Non-Smooth Integrability Theory

細矢祐誉

中央大学

November 27, 2023

これまでの研究の話（1）

積分可能性理論は本来、効用関数から導出された需要関数を特徴付ける数学的性質を探る理論の一部であったと思われる。しかし、細矢がこの理論に触れた時代には、その研究動機があいまいになっているように見えた。そこで、細矢が独自に積分可能性理論が現代の経済学でセールスポイントにできる方向性を探った結果、効用関数を微分方程式を通じて具体的に逆算する、という点が興味を惹いた。これは、需要関数から効用関数を逆算する手続きが存在するということである。そこで、効用関数の推定問題への応用があるのではないかと考え、その方向に理論をまとめ直したのが Hosoya (2013, 2015, 2017) であった。

これまでの研究の話（2）

しかし、推定問題への応用を考えると、従来の積分可能性問題では扱われていなかった新しい問題を考える必要がある。いま、需要関数から効用関数への逆算の方法として、$f \mapsto u_f$ という写像が定まったとしよう。需要関数を購買データを用いて推定すれば我々は f の推定値 f' を得ることができる。これを上の写像に入れると、効用関数の推定値 $u_{f'}$ を得ることができる。問題は次のようなものである。f' が十分 f に近いとき、$u_{f'}$ は十分 u_f に近いだろうか？　これが言えない場合、真の効用関数 u_f と推定値 $u_{f'}$ が関係ないものとなってしまって、推定手法には大きな問題が発生することになる。
これは本質的には写像 $f \mapsto u_f$ の連続性の問題である。そして関数の連続性なので、位相の選択問題が重要な問題になってくる。

研究の動機（１）

Hosoya (2017) において、以下の結果が出ている。

定理 4 (Hosoya (2017)) 概略

(f^k) が C^1 級の需要関数の列で、f という C^1 級の需要関数に広義 C^1 収束しているとする。このとき、いくつかの追加条件の下で、対応する効用関数 $u_{f^k,\bar{p}}$ は $u_{f,\bar{p}}$ に広義一様収束する。

この結果はたしかに連続性の結果であるが、定義域の位相が強すぎるのが当初から気になっていた。計量経済学の問題として考えると、f^k はデータが k 個のときの f の推定値である。そして、データの個数が大きくなっていくにつれて f^k が f に広義 C^1 収束するというのは、あまりにも位相が強すぎて、計量経済学の問題に対応する結果がほぼ存在しない。

研究の動機（２）

したがって、前述の定理の位相の条件を緩めたいというのが、当初の考えであった。
幸いにも、f^k が f に広義一様収束し、さらに価格と所得の空間 $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ に含まれる任意のコンパクト集合 C について、f^k のすべてと f に共通のリプシッツ定数 $L_C > 0$ があると仮定すると、うまく作った f^k に対応する「間接効用関数」の列が、f の間接効用関数に広義一様収束することが示せる。効用関数ではなく間接効用関数なのをいったん置いておけば、位相の問題はこの結果でかなり緩められたように見えるが、ここで追加の問題がある。

研究の動機（3）

問題になるのは f についての「C^1」という仮定である。(f^k) が C^1 関数の列であるとして、f に広義 C^1 収束しているとすれば、f は自動的に C^1 である。さらにその場合、f^k のスルツキー行列も f のスルツキー行列に広義一様収束するので、半負値定符号性や対称性などは保たれ、よって f^k さえ需要関数であれば、f もたしかに需要関数である。しかし収束の条件を緩めた結果、どちらも言えなくなる。f は C^1 ではないかもしれないし、たとえ C^1 だったとしても、スルツキー行列が収束するわけではないので、需要関数ではないかもしれない。
このあたりの問題を解決するために、一度需要関数から C^1 という仮定を根本的に取って考え直してみようというのが今回の研究である。

需要候補

消費集合は常に $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ とする。
$f : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \Omega$ は、予算不等式 $p \cdot f(p, m) \leq m$ が常に満たされるとき、**需要候補** (Candidate of Demand) と呼ぶことにする。予算不等式が常に等号で成り立つ場合、f は**ワルラス法則**を満たすと言う。一方、$U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上で定義された一般の関数
$f : U \to \mathbb{R}^n$ が (p, m) で微分可能であるとき、

$$S_f(p, m) = D_p f(p, m) + D_m f(p, m) f^T(p, m)$$

という形で**スルツキー行列**を定義しておく。
また、$R(f)$ という記号で f の値域を定義しておく。

需要関数

Ω 上のある弱順序 $\succsim$ に対して、

$$f^{\succsim}(p,m)=\{x\in\Omega|p\cdot x\le m \text{ and } \forall y\in\Omega,\ p\cdot y\le m\Rightarrow x\succsim y\}$$

と定義する。もしある実数値関数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ に対して

$$u(x)\ge u(y)\Leftrightarrow x\succsim y$$

となるときには、$f^{\succsim}$ を f^u とも書く。需要候補である f は、$f=f^{\succsim}$ となるとき、$\succsim$ に対応する**需要関数**と呼ぶ。$f=f^u$ のときは「u に対応する」という言い方も用いる。また、単に「f は需要関数である」と言った場合、それは $f=f^{\succsim}$ となる弱順序が存在するという意味である。

局所リプシッツ関数

$U \subset \mathbb{R}^N$ 上で定義された関数 $f : U \to \mathbb{R}^M$ が**局所リプシッツ**であるとは、任意のコンパクト集合 $C \subset U$ に対して数 $L > 0$ が存在して、$x_1, x_2 \in C$ であれば必ず

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

となることを言う[1]。
U が開集合だとすると、連続微分可能な関数は、有限増分の公式から必ず局所リプシッツであることが示せる。逆に開集合上で定義された関数が局所リプシッツであれば、それはほとんどすべての点で全微分可能であることが知られている。（ラーデマッハーの定理）したがって需要候補が局所リプシッツならば、スルツキー行列はほとんどすべての点で定義される。

[1] U 全体でこの不等式を満たす数 $L > 0$ が存在するときには、単にリプシッツと呼ばれる。また、数 L は**リプシッツ定数**と呼ばれる。

第一の結果（1）

まず第一の結果を述べよう。この結果がその後のすべての結果の基盤になる。

定理 1

f は局所リプシッツでワルラス法則を満たす需要候補とし、そのスルツキー行列はほとんどすべての点で対称かつ半負値定符号とする。いま、$\bar{p} \gg 0$ をひとつ固定し、以下のように関数 $u_{f,\bar{p}}$ を定義する。まず、$x \notin R(f)$ のときには、$u_{f,\bar{p}}(x) = 0$ とする。一方、$x = f(p, m)$ となる (p, m) がひとつでも存在するときには、常微分方程式

$$\dot{c}(t) = f((1-t)p + t\bar{p}, c(t)) \cdot (\bar{p} - p), \ c(0) = m \tag{1}$$

を解いて $u_{f,\bar{p}}(x) = c(1)$ とする。このとき、以下が成り立つ。
(続く)

第一の結果（２）

定理１（続き）

1. $c(1)$ は $x = f(p,m)$ であるような (p,m) の取り方に依らず一意的に定まり、よって $u_{f,\bar{p}}$ は well-defined である。
2. $f = f^{u_{f,\bar{p}}}$ が成り立つ。
3. $u_{f,\bar{p}}$ は $R(f)$ 上で上半連続である。
4. もし $f = f^{\succsim}$ で、かつ $\succsim$ は $R(f)$ 上で上半連続な弱順序であるとすれば、任意の $x, y \in R(f)$ に対して以下が成り立つ：

$$u_{f,\bar{p}}(x) \geq u_{f,\bar{p}}(y) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

第一の結果の系（1）

この系として、以下のようなものが示せる。

系 1

f はワルラス法則を満たす局所リプシッツな需要候補とする。このとき、以下の４条件は同値である。

- f はなんらかの弱順序に対応する需要関数である。
- $f = f^{u_{f,\bar{p}}}$ である。ただし $u_{f,\bar{p}}$ は定理１で定義されている。
- f のスルツキー行列はほとんどすべての点で半負値定符号かつ対称である。
- どんな $(p, m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ に対しても、次の偏微分方程式は $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で定義された $E(p) = m$ を満たす C^1 級の凹解を持つ。

$$\nabla E(q) = f(q, E(q)). \tag{2}$$

第一の結果の系（2）

これらの結果の導出にとって最も重要な補題を一つ用意する。

補題 1

$U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}^n$ は局所リプシッツで、そのスルツキー行列はほとんどすべての点で対称であるとする。また、$(p, m) \in U$ を任意に取り、$V \subset \mathbb{R}^n$ は p の開凸近傍とする。このとき、初期条件 $E(p) = m$ の下での偏微分方程式 (2) の V 上定義された解 $E(q)$ が存在するための必要十分条件は、次の常微分方程式

$$\dot{c}(t) = f((1-t)p + tq, c(t)) \cdot (q - p), \ \ c(0) = m \tag{3}$$

の解関数 $c(t; q)$ の定義域が $[0, 1] \times V$ を含むことである。さらにこのとき、$E(q) = c(1; q)$ が成り立つ。

第一の結果の系（３）

系１の４番目の条件は、常微分方程式の $[0,1]$ 上で定義された解の存在と、ある種の凹性条件に分解できるが、そのどこにも強い不等号が出てこない。一般に需要候補が需要関数であることの特徴付けは顕示選好の強公理で行われるが、強公理には主張の最後に強い不等号が入っていて、極限操作で壊れる可能性を排除できない。それに対して系１の４番目の性質は、極限操作で壊れる性質がなにも入っていないという、極めて都合のいい特徴を有している。これが、本研究の後の結果にとっては最も重要な性質になっている。

需要関数の空間の性質（１）

補題１を適切に用いることで、我々は容易に次の結果を導出することができる。

定理２

(f^k) はワルラス法則を満たす局所リプシッツな需要関数の列で、需要候補 f に広義一様収束しているとする。もし f も局所リプシッツであるならば、f は需要関数である。

需要関数の空間の性質（2）

いま、$L = (L_\nu)$ を正の数列とし、$\Delta_\nu = [\nu^{-1}, \nu]^{n+1}$ 上で L_ν をリプシッツ定数として持つ需要関数 f 全体からなる空間を $\mathscr{F}_L$ と書く。この空間上で広義一様収束に対応する距離 ρ を

$$\rho(f, f') = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \arctan\left(\sup_{(p,m)\in\Delta_\nu} \|f(p,m) - f'(p,m)\|\right).$$

このとき定理 2 から、ただちに次の結果を得る。

系 2

$\mathscr{F}_L$ は距離 ρ の下でコンパクト距離空間になる。

需要関数の空間の性質（3）

いま、$\mathscr{F}_L$ 上の列 (f^k) が f に各点収束していたとする。すると $\mathscr{F}_L$ はコンパクトだから、これは $\mathscr{F}_L$ 内の元 g に一様収束する部分列を持つ。明らかに $f = g$ なので、ここからただちに以下の系を得る。

系 3

(f^k) は $\mathscr{F}_L$ 上の列で f に各点収束しているとすると、$f \in \mathscr{F}_L$ である。

効用関数の計算に関する問題

ただ、f が需要関数だったとしても、f の値域 $R(f)$ が十分大きくないと、効用関数をきちんと定義できる領域が少なすぎるという問題に直面してしまう。この問題は手強く、$R(f^k)$ がすべて $\mathbb{R}^n_{++}$ であるのに $R(f)$ はそれより十分小さいような列が作れてしまう。たとえば効用関数

$$u^k(x_1, x_2) = (x_1^{-k} + x_2^{-k})^{-\frac{1}{k}}$$

に対する需要関数が f^k だとすると、$L_\nu = \nu^5$ に対して $f^k \in \mathscr{F}_L$ であり、かつ $R(f^k) = \mathbb{R}^2_{++}$ であるが、この極限は

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

に対応する需要関数 f であり、$R(f) = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} | x_1 = x_2\}$ となってしまう。
したがって、我々は収束先 f の値域が広いことを、外生的に仮定せざるを得ない。

C 公理

少し寄り道として、$u_{f,\bar{p}}$ の性質について議論しておこう。以下では $R(f)$ は $\mathbb{R}^n_{++}$ を含むとする。f の逆需要対応 $G^f : \mathbb{R}^n_{++} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n_{++}$ を

$$G^f(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n_{++} \,\middle|\, \sum_{i=1}^n p_i = 1,\ f(p, p \cdot x) = x \right\}$$

で定義する。f が **C 公理**を満たすとは、G^f がコンパクト凸値な優半連続対応であることを言う。すると次が成り立つ。

補題 2

$u_{f,\bar{p}}$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で連続であることと、f が C 公理を満たすことは同値である。

計算結果の連続性（1）

これを利用して、次の定理を導くことができる。

定理 3

(f^k) はワルラス法則を満たし局所リプシッツな需要関数の列で、すべての k について $R(f^k)$ は $\mathbb{R}^n_{++}$ を含み、f^k はC公理を満たすとする。また (f^k) は距離 ρ について f に収束し、f も局所リプシッツな需要関数で、$R(f)$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ を含み、f はC公理を満たすとする。このとき $u_{f^k,\bar{p}}$ は $u_{f,\bar{p}}$ に $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で広義一様収束する。

計算結果の連続性（2）

今度は $M = (M_\nu)$ を正の数列であるとし、任意の $x \in]\nu^{-1}, \nu[^n$ に対して $p \in G^f(x)$ ならばすべての座標 i に対して $p_i \geq M_\nu$ となっており、かつ $R(f)$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ を含むような $\mathscr{F}_L$ の元 f の全体を $\mathscr{F}_{L,M}$ と書くことにする。すると次が成り立つ。

系 4

$\mathscr{F}_{L,M}$ は距離 ρ の下にコンパクトであり、さらにこの空間上の点列 (f^k) が f に収束するならば $u_{f^k,\bar{p}}$ は $u_{f,\bar{p}}$ に $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で広義一様収束する。

各点収束の場合

やはり $\mathscr{F}_{L,M}$ もコンパクトなので、我々は背理法を用いて容易に以下の結果を得られる。

定理 4

(f^k) は $\mathscr{F}_{L,M}$ 上の列で f に各点収束していたとすれば、$f \in \mathscr{F}_{L,M}$ であり、さらに $u_{f^k,\bar{p}}$ は $u_{f,\bar{p}}$ に $\mathbb{R}^n_{++}$ 上で広義一様収束する。

定理１の証明のスケッチ（１）

定理１の証明を、「後ろ向きに」示していこう。Hurwicz and Uzawa (1971) 以来、この定理は次の３ステップで証明される。

1. シェパードの補題型の偏微分方程式
$$\nabla E(q) = f(q, E(q)) \tag{2}$$
について、任意の初期条件 $E(p) = m$ に対する大域解 $E^{p,m}$ の存在を言う。
2. 不等式評価「$x = f(p, m), y = f(q, w), x \neq y$ で、$w \geq E^{p,m}(q)$ のとき、$p \cdot y > m$ である」を導出する。
3. $x = f(p, m)$ に対して $u_{f,\bar{p}}(x) = E^{p,m}(\bar{p})$ と定義して、$f = f^{u_{f,\bar{p}}}$ を示す。（これが我々の効用関数と同じであることは簡単に確認できる）

定理１の証明のスケッチ（２）

1. と 2. がすでに解決済みであるとしよう。まず、微分方程式の一般論から、(2) の解は互いに交わるならば完全に一致することが容易に示せる。したがって中間値の定理から、$E^{p,m}(r) \geq E^{q,w}(r)$ が成り立つ r が一つでも存在すれば、すべての r で同じ評価が成り立つことに注意する。

これを利用して、f が顕示選好の弱公理を満たすことを示す。いま $x = f(p,m), y = f(q,w)$ で、$x \neq y$ かつ $p \cdot y \leq m$ とする。もし $E^{q,w}(p) \geq m = E^{p,m}(p)$ であれば、$w = E^{q,w}(q) \geq E^{p,m}(q)$ となるが、不等式評価 2. からこのとき $p \cdot y > m$ となって矛盾が生じる。よって $E^{q,w}(p) < m$ であり、故に 2. から $q \cdot x > w$ である。以上で弱公理が示せた。

定理１の証明のスケッチ（３）

そこで $x = f(p,m)$ のときに $u_{f,\bar{p}}(x) = E^{p,m}(\bar{p})$ と定義する。いま、$y \neq x$ かつ $p \cdot y \leq m$ としよう。もし $y = f(q,w)$ なら、先ほどと同じ議論から $E^{q,w}(p) < m$ である。よって、

$$u_{f,\bar{p}}(y) = E^{q,w}(\bar{p}) < E^{p,m}(\bar{p}) = u_{f,\bar{p}}(x)$$

を得る。$y \notin R(f)$ のときはもちろん $u_{f,\bar{p}}(y) = 0 < u_{f,\bar{p}}(x)$ なので、ここからただちに $x = f^{u_{f,\bar{p}}}(p,m)$ がわかる。よって $f = f^{u_{f,\bar{p}}}$ である。
したがって 1. と 2. が証明の主要部である。また、上の議論では一切 f の微分可能性を使っていないことに注意する。

定理1の証明のスケッチ（4）

次に1. を仮定して2. を示そう。したがって以降、$x = f(p, m), y = f(q, w), x \neq y$ と $w \geq E^{p,m}(q)$ を仮定する。
アイデアを述べるために、f が連続微分可能な場合を考えよう。まず、$p(t) = (1-t)p + tq$ とし、$d(t) = p \cdot f(p(t), E^{q,w}(p(t)))$ とする。
簡単な計算により、

$$\dot{d}(t) = -t(q-p)^T S_f(p(t), E^{q,w}(p(t)))(q-p) \geq 0$$

が示せるため、$d(t)$ は非減少である。よって、

$$p \cdot y = d(1) \geq d(0) = p \cdot f(p, E^{q,w}(p)) = E^{q,w}(p) \geq E^{p,m}(p) = m$$

を得る。もし $w > E^{p,m}(q)$ ならば $E^{q,w}(p) > E^{p,m}(p)$ のため、最後の不等号が強くなって、我々は2. を得るので、以降は $w = E^{p,m}(q)$ を仮定する。したがって、$d(t) = p \cdot f(p(t), E^{p,m}(p(t)))$ でもある。

定理１の証明のスケッチ（５）

$\varepsilon < \|y - x\|$ となる $\varepsilon > 0$ を取る。$S_t = S_f(p(t), E^{p,m}(p(t)))$ とすると、S_t は対称かつ半負値定符号なので、その固有値 λ_t^k に対して $\sqrt{|\lambda_t^k|}$ を固有値として持つような、ある対称かつ半正値定符号な行列 A_t について $S_t = -A_t^2$ となっている。さらにこの場合、$\|A_t\|^2 = \|S_t\|$ が成り立つ。よって十分大きな L について $\|A_t\|^2 \leq L$ がすべての $t \in [0, 1]$ について成り立つ。そこで $\delta > 0$ を、$\varepsilon^2 > 2L^2\delta\|q - p\|^2$ を満たすほど小さく取る。
$x(t) = f(p(t), E^{p,m}(p(t)))$ とすると $\dot{x}(t) = S_t(q - p)$ であることに注意して、以下計算すると、次ページの計算が行える。

定理１の証明のスケッチ（６）

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 &\leq \|y-x\|^2 = \|x(1)-x(0)\|^2 \\
&\leq \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|S_t(q-p)\|^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \|A_t\|^2 \|A_t(q-p)\|^2 dt \leq L\int_0^1 \|A_t(q-p)\|^2 dt \\
&\leq L\int_0^\delta \|A_t\|^2 \|q-p\|^2 dt + L\int_\delta^1 \frac{1}{t}\dot{d}(t) dt \\
&\leq L^2\delta\|q-p\|^2 + \frac{L}{\delta}(d(1)-d(\delta)) < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{L}{\delta}(d(1)-d(\delta)).
\end{aligned}
$$

ここから、$d(1) \geq d(\delta) + A \geq d(0) + A$ となる定数 $A > 0$ の存在を得るため、二ページ前の評価から $p \cdot y > m$ を得る。以上は f が連続微分可能な場合の証明だったが、適切な摂動を用いて f が局所リプシッツな場合の証明に拡張できる。（摂動で定数 A が変わらないことに注意）これで 2. が証明できる。

定理１の証明のスケッチ（７）

補題１を用いれば、1. の証明には $V=\mathbb{R}^n_{++}$ として当てはめればよいことがわかる。そこで背理法の仮定として、ある $q\in\mathbb{R}^n_{++}$ に対して (3) の解が $[0,t^*[$ 上でしか定義できない（ただし $t^*\le 1$）と仮定しよう。ここで、$p(t)=(1-t)p+tq$ とする。スルツキー行列の簡単な評価から、$d(t)=p\cdot f(p(t),c(t;q))\ge m$ および $p(t)\cdot f(p,m)\ge c(t;q)$ が簡単に示せる。特に後者から、$c(t;q)$ が上に有界であることがわかるため、微分方程式の一般論から $\lim_{t\to t^*}c(t;q)=0$ でなければならないことがわかる。そこで、(t^k) を t^* に収束する増加数列とし、$x^k=f(p(t^k),c(t^k;q))$ と定義する。$q\cdot x^k\le q\cdot f(p,m)$ は容易に示せるため、(x^k) は有界点列であり、よって $x^k\to x^*$ となる $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ の存在を仮定してよい。$p\cdot x^*=\lim_{k\to\infty}p\cdot x^k\ge m$ なので $x^*\ne 0$ であるが、すると

$$0<p(t^*)\cdot x^*=\lim_{k\to\infty}p(t^k)\cdot x^k=\lim_{k\to\infty}c(t^k;q)=0$$

となって矛盾が生ずる。これで証明が完成する。

コーナーの値について（1）

ところで、いままで $R(f)$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ であることを仮定するような議論をしてきたが、一方で $u_{f,\bar{p}}$ の、$x \notin \mathbb{R}^n_{++}$ であるときの値についてはなにも議論してこなかった。定理 1 では値域に x が含まれないときの $u_{f,\bar{p}}$ の値は無条件で 0 にしているので、連続に $u_{f,\bar{p}}$ を定義するためには少し定義を変える必要がある。具体的には、

$$v_{f,\bar{p}}(x) = \begin{cases} u_{f,\bar{p}}(x) & \text{if } x \in R(f), \\ \inf_{\varepsilon>0} \sup\{u_{f,\bar{p}}(y) | y \in R(f), \|y-x\| < \varepsilon\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。$R(f)$ が $\mathbb{R}^n_{++}$ を含むならばこの関数は上半連続で、さらに $R(f)$ が $\mathbb{R}^n_{+}$ の相対位相で開であるような集合ならば、$f = f^{v_{f,\bar{p}}}$ であることを証明できる。（一意性も示せる）

コーナーの値について（２）

しかし、$R(f^k)$ と $R(f)$ が共に $\mathbb{R}^n_{++}$ と一致し、C公理もどちらも満たすにもかかわらず、$x \notin \mathbb{R}^n_{++}$ であるときに $v_{f^k,\bar{p}}(x) \not\to v_{f,\bar{p}}(x)$ となる例が見つかっているため、コーナーで効用が収束するとは残念ながら言えないようである。（この例が共通の $\mathscr{F}_{L,M}$ に入っているかどうかについては確認していないので、もしかすると $\mathscr{F}_{L,M}$ 上に制限すればこういうことは起こらない可能性はある。しかし、おそらくそうではないと思われる）

残された問題（1）

積分可能性理論には直接法と間接法があって、今回の研究は直接法の研究である。間接法は、$f(g(x), g(x) \cdot x) = x$ が常に成り立つ関数 g（逆需要関数と呼ばれる）を扱い、ラグランジュの一階条件

$$\nabla u(x) = \lambda(x) g(x)$$

を常に満たす関数 (u, λ) の存在を問題とする。これについて、g が連続微分可能なときには、フロベニウスの定理と呼ばれる有名な存在定理がある。ところが実はこれは (2) の偏微分方程式の解の存在と非常に関係が深いことがわかっている。

残された問題（2）

定理（フロベニウスの定理）

U は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$g : U \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は C^1 とする。このとき、任意の $x^* \in U$ に対して、以下の全微分方程式

$$\nabla u(x) = \lambda(x) g(x)$$

の x^* の近傍上での解 (u, λ)（ただし u は C^1 で λ は連続かつ至る所で正値）が存在するための必要十分条件は、以下のヤコービの積分可能性条件

$$g_i \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right) + g_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right) + g_k \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

がすべての i, j, k について成り立つことである。

残された問題（３）

ここで、f が連続微分可能でスルツキー行列が対称な場合、(2) の局所解の存在は

$$g(p,m) = (f(p,m), -1)$$

にフロベニウスの定理の結論を適用するだけで簡単に示せてしまう（この g について、ヤコービの積分可能性条件は S_f の対称性と同値であることが計算ですぐわかる）。
逆に (2) の局所解の存在定理を前提にすれば、一般性を失うことなく $g_n(x^*) \neq 0$ として、

$$f_i(x) = -\frac{g_i(x)}{g_n(x)}$$

と定義してやるとこれのスルツキー行列の対称性とヤコービの積分可能性条件が同値で、ここから u の無差別超曲面を計算してやることができ、多少の操作を経てフロベニウスの定理を出せる。
つまり (2) の局所解の存在定理とフロベニウスの定理は陰関数定理と逆関数定理のような関係にある。

残された問題（４）

実際のところ、我々の結果では f に局所リプシッツしか仮定していないので、古典的なフロベニウスの定理よりも仮定が弱い。これを使って、フロベニウスの定理を g が局所リプシッツな場合に拡張できる。そして、逆需要関数から効用関数を逆算する間接法の積分可能性理論は Hosoya (2013) で研究されているので、そのやり方を援用することで、新しい結果が作れるかもしれない。
逆需要関数については需要関数と違って、逆需要関数の広義一様収束から効用関数の広義一様収束を示す簡単な方法があるので、有力なライバルたり得る。これが現在考えている問題である。

Thank you for your attention.