^*$ からの距離が ε 以上 2ε 以下であれば $\xi(p)$ は 0 にならない。以後、δ はそのように取られているとする。

均衡の一意性：第三段階 (5)

この新しい関数 ξ は、以下の条件をすべて満たす。第一に、この関数は補題の条件 1)-3) を満たす。(正確には、この関数はノルムが 1 の正のベクトルの集合上でしか定義されていないため正 0 次同次性を満たしているとは言えないが、満たしているように拡張することは容易である) 第二に、$\xi(p) = 0$ となるのは、$\|p - p^*\| < \varepsilon$ となる均衡価格 p^* がある場合に限られる。第三に、$\|p - p^*\| < \varepsilon$ となる均衡価格 p^* があれば $\xi(p)$ は微分可能であり、特に $\xi(p) = 0$ であれば

$$D\xi(p) = \sum_i S_{f^i}(p, m_\delta^i(p)) - \sum_j D^2\pi_\delta^j(p)$$

が成り立つ。この右辺は p と直交するベクトルの空間上で負値定符号である。そして第四に、p^* が均衡価格であれば $\xi(p^*) = 0$ である。

均衡の一意性：第三段階 (5)

関数 ξ は補題の条件をすべて満たしているため、第二段階とまったく同じ理屈から、この関数 ξ においては $\xi(p) = 0$ となる p はただひとつしか存在しない。一方で $\zeta(p^*) = 0$ となる点、つまり均衡価格では必ず $\xi(p^*) = 0$ が成り立つ。したがって、$\zeta(p^*) = 0$ となる点もひとつしか存在しない。こうして、均衡価格の一意性がこの場合も証明できる。

均衡の一意性：第四段階 (1)

最後に、第四段階を考えなければならない。上の議論では $\varepsilon > 0$ の存在が非常に重要だったが、もし均衡価格の集合が離散集合でないとするとこのような $\varepsilon > 0$ は存在しないかもしれず、ロジックが崩壊する。したがって均衡価格の集合が離散的であることを示さないと証明が完成しない。このために我々は、均衡価格が模索過程 (3) について安定的であることを示す。つまり、(3) の微分方程式において任意の均衡価格が局所漸近安定であることを示す。局所漸近安定な定常状態の集合は必ず離散的になるため、これで証明が完成することになる。

均衡の一意性：第四段階 (2)

実際、(6) 式から、X の方については局所漸近安定性のための条件は容易に導出できる。問題は供給関数 $y^j(p)$ の方で、こちらは微分可能でないため局所的な線形化ができない問題がある。しかしうまく工夫することによってリャプノフ関数を構成することができて、すべての均衡価格が安定的であることが示せる。これらをすべてつなぎ合わせることにより、定理の帰結を得る。

定理の成り立つ理由(1)

一般的に、均衡価格の一意性命題は導出が難しいことが知られている。ほとんどの場合、超過需要関数になんらかの仮定（粗代替性、弱公理など）を仮定して、そこから一意性を導出する。
Mas-Colell (1991) などがそれらをまとめた論文である。これは時代が下って現代になってもさほど状況が変わっておらず、たとえば Giménez (2021) はオファーカーブに条件を課して均衡価格の一意性を導出している。経済のプリミティブな要素に仮定して一意性命題を出した結果はほとんど見られない。
しかし本論文では準線形という比較的強い仮定ながら、経済のプリミティブな要素への仮定だけから均衡価格の一意性を導出している。どうしてこのような結果が導出できたのだろうか？

定理の成り立つ理由 (2)

純粋交換経済について、実はこの結果は「たまたま初期保有が均衡配分だった」ときには、準線形ではない経済においても成り立つことが容易に示せる。これは Kihlstrom et al. (1977) で補題として示され、さらに Balasko (1978) はそれを用いて、「たまたま初期保有が均衡配分だった」場合の均衡価格の局所安定性を導出している。

実際には初期保有は均衡配分ではない場合が普通であり、その場合所得効果の影響によってこの命題は壊れてしまう。ところが、準線形経済では所得効果がニュメレール財にしか現れず、しかも均衡だとその影響も足し合わせると打ち消しあって消えてしまう。したがって、上のような知られていた結果は、準線形経済では「初期保有が均衡配分でなくとも」成り立つのである。これが、本研究で定理が導出できた理由である。

余剰分析 (1)

ところで、本研究では準線形経済を、部分均衡分析の背後にある構造の一般化と捉えている。だが、部分均衡分析の特徴は均衡の一意性と安定性だけではなく、**余剰分析**ができることにも依拠している。果たしてこの特徴は L 財準線形経済にも受け継がれているのだろうか？

余剰分析 (2)

簡単化のために第一タイプの準線形経済を考え、$p_L = q_L = 1$ と正規化して、$\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ とする。ここで次の関数を定義しよう。

$$V_i(\tilde{p}, \tilde{q}) = \int_0^1 \tilde{f}^i(c(t), 1, m) \cdot c'(t)dt.$$

ただし $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^L_{++}$ は $c(0) = \tilde{p}$ と $c(1) = \tilde{q}$ を満たす C^1 級の弧である。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 2

任意の m に対して以下の式が成り立つ。

$$V_i(\tilde{p}, \tilde{q}) = u_i(\tilde{f}^i(q, m)) - u_i(\tilde{f}^i(p, m)).$$

特に、左辺は $c(t)$ の取り方に依存しない。

余剰分析 (3)

ここで、

$$D_\ell(\tilde{p}) = \sum_{i \in N} \tilde{f}^i_\ell(\tilde{p}, 1, 0)$$

と定義する。このとき、我々は以下の系を得ることができる。

系

$\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ とし、$c : [0,1] \to \mathbb{R}^{L-1}_{++}$ は $c(0) = \tilde{p}$ かつ $c(1) = \tilde{q}$ を満たす C^1 級の弧で、$p_L = q_L = 1$ とする。このとき、任意の $m_1, ..., m_n$ に対して、

$$\int_0^1 D(c(t)) \cdot c'(t)dt - [\tilde{q} \cdot D(\tilde{q}) - \tilde{p} \cdot D(\tilde{p})] = \sum_{i \in N} [U_i(f^i(q, m_i)) - U_i(f^i(p, m_i))] \quad (7)$$

が成り立つ。

したがって我々は総需要関数 D から**消費者余剰**を得ることに成功した。

余剰分析 (4)

一方で**生産者余剰**は生産者の利潤関数の合計で簡単に定義できる。これは配当を通じて各消費者へと配られるが、準線形経済においてはその所得の増加額はただちにニュメレール財のみへと当てられるため、効用の増加と一致する。したがって、消費者余剰と生産者余剰の合計である**総余剰**は、この市場における取引によるベンサム和の上昇分と一致することになる。

したがって我々は、準線形経済においては総需要関数と企業の利潤関数という比較的観測しやすいものから、ベンサム和という観測しにくいものを導出することが可能である。以上が、本研究のもうひとつの結果である。

Thank you for your attention.