Irreducible plane curves and linear groups*

春井 岳 （高知工科大学）†

概 要

本稿は 2015 年 12 月 20 日における筆者の講演の報告である. 非特異平面曲線の自己同型群の分類と, 位数の大きい自己同型群をもつ非特異平面曲線の決定について述べる. また, 既約平面曲線に作用する射影変換のなす群の位数についての結果もあわせて報告する.

1 代数曲線とその自己同型群

本稿の主題は代数曲線の平面モデルと自己同型群である. C を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線とする. このとき C の自己同型群は有限群であり, いくつかの問題が考えられる.

問題. (1) C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の群構造を分類せよ.

(2) $\mathrm{Aut}(C)$ の位数の上限を与えよ.

(3) 位数の大きい自己同型群をもつ非特異平面曲線を分類せよ.

これらの問題に対し, 定理 8, 定理 9, 定理 10 でそれぞれ解答を与える.

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された, 種数 $g \geq 2$ の非特異既約な射影的代数曲線（コンパクトリーマン面）とする. このとき X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は有限群であり, Riemann-Hurwitz の公式を用いて位数の上限が与えられる.

定理 1. (Hurwitz [Hu]) $|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1)$. さらに, G を $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群とすると

$$\frac{|G|}{g-1} = 84, 48, 40, 36, 30, \frac{132}{5} \quad \text{または} \quad \frac{|G|}{g-1} \leq 24.$$

さらに自己同型群の部分群が不変部分集合をもつ場合には, 次のような位数の評価式が得られる.

*arXiv:math.AG/1306.5842

†e-mail: harui.takeshi@kochi-tech.ac.jp, takeshi@cwo.zaq.ne.jp

定理 2. (及川 [O], 荒川 [Ar]) G を $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする.

(1) ([O, Theorem 1]) G が C の有限部分集合 S ($|S| = k \geq 1$) を固定する ($G(S) = S$) とき, $|G| \leq 12(g-1) + 6k$ が成り立つ.

(2) ([Ar, Theorem 3]) G が C の交わりのない 3 つの有限部分集合 S_i ($|S_i| = k_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$) をそれぞれ固定するとき, $|G| \leq 2(g-1) + k_1 + k_2 + k_3$ が成り立つ.

また, 種数 $g \geq 2$ の代数曲線の自己同型群の最大位数を $N(g)$ とするとき, 次のことが知られている.

命題 3. (1) (Macbeath) $N(g) = 84(g-1)$ となる g は無限個存在する.

(2) (Accola, Maclachlan) $N(g) \geq 8(g+1)$ である. また, 無限個の g に対して等号が成り立つ.

群構造に関しては, 種数 3（非特異平面 4 次曲線）の場合の分類 ([He], [KKu], [KKi]) をはじめ, 種数の小さい場合 ([Br, Chapter 5]) や最大位数 $84(g-1)$ の場合などについてはある程度わかっている ([Ma], [K] など). しかし一般に自己同型群を分類するのは難しい. 実際, 次のことが成り立つ.

定理 4. (Greenberg [G, Theorem 4]) 任意の有限群 G に対して, $\mathrm{Aut}(X) = G$ となる代数曲線 X が存在する.

非特異平面曲線については, 以前に加藤崇雄, 米田二良, 大渕朗各氏との共同研究により, [HKKO] で非特異平面曲線の間の自己同型, [HKO] で自己同型による商曲線の分類を行った.

2 非特異平面曲線の自己同型群

以下, C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線, G を C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする. C の自己同型について, 次のことが重要である.

命題 5. C 上の非常に豊富な g_d^2 はただ 1 つである. とくに, G は自然に射影線形群 $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ の部分群とみなせる.

C を保つ射影変換と, その制限として得られる C の自己同型を同一視する. 定理 2 の不等式を用いることにより, 特別な代数曲線, 例えば Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ や Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の自己同型群の構造を決定することができる. 以下, 射影変換 $(X : Y : Z) \mapsto (H_1(X, Y, Z) : H_2(X, Y, Z) : H_3(X, Y, Z))$ （H_1, H_2, H_3 は 1 次斉次式）を簡潔に $[H_1, H_2, H_3]$ で表す.

命題 6. Fermat 曲線 F_d $(d \geq 4)$ の自己同型群は 4 つの射影変換 $[\zeta X, Y, Z]$, $[X, \zeta Y, Z]$（ζ は 1 の原始 d 乗根）, $[Y, Z, X]$ および $[X, Z, Y]$ で生成され, 巡回群の直積 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の 3 次対称群 S_3 による半直積である:

$$\mathrm{Aut}(F_d) \simeq (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2 \rtimes S_3.$$

とくに $|\mathrm{Aut}(F_d)| = 6d^2$.

証明. 上の 4 つの変換で生成される $\mathrm{Aut}(F_d)$ の部分群を H とする. これは $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の S_3 による半直積である. とくに $|\mathrm{Aut}(F_d)| \geq |H| = 6d^2$. 一方, F_d は $d-2$ 次の変曲点をちょうど $3d$ 個もち, $\mathrm{Aut}(F_d)$ はそれらの全体を集合として固定する. したがって及川不等式により

$$|\mathrm{Aut}(F_d)| \leq 12(g-1) + 6 \cdot 3d = 6d(d-3) + 6 \cdot 3d = 6d^2.$$

よって $|\mathrm{Aut}(F_d)| = |H|$ なので $\mathrm{Aut}(F_d) = H$. □

命題 7. $d \geq 5$ のとき, Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の自己同型群は 2 つの射影変換 $[\xi^{-(d-2)}X, \xi Y, Z]$（$\xi$ は 1 の原始 $d^2 - 3d + 3$ 乗根）と $[Y, Z, X]$ で生成され, $\mathbb{Z}/(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ による半直積である:

$$\mathrm{Aut}(K_d) \simeq \mathbb{Z}/(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

とくに $|\mathrm{Aut}(K_d)| = 3(d^2 - 3d + 3)$. また $\mathrm{Aut}(K_4) \simeq \mathrm{PSL}(2, 7)$ は位数 168 の単純群である.

証明. $d = 4$ の場合はよく知られている. $d \geq 5$ とし, 上の 2 つの変換で生成される $\mathrm{Aut}(K_d)$ の部分群を H とする. これは $\mathbb{Z}/(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ による半直積である. とくに $|\mathrm{Aut}(K_d)|$ は $|H| = 3(d^2 - 3d + 3)$ の倍数. 一方 K_d は $d-3$ 次の変曲点をちょうど 3 つもつ ($P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$). $\mathrm{Aut}(K_d)$ はこれら 3 点からなる集合を固定するから, 及川不等式により

$$|\mathrm{Aut}(K_d)| \leq 12(g-1) + 6 \cdot 3 = 6d(d-3) + 18 = 6(d^2 - 3d + 3)$$

が成り立つ. したがって, $\mathrm{Aut}(K_d)$ が奇数位数であること, つまり位数 2 の元を含まないことを示せばよい. $\mathrm{Aut}(K_d)$ が位数 2 の元 ι を含むとしよう. これは P_1, P_2, P_3 の少なくとも 1 つを固定するので, P_3 を固定するとしてよい. このとき ι は K_d の P_3 における接線 $L_2 : Y = 0$ も固定する. さらに, 集合 $\{P_1, P_2\}$, 集合 $\{L_1, L_3\}$ $(L_1 : X = 0,\ L_3 : Z = 0)$ も固定する. したがって

$$\iota = [\alpha X, \beta Y, Z] \quad ((\alpha, \beta) = (1, -1), (-1, -1), (-1, -1)) \quad \text{または}$$
$$\iota = [\gamma X, \gamma Y, Z] \quad (\gamma = \pm 1)$$

が成り立つ. どちらの場合も ι は K_d に作用しないので矛盾. したがって $\mathrm{Aut}(K_d)$ は奇数位数である. □

注 1. 命題 6 の結果は古くから知られている. 命題 7 も既知に違いないと思われる.

3 主結果

主定理を述べるためいくつか用語を定める.

単項式 $cX^iY^jZ^k$ ($c \neq 0$) に対して, $\max\{i,j,k\}$ をその単項式の指数とよび, d 次斉次式 $F = F(X,Y,Z)$ に対して F の最大指数の項の総和を F の核とよぶことにする. F の核を除いた各項を低指数の項という.

二つの平面曲線 C, C_0 に対して, ある座標系のもとで

(1) C の定義多項式の核は C_0 の定義多項式

(2) $\mathrm{Aut}(C)$ は $\mathrm{Aut}(C_0)$ の部分群

が成り立つとき, C は C_0 の子孫 (descendant) であるという.

$(2,1)$ ブロック型の正則行列

$$M = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\Large A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ (A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}^*)$$

で代表される射影変換の全体を $\mathrm{PBD}(2,1)$ で表す. このとき自然な射影 $\rho : \mathrm{PBD}(2,1) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ ($[M] \mapsto [A]$) がある.

これらの用語を用いて, 非特異平面曲線の自己同型群を次のように分類することができる.

定理 8. 次のうち一つが成り立つ.

(a-i) G は C 上の 1 点を固定する. さらに G は位数 $d(d-1)$ 以下の巡回群.

(a-ii) G は C 上にない 1 点を固定する. さらに可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{PBD}(2,1) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) & \to & 1 \quad (\text{完全}) \\ & & \cup\!\uparrow & & \cup\!\uparrow & & \cup\!\uparrow & & \\ 1 & \to & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \to & 1 \quad (\text{完全}), \end{array}$$

が存在し, $N = \mathrm{Ker}(\rho|_G)$, $G' = \mathrm{Im}(\rho|_G)$ について以下のことが成り立つ.

(1) N は巡回群で, その位数は d の約数.

(2) G' は巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 二面体群 D_{2m}, 4 次交代群 A_4, 4 次対称群 S_4, 5 次交代群 A_5 のうち一つと共役.

(3) $G' \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ならば $m \leq d-1$, $G' \simeq D_{2m}$ ならば $m | d-2$ あるいは N が自明となる.

とくに $|G| \leq \max\{2d(d-2), 60d\}$ が成り立つ.

(b-i) C は Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ の子孫である. とくに $|G| \leq 6d^2$.

(b-ii) C は Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の子孫である. とくに, $d \geq 5$ のとき $|G| \leq 3(d^2 - 3d + 3)$.

(c) G は $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の原始的有限部分群, つまり 5 次交代群 A_5, 6 次交代群 A_6, 位数 168 の Klein 群 $\mathrm{PSL}(2, 7)$, 位数 216 の Hesse 群 H_{216} あるいはその部分群 H_{36}（位数 36）, H_{72}（位数 72）のうち一つと共役. とくに $|G| \leq 360$.

なお, (c) の Klein 群, Hesse 群についてはそれぞれ次の定理 9 と注 2(2) を参照. 上の定理により, 非特異平面曲線の自己同型群について位数の上限を与えることができる.

定理 9. C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線とするとき, 次の二つの場合を除いて $|\mathrm{Aut}(C)| \leq 6d^2$ が成り立つ.

(i) $d = 4$ かつ C は 4 次の Klein 曲線 $XY^3 + YZ^3 + ZX^3 = 0$ と射影同値. このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は位数 168 の Klein 群と共役である.

(ii) $d = 6$ かつ C は 6 次の Wiman 曲線

$$10X^3Y^3 + 9(X^5 + Y^5)Z - 45X^2Y^2Z^2 - 135XYZ^4 + 27Z^6 = 0$$

と射影同値. このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は 6 次交代群 A_6（位数 360）と共役である.

さらに, $d \neq 6$ のとき $|\mathrm{Aut}(C)| = 6d^2$ となるのは C が Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ と射影同値であるとき, またそのときに限る. とくに, 各 $d \geq 4$ に対し, 最大位数の自己同型群をもつ非特異平面曲線は射影同値を除いてただ一つ存在する.

注 2. (1) この定理は次数 d が小さいときには既知の結果である. まず $d = 4$ の場合と, 6 次の Wiman 曲線が 6 次交代群 A_6 を自己同型群にもつことは古典的に知られていた ([W], [Bl]). $d = 6$ のとき A_6 を自己同型群にもつ曲線が（射影同値を除いて）Wiman 曲線しかないことは [DIK] で示されている. また, $d = 4, 6$ の場合に最大位数の自己同型群をもつ曲線が射影同値を除いてただ一つであることは, 定理 2 を用いて示すこともできる.
(2) $d = 6$ のとき, 方程式

$$X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$$

で定まる非特異 6 次曲線は位数 216 の Hesse 群 H_{216} を自己同型群にもつ. この群は次の行列で表される射影変換で生成される.

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \text{ および } h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

ただし, ω は 1 の原始 3 乗根. このとき $H_{32} = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$, $H_{72} = \langle h_1, h_2, h_3, u \rangle$ ($u = h_1^{-1} h_4^2 h_1$) である. 射影同値を除いて, 位数 $216 = 6^3$ の自己同型群をもつ 6 次曲線は Fermat 曲線とこの曲線だけである.

曲線の次数が高い場合には, 定理 8 を用いて位数の大きい自己同型群をもつ曲線を分類することができる.

定理 10. C を次数 $d \geq 60$ の非特異平面曲線とする. $|\mathrm{Aut}(C)| > d^2$ ならば C は次の曲線のうち一つと射影同値である.

(i) Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ ($|\mathrm{Aut}(F_d)| = 6d^2$).

(ii) Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ ($|\mathrm{Aut}(K_d)| = 3(d^2 - 3d + 3)$).

(iii) 曲線 $Z^d + XY(X^{d-2} + Y^{d-2}) = 0$. このとき短完全列

$$1 \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(C) \to D_{2(d-2)} \to 1$$

が存在する. とくに $|\mathrm{Aut}(C)| = 2d(d-2)$.

(iv) Fermat 曲線の子孫 $X^{3m} + Y^{3m} + Z^{3m} - 3\lambda X^m Y^m Z^m = 0$ ($d = 3m$, $\lambda \neq 0$, $\lambda^3 \neq 1$). このとき $|\mathrm{Aut}(C)| = 2d^2$.

(v) Fermat 曲線の子孫 $X^{2m} + Y^{2m} + Z^{2m} + \lambda(X^m Y^m + Y^m Z^m + Z^m X^m) = 0$ ($d = 2m$, $\lambda \neq 0, -1, \pm 2$). このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ の S_3 による半直積と同型である. とくに $|\mathrm{Aut}(C)| = 6m^2 = (3/2)d^2$.

注 3. (iii) の場合, 曲線は点 $(0:0:1)$ を Galois 点にもつ. すなわち点 $(0:0:1)$ からの射影 $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ は Galois 被覆を与える. 次数 d が小さい ($d < 60$) 場合, 位数の大きい自己同型群をもつ曲線として, 上の定理にあげた曲線以外に Galois 点をもつ曲線が多く現れる. Galois 点については [Y] などを参照.

4 定理 8, 定理 9 の証明の概略

定理 9 は定理 8 から容易に得られる. 定理 8 の証明にあたって最も有用なのが, Mitchell による $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類である.

定理 11. ([Mi, Section 1-10], [DI, Theorem 4.8]) G を $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．このとき次のうち一つが成り立つ．

(a) G はある直線とその上にない 1 点をそれぞれ固定する．

(b) G はある三角形（共点でない三直線）を固定する．

(c) G は原始的であり, 5 次交代群 A_5, 6 次交代群 A_6, 位数 168 の Klein 群, 位数 216 の Hesse 群 H_{216} あるいはその部分群 H_{36}, H_{72} のうち一つと共役．

注 4. 正確には, Mitchell の結果では (a) のかわりに G が 1 点を固定する場合と直線を固定する場合があげられている．それらはともに (a) の場合に帰着する．

<u>**定理 8 の証明の概略.**</u>　C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線, G を $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする．G は自然に $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の部分群とみなされるので, 上の定理に応じて場合分けする．(c) の場合はそのまま定理 8 の (c) に対応するので, 残りの場合を考える．
(A) G がある直線 L と, L 上にない 1 点 P をそれぞれ固定する場合．まず $P \in C$ ならば G は巡回群である．このときには定理 8 の (a-i) が成り立つ．以下では $P \notin C$ とする． 適当な座標をとり, $L : Z = 0$, $P = (0 : 0 : 1)$ としてよい． すると $G \subset \mathrm{PBD}(2,1)$ なので, 自然な射影 $\rho : \mathrm{PBD}(2,1) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ により可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{PBD}(2,1) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) & \to & 1 \quad (\text{完全}) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \to & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \to & 1 \quad (\text{完全}), \end{array}$$

が得られる．ここで $N = \mathrm{Ker}(\rho|_G)$, $G' = \mathrm{Im}(\rho|_G)$. N は $\mathbb{C}^*$ の有限部分群なので巡回群である．さらに $\pi : C \to C/N$ を自然な射影, $\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$ を点 P からの射影とすると可換図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\pi_P"'] & \circlearrowleft & C/N \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1. & \end{tikzcd}$$

が得られ, $|N| = \deg\pi$ は $\deg\pi_P = d$ の約数であることがわかる． 一方, G' は $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群である．後は G' の位数を評価することにより, (a-ii) が得られる（ただし, (b-i) が得られる場合もわずかにある）．
(B) G がある三角形 Δ を固定する場合．G は点も直線も固定しないとしてよい．さらに適当な座標をとり, $\Delta = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ($L_1 : X = 0$, $L_2 : Y = 0$, $L_3 : Z = 0$) としてよい．三角形 Δ の頂点集合を V とする: $V = \{P_1, P_2, P_3\}$ ($P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$).

G は 1 点も直線も固定しないので, $C \cap V = \emptyset$ か $C \supset V$ が成り立つ．$C \supset V$ のとき, C の点 P_i における接線を T_i で表す．すると次の場合にわかれる．

(B-1) $C \cap V = \emptyset$.

(B-2) $C \supset V$ で, すべての T_i が Δ の辺である.

(B-3) $C \supset V$ で, どの T_i も Δ の辺でない.

(B-1) この場合, C は

$$aX^d + bY^d + cZ^d + (\text{低指数の項}) \quad (a, b, c \neq 0)$$

の形の多項式で定義される. 必要なら座標を取りなおして, $a = b = c = 1$ としてよい. こうして C は Fermat 曲線の子孫であることがわかり, (b-i) が得られる.
(B-2) この場合, $T_1 = L_3$, $T_2 = L_1$, $T_3 = L_2$ としてよい. すると C は

$$aXY^{d-1} + bYZ^{d-1} + cZX^{d-1} + (\text{低指数の項}) \quad (a, b, c \neq 0)$$

の形の多項式で定義される. 必要なら座標を取りなおして, $a = b = c = 1$ としてよい. こうして C は Klein 曲線の子孫であることがわかり, (b-ii) が得られる.
(B-3) この場合, 実は G は 1 点か直線を固定集合にもつことがいえ, 矛盾が生じる. こうしてこの場合は排除でき, 証明が終わる.

5 定理 10 の証明の概略

定理の条件より定理 8 の (a-ii), (b-i), (b-ii) のうち 1 つが起きる.

(a-ii) の場合, さらに $N \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ かつ $G' \simeq D_{2m}$ であり, C は曲線 $Z^d + XY(X^{d-2} + Y^{d-2}) = 0$ と射影同値であることがわかる.

(b-i) の場合, C は Fermat 曲線の子孫である. Fermat 曲線の自己同型群の部分群で位数が d^2 を超えるものは 3 種類しかなく, それらは定理の (i)(iv)(v) に対応することがいえる.

(b-ii) の場合, $|\mathrm{Aut}(C)|$ は奇数 $3(d^2 - 3d + 3)$ の約数で d^2 より大きいので $|\mathrm{Aut}(C)| = 3(d^2 - 3d + 3)$ となり, C は Klein 曲線と射影同値である.

6 代数曲線の自己同型群と平面モデル

次数 4 以上の非特異平面曲線の自己同型群を調べるとき鍵となったのは「自己同型群が自然に射影線形群 $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の部分群とみなせる」という事実である. より一般に, 種数 $g \geq 2$ の代数曲線 X に対して, その平面モデルから自己同型群を調べることができる場合がある.

Γ を次数 $d \geq 4$ の既約平面曲線とするとき

$$\mathrm{Lin}(\Gamma) = \{\, \sigma \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}) \mid \sigma(\Gamma) = \Gamma \,\}$$

とする. このとき, 定理 9 を一般化した次の結果が成り立つ. 証明は省略する.

定理 12. $g(\Gamma) \geq 2$ のとき, Γ が Klein 4 次曲線 K_4, Wiman 6 次曲線 W_6 と射影同値でなければ $|\mathrm{Lin}(\Gamma)| \leq 6d^2$ が成り立つ.

曲線が simple な線形系 g_d^r をもつとき, d, r によって曲線の種数 g の上限が得られる（Castelnuovo の種数上限）. Accola はこれを一般化し, simple な線形系を複数もつときにより強い種数上限を与えた. その特別な場合として次が得られる.

命題 13. (Accola の種数上限 [Ac, Theorem 4.3]) X が 2 つの simple な g_d^2 をもつとき

$$g \leq \left[\frac{1}{3}(d^2 - 3d + 3)\right]$$

が成り立つ.

この結果から, 種数に関して相対的に次数の小さい平面モデルは唯一つしかないため, そのような平面モデル Γ に対して

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma) \subset \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$$

が成り立つ. こうして, 曲線の平面モデルを通して自己同型群を調べることができる.

参考文献

[Ac] R. D. M. Accola, On Castelnuovo's inequality for algebraic curves I, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 357–373.

[Ar] T. Arakawa, Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets, Osaka J. Math. **37** (2000), 823–846.

[Bl] H. Blichfeldt, Finite Collineation Groups: With an Introduction to the Theory of Groups of Operators and Substitution Groups, Univ. of Chicago Press, Chicago (1917).

[Br] T. Breuer, Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann surfaces, London Mathematical Society Lecture Note Series 280, Cambridge Univ. Press (2000).

[DIK] H. Doi, K. Idei, H. Kaneta, Uniqueness of the most symmetric nonsingular plane sextics, Osaka J. Math. **37** (2000), 667–687.

[DI] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, Algebra, Arithmetic, and Geometry, Progress in Mathematics Volume **269** (2009), 443–548.

[G] L. Greenberg, Maximal Fuchsian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 569–573.

[HKKO] T. Harui, T. Kato, J. Komeda, A. Ohbuchi, Double coverings between smooth plane curves, Kodai Math. J. **31** (2008), 257–262.

[HKO] T. Harui, J. Komeda, A. Ohbuchi, Quotient curves of smooth plane curves with automorphisms, Kodai Math. J. **33** (2010), 164–172.

[He] P. Henn, Die Automorphismengruppen der algebraischen Funktionenkorper vom Geschlecht 3, Inaugural-dissertation, Heidelberg (1976).

[Hu] A. Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit Eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. **41** (1893), 403–442.

[K] Vik. S. Kulikov, Hurwitz curves, Russian Math. Surveys **62** (2007), 1043–1119.

[KKi] A. Kuribayashi, H. Kimura, Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus five, J. Algebra **134** (1990), 80–103.

[KKu] I. Kuribayashi, A. Kuribayashi, On automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus 4, Proc. Japan Acad. **62** Ser. A (1986), 65–68.

[Ma] A. M. Macbeath, On a theorem of Hurwitz, Proc. Glasgow Math. Assoc. **5** (1961), 90–96.

[Mi] H. H. Mitchell, Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), 207–242.

[O] K. Oikawa, Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself, Kodai Math. Sem. Rep. **8** (1956), 23–30.

[W] A. Wiman, Ueber eine einfuche Gruppe von 360 ebenen Collineationen, Math. Ann. **47** (1896), 531–556.

[Y] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.