Algebraic curves with plane models and Galois pencils

春井 岳 （高知工科大学）*

概 要

本稿は 2015 年 10 月 31 日における筆者の講演の報告である．代数曲線の Galois ペンシル（Galois 被覆を引き起こすペンシル）と曲線の平面モデルの Galois 点との関連について述べる．とくに, ある種の平面モデルをもつ曲線は Galois ペンシルを高々1 本しかもたないことを示す.

1 平面曲線の Galois 点

本稿ではとくに断らない限り, 曲線といえば体 $\mathbb{C}$ 上の既約射影的代数曲線, 線形系といえば完備かつ基点をもたないものを指す.

平面曲線の Galois 点は三浦・吉原 [MY] や三浦 [Miu1] において導入された．Γ を既約平面曲線とし, $d = \deg\Gamma \geq 4$ とする．$P \in \mathbb{P}^2$ に対して, P からの点射影 $\pi_P : \Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ が引き起こす体拡大 $\pi_P^* : \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow \mathbb{C}(\Gamma)$ が Galois 拡大であるとき, P を Γ の Galois 点という．このとき C を Γ の非特異モデルとすると, P における Galois 群 $G_P = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(\Gamma)/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ は自然に $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とみなせる．$P \in \Gamma$ のとき P を内 Galois 点, $P \notin \Gamma$ のとき外 Galois 点といい, 内 Galois 点, 外 Galois 点の個数をそれぞれ $N(\Gamma)$, $N'(\Gamma)$ で表す．また, Galois 点 P の重複度が m のとき Galois m 重点という.

非特異平面曲線については次のことが知られている.

命題 1. (吉原 [Y, Theorem 4, Proposition 5, Theorem 4′, Proposition 5′]) Γ を次数 d の非特異平面曲線とする.

(1) $d \geqq 4$ のとき $N(\Gamma) = 0, 1$ または 4．さらに

$N(\Gamma) \geq 1 \iff \Gamma$ は $YZ^{d-1} + H(X,Y) = 0$（$H(X,Y)$ は重複因子をもたない d 次斉次式）の形の曲線と射影同値.

$N(\Gamma) = 4 \iff d = 4$ かつ Γ は $YZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ と射影同値.

*e-mail: harui.takeshi@kochi-tech.ac.jp, takeshi@cwo.zaq.ne.jp

(2) $N'(\Gamma) = 0, 1$ または 3. さらに

$$N'(\Gamma) \geq 1 \iff \Gamma \text{ は } Z^d + H(X,Y) = 0 \text{（} H(X,Y) \text{ は重複因子をもたない } d \text{ 次斉次式）の形の曲線と射影同値.}$$

$$N'(\Gamma) = 3 \iff \Gamma \text{ は Fermat 曲線 } X^d + Y^d + Z^d = 0 \text{ と射影同値.}$$

また, Γ が非特異平面曲線のとき

$$N(\Gamma) \geq 1 \quad \text{かつ} \quad N'(\Gamma) \geq 1 \quad \iff \quad \Gamma \text{ は } YZ^{d-1} + X^d + Y^d = 0 \text{ と射影同値}$$

が成り立つ (深澤 [F]).

Γ が特異点をもつ場合を考えるのは自然であるが, 本稿では Γ の非特異モデルを研究するという立場から, 平面曲線とは限らない非特異曲線について Galois 点に対応するものを考える.

2 曲線の Galois ペンシル

C を種数 g の非特異曲線とする.

定義. C 上のペンシル（1 次元線形系）Λ に付随する射 $\Phi_\Lambda : C \to \mathbb{P}^1$ が引き起こす体拡大 $\Phi_\Lambda^* : \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \hookrightarrow \mathbb{C}(C)$ が Galois 拡大のとき, Λ を C の Galois ペンシルという. このとき, $G_\Lambda = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(C)/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ を Λ に関する Galois 群という.

Galois ペンシル Λ に対して, 射 Φ_Λ は C から $C/G_\Lambda \simeq \mathbb{P}^1$ への自然な射影とみなせる. とくに, $g \geq 2$ のとき Galois ペンシルは高々有限個であることがわかる.

C を調べる際, 次数の小さいペンシルが重要である. 例えば C のペンシルの最小次数 $\mathrm{gon}(C)$ は C の gonality とよばれ, 曲線の性質に深く影響する不変量である. そこで, とくに次数の小さい Galois ペンシルに注目し, それを C の平面モデル Γ の Galois 点と関連づけて調べる. このとき次の問題がある.

問題. C の次数の小さい Galois ペンシル Λ は, Γ の Galois 点 P を中心とする点射影から得られるか？ またそのとき, $G_\Lambda \simeq G_P$ の元は射影変換に延長されるか？

一般に特異平面曲線の Galois 点に対しては, その Galois 群の元は射影変換から得られるとは限らない.

例 1. (三浦 [Miu2, Example 3]) $n \geq 1$ に対して

$$\Gamma : Y(X^2+Y^2)^n + X^{n+1}Z^n + Y^{n+1}Z^n + YZ^{2n} = 0, \quad P = (0:0:1)$$

とすると, P は Γ の Galois 点である. さらに

$$\sigma_0 : (X : Y : Z) \mapsto (X : Y : \zeta Z) \quad (\zeta \text{ は } 1 \text{ の原始 } n \text{ 乗根})$$
$$\tau_0 : (X : Y : Z) \mapsto (XZ : YZ : X^2 + Y^2)$$

から定まる G_P の元をそれぞれ σ, τ とすると $G_P = \langle \sigma, \tau \rangle \simeq D_{2n}$ であり, τ は射影変換に延長されない.

本稿の主定理は, 命題 1 の一般化にあたる次の結果である.

定理 2. $d \geq 10$ とし, C が次をみたす特異 d 次平面モデル Γ をもつとする.

(i) Γ の特異点は 2 重点のみ（無限に近い特異点も含む）.

(ii) $g > [d^2/4]$.

このとき, C が平面曲線 $Y^2Z^{d-2} + X^d + Y^d = 0$ と双有理同値でなければ, C 上の次数 d 以下の Galois ペンシルは高々1 本である. さらに Γ が次数 $d - m$ $(m = 0, 1, 2)$ の Galois ペンシルをもつとき, その Galois 群は巡回群であり, Γ は

$$F_m(X, Y)Z^{d-m} + F_d(X, Y) = 0 \quad (F_i(X, Y) \neq 0 \text{ は } i \text{ 次斉次式})$$

の形の曲線と射影同値である.

注. 定理の条件のもとで $\mathrm{gon}(C) = d - 2$ である. さらに, C の次数 d 以下の Galois ペンシルは Γ の Galois 点を中心とする点射影から得られる.

また, 次のことがいえる.

命題 3. 平面曲線 $Y^2Z^{d-2} + X^d + Y^d = 0$ の $P = (0 : 0 : 1)$ 以外の Galois 点は $P' = (1 : 0 : 0)$（外 Galois 点）ただ一つである.

平面曲線 Γ を固定する射影変換全体のなす $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の部分群を $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ で表す:

$$\mathrm{Lin}(\Gamma) = \{\, \sigma \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}) \mid \sigma(\Gamma) = \Gamma \,\}.$$

定理 2 と命題 3 から, 自己同型群について次のことがわかる.

系 4. 定理 2 の条件のもとで, C が次数 d 以下の Galois ペンシルをもてば自然に $\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma)$ である.

3　準備

用語と記号

射影変換 $(X:Y:Z) \mapsto (H_1(X,Y,Z):H_2(X,Y,Z):H_3(X,Y,Z))$（$H_1(X,Y,Z)$, $H_2(X,Y,Z)$, $H_3(X,Y,Z)$ は斉次 1 次式）を $[H_1, H_2, H_3]$ で表す.

適当な座標系のもとで $[X, Y, \zeta Z]$（ζ は 1 のベキ根）の形で表される射影変換を homology という. 自明でない homology σ の固定点はある点 P と, P を通らないある直線 L 上のすべての点からなる. P を σ の中心, L を σ の軸という.

補題 5. 自明でない homology σ が軸でない直線を集合として固定するとき, その直線は σ の中心を通る.

証明. $\sigma = [X, Y, \zeta Z]$（ζ は 1 のベキ根で $\zeta \neq 1$）としてよい. このとき, σ が軸でない直線 $M : aX + bY + cZ = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C}, (a, b) \neq (0, 0))$ を集合として固定するとすると $c = 0$. よって $P = (0:0:1) \in M$ である. □

非特異曲線 C 上の線形系 g^r_d は, 付随する射 $\varphi : C \to \mathbb{P}^r$ が像の上に双有理であるとき, simple であるという.

定理 6. (Castelnuovo の種数上限 [ACGH, III §2, p. 116]) C が simple な g^r_d をもつとき

$$g \leq \pi_0(d, r) := \binom{m_0}{2}(r-1) + m_0\varepsilon_0$$

が成り立つ. ここで $m_0 := [(d-1)/(r-1)]$, $\varepsilon_0 := d - 1 - m_0(r-1)$.

Accola はこれを一般化し, simple な線形系を複数もつときにより強い種数上限を与えた. その特別な場合として次が得られる.

命題 7. (Accola の種数上限 [Ac, Theorem 4.3]) C が 2 つの simple な g^2_d をもつとき

$$g \leq \left[\frac{1}{3}(d^2 - 3d + 3)\right]$$

が成り立つ.

Coppens・加藤 [CK] の手法により次がいえる.

補題 8. C の特異平面モデル Γ $(d = \deg \Gamma \geq 10)$ が次をみたすとする.

(i) Γ の特異点は 2 重点のみ.

(ii) 特異点の個数 $\delta < \frac{1}{4}(d-1)(d-3) - 1$.

このとき $\mathrm{gon}(C) = d - 2$ であり, C 上の d 次以下のペンシルは Γ 上の点射影から得られる.

補題 9. g^1_n を C のペンシルとする. C が $|\Lambda_i - g^1_n| \neq \emptyset$ をみたす 2 つの d 次 simple net Λ_i $(i=1,2)$ をもつとき, C は次数 $2d-n$, 次元 3 以上の simple な（高々 $d-n-1$ 個の基点をもつ）線形系をもつ.

証明. 任意に $D \in g^1_n$ をとると, 次数 $d-n$ の有効因子 E_i $(i=1,2)$ で $D+E_i \in \Lambda_i$ となるものが存在する. このとき $|\Lambda_1 - E_1| = |\Lambda_2 - E_2|$ より $|\Lambda_1 + E_2| = |\Lambda_2 + E_1|$. この線形系は simple で, 基点は高々 $d-n-1$ 個, 次元は 3 以上である. □

系 10. g^1_n $(d-2 \leq n \leq d)$ を C 上のペンシルとする. $g(C) > \pi_0(d+2,3) = [d^2/4]$ のとき, g^1_n を含む simple net は高々1 つである.

Galois 点をもつ平面曲線について次の特徴づけがある.

補題 11. (三浦 [Miu2, Proposition 4]) Γ を d 次平面曲線, P_0 をその Galois 点とする. このとき次は同値.

(a) G_{P_0} の各元は射影変換の制限で得られる.

(b) 適当な座標のもとで $P_0 = (0:0:1)$ であり

$$\Gamma : F_m(X,Y)Z^{d-m} + F_d(X,Y) = 0$$

と表される. ここで $F_i(X,Y) \neq 0$ は i 次斉次多項式, $m = m_{P_0}(\Gamma)$.

さらにこのとき, G_{P_0} は homology $[X, Y, \zeta Z]$（ζ は 1 の原始 $d-m$ 乗根）で定まる射影変換で生成される巡回群である.

(b) の F_m と F_d は共通因子をもたない. また, (b) の平面曲線の $P_0 = (0:0:1)$ 以外の proper な特異点はすべて直線 $L : Z = 0$ 上にあり, そこでの（唯一の）接線は P_0 を通る.

homology については次のことが成り立つ. また, 射影変換群については [B] も参照.

命題 12. (Mitchell [Mit, Theorem 4]) 射影変換がある homology の中心を固定するならば, その軸も集合として固定する. またその逆も成り立つ. とくに, 同じ軸をもつ 2 つの homology の中心は等しい.

これを用いて, 命題 3 が示される.

命題 3 の証明. $P = (0:0:1)$, $P' = (1:0:0)$ が平面曲線 $Y^2Z^{d-2} + X^d + Y^d = 0$ の Galois 点であることは明らかである. Γ が P, P' 以外の Galois 点 Q をもつとすると, Galois 群 G_Q は $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の巡回部分群とみなせる. τ を G_Q の生成元とすると

τ は homology である．さらに P は Γ の唯一の proper な 2 重点であるから, τ は P を固定する．よって命題 12 より, τ は L も固定する．したがって τ は

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A \text{ は 2 次正則行列})$$

の形の行列から定まる射影変換である．さらに, τ が曲線 $Y^2Z^{d-2}+X^d+Y^d=0$ に作用することから A は対角行列であることがわかる．Q は τ の中心であり, $Q \neq P, P'$ なので $Q=(0:1:0)$ であるが, これは Γ の Galois 点ではないので矛盾． $\square$

4 証明の概略

本節以降では Γ は C の d 次平面モデル $(d \geq 10)$ で, 次の条件をみたすとする:

(i) Γ の特異点はすべて 2 重点である．

(ii) $g > [d^2/4]$.

Γ の 2 重点の個数を δ とする（無限に近い特異点も含む）．また, C は Galois ペンシル g^1_n $(n \leq d)$ をもつとする．

まず条件 (i)(ii) から

$$\delta < \frac{1}{4}(d^2-6d+4).$$

がいえる．よって補題 8 から $n \geq \mathrm{gon}(C) = d-2$ であり, g^1_n は Γ の Galois 点 P を中心とした射影から得られる．$m = m_P(\Gamma)\ (=0,1,2)$ とすると $n = d-m$ である．

補題 13. P における Galois 群 G_P は自然に $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の巡回部分群とみなせ, 次数 $n=d-m$ の homology で生成される．

証明. $G_P \subset \mathrm{Aut}(C)$ は g^1_n を固定する．ここで系 10 より, g^2_d は g^1_n を含む唯一の simple net であるから, G_P は g^2_d も固定する．したがって補題 11 より結論が得られる． $\square$

必要なら座標変換して, $P=(0:0:1)$ で G_P は $\sigma = [X, Y, \zeta Z]$ で生成されるとしてよい．ここで ζ は 1 の原始 $d-m$ 乗根. σ の中心は $P=(0:0:1)$, 軸は $L: Z=0$ である．このとき Γ の定義方程式は

$$F_m(X,Y)Z^{d-m} + F_d(X,Y) = 0 \tag{$\star$}$$

（$F_i(X,Y) \neq 0$ は i 次斉次式）とかける．ここで $F_i(X,Y)$ は i 次斉次式で, $F_m(X,Y)$ と $F_d(X,Y)$ は共通因子をもたない．とくに, 次のことがわかる．

補題 14. $Q \neq P$ を Γ の proper な 2 重点とすると, Q は $F_d(X,Y)$ の 2 重因子に対応し, 直線 $L: Z=0$ 上にある. さらに, Γ の Q における接線は直線 $\overline{PQ}$ ただ一つである.

主定理の証明のために, まず次を示す.

補題 15. Γ が直線 $L: Z=0$ 上に Galois 点をもてば, 平面曲線 $Y^2Z^{d-2}+X^d+Y^d=0$ と射影同値である.

証明. Γ が L 上に Galois 点 P' をもつとする. $m' = m_{P'}(\Gamma)$ $(m'=0,1,2)$ とすると, P' からの点射影から C 上のペンシル $g^1_{d-m'}$ が得られる. P' における Galois 群 $G_{P'}$ は $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の巡回部分群である. σ' をその生成元とすると, これは P' を中心とする位数 $d-m'$ の homology である. L' を σ' の軸とすると, $P' \notin L'$ より $L' \neq L$. また, $P' \in L$ より σ は P' を固定するから, 命題 12 より L' も固定する. したがって補題 5 より L' は P を通る. 以上より, $m \geq m'$ として一般性を失わない.

必要なら, Γ と $P=(0:0:1)$, $L: Z=0$ を動かさない座標変換を施して $P'=(1:0:0)$, $\sigma'=[\zeta' X, Y, Z]$（ζ' は 1 の原始 $d-m'$ 乗根）と表されるとしてよい. σ' も Γ に作用するので, Γ の定義方程式は

$$\tilde{F}_{m'}(Y,Z)X^{d-m'}+\tilde{F}_d(Y,Z)=0, \qquad (\star')$$

（$\tilde{F}_j(Y,Z)\neq 0$ は j 次斉次式）ともかける.

もし $m=0$ ならば $m'=0$ であり, P と P' はともに Γ の外 Galois 点である. このとき $(\star')$ の左辺は X^d の項をもち, 他に X を含む項はない. したがって $(\star)$ は

$$Z^d+aX^d+bY^d=0 \quad (a,b\neq 0)$$

の形としてよく, Γ は非特異となるから矛盾. したがって $m \geqq 1$ である. このとき, 方程式 $(\star')$ は X と Z^{d-m} をともに含む項をもたないので, $(\star)$ において $F_m(X,Y)=Y^m$ としてよい. すると Γ の既約性より $F_d(X,Y)$ は Y で割り切れないので, $(\star)$ は

$$Y^mZ^{d-m}+X^d+YF_{d-1}(X,Y)=0 \quad (F_{d-1}(X,Y) \text{ は } d-1 \text{ 次斉次式})$$

の形としてよい. $P'=(1:0:0)$ は Γ の外 Galois 点なので, $F_{d-1}(X,Y)$ は Y のみの式であり $F_{d-1}(X,Y)=cY^{d-1}$ $(c\in\mathbb{C})$ とかける. Γ の特異点は 2 重点のみなので $c\neq 0$ であるから, Γ は平面曲線

$$Y^mZ^{d-m}+X^d+Y^d=0$$

と射影同値である. Γ は 2 重点をもつから $m=2$ である. □

5　$n = d-2$ の場合

この節では $n = d-2$ とする．このとき P は Γ の Galois 2 重点である．補題 14 より, 他の proper な 2 重点はすべて $L : Z = 0$ 上にあるので, 補題 15 と命題 3 から他に Galois 2 重点はないことがわかる．さらに次がいえる．

主張 1. $\mathrm{Aut}(C)$ は自然に $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の部分群とみなせ, C の任意の自己同型は P を固定する．

証明. C 上の $d-2$ 次のペンシルは, Γ の 2 重点からの点射影によって得られる．Γ の Galois 2 重点は P だけなので, $d-2$ 次の Galois ペンシルは g^1_{d-2} だけである．よって $\mathrm{Aut}(C)$ は g^1_{d-2} を固定する．g^2_d は g^1_{d-2} を含む唯一の simple net なので, $\mathrm{Aut}(C)$ は g^2_d も固定する．したがって $\mathrm{Aut}(C)$ は $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の部分群とみなせ, P を固定する．　□

このことを用いて次が示せる．

主張 2. Γ が P 以外の Galois 点をもてば, 曲線 $Y^2Z^{d-2} + X^d + Y^d = 0$ と射影同値である．

証明. Γ が P 以外の Galois 点 Q をもつとする．補題 13 より, Q における Galois 群 G_Q は $\mathrm{Lin}(\Gamma)$ の巡回部分群とみなせる．さらに, G_Q を生成する homology τ の軸を M とすると, 主張 1 から τ は $P \neq Q$ を固定するので $P \in M$ である．すると M は集合として σ で固定されるので, 命題 12 より Q も σ で固定される．したがって $Q \in L$ となり, 補題 15 より主張が成り立つ．　□

6　$n = d-1, d$ の場合

この節では $n = d-1$ または d とする．$n = d-1$ のとき P は Γ の（非特異な）内 Galois 点, $n = d$ のとき P は Γ の外 Galois 点である．さらに, Γ は Galois 2 重点をもたないとしてよい．このとき, P が Γ の唯一の Galois 点であることを示す．

(1) Γ の 2 重点 Q を任意にとると, 補題 14 より $Q \in L$, かつ Γ の Q における接線はただ一つであり, その接線 T_Q は P を通る．したがって, Γ の Galois 点は必ず 2 重点での接線上にある．

(2) Γ が Q 以外の proper な 2 重点 Q' をもつとき, (1) より Q' も L 上にあり, 接線 $T_{Q'}$ は P を通る．$T_Q \neq T_{Q'}$ であるから, このとき Γ の Galois 点は 2 本の接線の交点 P しかない．よって, 以下では Γ の proper な 2 重点は Q だけであるとしてよい．

(3) $P \in \Gamma$ とすると $\Gamma \cap T_Q = \{P, Q\}$ なので, (1) より P 以外に内 Galois 点はない. 外 Galois 点 P' があるとすると, $G_{P'}$ の生成元 σ' は P' を中心とする homology である. P, Q はそれぞれ Γ のただ一つの内 Galois 点, proper な 2 重点なので, σ' は P, Q をそれぞれ固定し, 直線 $\overline{PQ} = T_Q$ も集合として固定する. $P' \neq P, Q$ なので T_Q は σ' の軸であるが, (1) よりこれは σ' の中心 P' を通るので矛盾. よって $P \notin \Gamma$ である. したがって, Γ は内 Galois 点をもたないとしてよい. このとき $(\star)$ より Γ は

$$Z^d + F_d(X, Y) = 0$$

の形の定義方程式をもつ.

(4) Γ は Q 以外に proper な特異点をもたないので, 補題 14 より $F_d(X, Y)$ はただ一つの 2 重因子と $d-2$ 個の相異なる単純因子をもつ. これら $d-2$ 個の単純因子のそれぞれは Γ と d 重に接する直線を定めるので, Γ の位数 $d-2$ の変曲点で, そこでの接線が P を通るものが $d-2$ 個得られる.

(5) Γ が P 以外の外 Galois 点 P'' をもつとすると, $P'' \notin L$ なので σ の作用による P'' の軌道は d 点からなる. 同様に, $G_{P''}$ の生成元 σ'' の作用による P の軌道も d 点からなる. これら $2d$ 個の点は Γ の相異なる外 Galois 点である. したがって (4) より, Γ は位数 $d-2$ の変曲点を少なくとも $2d(d-2)$ 個もつ. 異なる Galois 点 P_1, P_2 が同じ変曲点 R を与えるとし, G_{P_i} を生成する homology の軸を L_i とすると, $R \in L_1 \cap L_2$ である. また, 命題 14 より $Q \in L_1 \cap L_2$. よって $L_1 = L_2 = \overline{QR}$ であり, 命題 12 より $P_1 = P_2$ となり矛盾. したがって, $2d(d-2)$ 個の変曲点はすべて相異なる.

(6) Γ の変曲点の総次数を $W(\Gamma)$ で表す:

$$W(\Gamma) = \sum_{R \in \mathrm{Reg}(\Gamma)} (I_R(\Gamma, T_R(\Gamma)) - 2).$$

(5) と変曲点公式 ([N, Theorem 1.5.10] などを参照) より

$$(d-2) \cdot 2d(d-2) \leq W(\Gamma) \leq 6(g-1) + 3d < 3d(d-3) + 3d = 3d(d-2)$$

であるから $d \leq 3$ となり矛盾. したがって, Γ は P 以外の Galois 点をもたない.

7 Galois ペンシルをもつ曲線の自己同型群

最後に Galois ペンシルをもつ曲線の自己同型群について述べる. Γ が非特異 d 次平面曲線 $(d \geq 4)$ のとき, Γ の次数 d の平面モデルは Γ ただ一つであり, そのことから自然に $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma)$ となる.

以下, C, Γ は Theorem 2 と同様とし, C は次数 d 以下の Galois ペンシルをもつとする．この場合, C の次数 d の平面モデルは Γ だけとは限らないが, やはり自然に $\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma)$ となる（系 4）．

系 4 の証明．定理 2 と命題 3 から, $\mathrm{Aut}(C)$ は次数 d 以下の各 Galois ペンシルを固定する．よって, 系 10 より, $\mathrm{Aut}(C)$ は Γ を定める simple net も固定する．したがって結論が得られる． $\square$

参考文献

[Ac] R. D. M. Accola, On Castelnuovo's inequality for algebraic curves I, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 357–373.

[Ar] T. Arakawa, Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets, Osaka J. Math. **37**, No. 4 (2000), 823–846.

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris: Geometry of Algebraic Curves Vol. I, Grundlehren 267, Springer-Verlag, 1985.

[B] H. Blichfeldt, Finite Collineation Groups: With an Introduction to the Theory of Groups of Operators and Substitution Groups, Univ. of Chicago Press, Chicago (1917).

[CK] M. Coppens, T. Kato: The gonality of smooth curves with plane models, Manuscripta Math. **70** (1990), 5-25.

[F] S. Fukasawa, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, III, Geom. Dedicata **146**, 920 (2000).

[Ha] T. Harui, Automorphism groups of smooth plane curves, arXiv:math/1306.5842.

[Mit] H. H. Mitchell, Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **12**, no. 2 (1911), 207–242.

[Miu1] K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, Bull. Austral. Math. Soc. **62**, no. 2 (2000), 193–204.

[Miu2] K. Miura, Galois points for plane curves and Cremona transformations, J. Algebra **320**, no. 3 (2008), 987–995.

[MY] K. Miura, H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226**, no. 1 (2000), 283–294.

[N] M. Namba, Geometry of projective algebraic curves, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 88. Marcel Dekker Inc., New York (1984).

[Y] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239**, no. 1 (2001), 340–355.