Linear automorphism groups of irreducible plane curves

春井　岳　(高知工科大学) *

1　背景と主結果

d は 4 以上の整数，Γ は次数 d の既約平面曲線とし

$$\begin{aligned}\mathrm{Lin}(\Gamma) &:= \{\sigma \in \mathrm{PGL}(3,\mathbb{C}) \mid \sigma(\Gamma)=\Gamma\}\\ \mathrm{Lin}_0(\Gamma) &:= \{\sigma \in \mathrm{Lin}(\Gamma) \mid \sigma \text{ は対角行列で代表される}\}\end{aligned}$$

とする．C を Γ の非特異モデルとするとき，自然に $\mathrm{Lin}(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(C)$ とみなせる．

Γ 自身が非特異ならば，$\mathrm{Aut}(\Gamma)=\mathrm{Lin}(\Gamma)$ であり，自己同型群について次のような分類が得られる．定理の中で，$\mathrm{PBD}(2,1)$ は

$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A'}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ (A' \text{ は 2 次正則行列}, \ \alpha \in \mathbb{C}^*)$$

の形の行列から定まる射影変換全体のなす $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の部分群であり，$\rho : \mathrm{PBD}(2,1) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ $([A] \mapsto [A'])$ は自然な全射である．

定理 1.1. ([H, Theorem 2.1]) Γ を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線，G を Γ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ の部分群とする．G は $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の部分群とみなされる．このとき次のうち一つが成り立つ．

(a-i) G は Γ 上の 1 点を固定する．さらに G は位数 $d(d-1)$ 以下の巡回群.

(a-ii) G は Γ 上にない 1 点を固定する．さらに可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \to & \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{PBD}(2,1) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) & \to 1 & \text{(完全)} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 \to & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \to 1 & \text{(完全)}, \end{array}$$

が存在し，$N=\mathrm{Ker}(\rho|_G)$, $G'=\mathrm{Im}(\rho|_G)$ について以下のことが成り立つ．

*e-mail: takeshi@cwo.zaq.ne.jp, harui.takeshi@kochi-tech.ac.jp

(1) N は巡回群で，その位数は d の約数.

(2) G' は巡回群 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, 二面体群 D_{2l}, 4 次交代群 A_4, 4 次対称群 S_4, 5 次交代群 A_5 のうち一つと共役.

(3) $G' \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ならば $l \leq d-1$，$G' \simeq D_{2l}$ ならば $l|\,d-2$ あるいは N が自明となる.

とくに $|G| \leq \max\{2d(d-2), 60d\}$ が成り立つ.

(b-i) $\mathrm{Aut}(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(F_d)$. ここで F_d は Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$. とくに $|G| \leq 6d^2$.

(b-ii) $\mathrm{Aut}(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}(K_d)$. ここで K_d は Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1}+YZ^{d-1}+ZX^{d-1} = 0$. とくに，$d \geq 5$ のとき $|G| \leq 3(d^2 - 3d + 3)$.

(c) G は $A_5, A_6, H_{168} = \mathrm{Aut}(K_4)$ (K_4 は Klein4 次曲線), H_{216} あるいはその部分群 H_{36}, H_{72} のうち一つと同型. ここで H_{216} は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \text{ および } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

(ω は 1 の原始 3 乗根) で表される射影変換 g_1, g_2, g_3, g_4 で生成される位数 216 の群. とくに $|G| \leq 360$.

注 1.2. (c) において，H_{36} は g_1, g_2, g_3 で生成される位数 36 の群. また H_{72} は $u = (g_1 g_4 g_1^{-1})^2$ として，g_1, g_2, g_3, u で生成される位数 72 の群.

この定理から，非特異平面曲線の自己同型群の位数について sharp な上限が得られる. では Γ が特異点をもつときはどうなるか？　これが本稿の主題である.

定義 1.3. ([BD, (1.1)]) ある斉次座標の下で，Γ が多項式

$$aX^{d-k}Y^k + bZ^d + \sum c_{mnp} X^m Y^n Z^p$$
$$\left(a, b \in \mathbb{C}^*, c_{mnp} \in \mathbb{C}, 0 < k < d, m, n, p > 0, m+n+p = d, \frac{m}{n} = \frac{d-k}{k}\right)$$

によって定義されるとき，Γ を bad curve とよぶ.

命題 1.4. ([BD, (1.4), Section 3]) (1) Γ が bad curve でないとき，$\mathrm{Lin}(\Gamma)$ は有限群である. さらに d に依存しない定数 $c > 0$ があって $|\mathrm{Lin}(\Gamma)| \leq cd^2$ が成り立つ. またこのとき，$|\mathrm{Lin}_0(\Gamma)| \leq d^2$ である.
(2) bad curve はすべて有理曲線であり，proper な特異点は 1 点か 2 点である.

本稿の主結果は次の定理である：

定理 1.5. Γ を既約な平面 d 次曲線とする．$g(\Gamma) \geq 2$ ならば，$|\mathrm{Lin}(\Gamma)| \leq 6d^2$ が次の例外を除いて成り立つ：

- $d = 4$, Γ は Klein 4 次曲線 $K_4 : XY^3 + YZ^3 + ZX^3 = 0$ と射影同値 (このとき $|\mathrm{Lin}(\Gamma)| = 168$).
- $d = 6$, Γ は Wiman 6 次曲線 W_6 : $10X^3Y^3 + 9X^5Z + 9Y^5Z - 45X^2Y^2Z^2 - 135XYZ^4 + 27Z^6 = 0$ と射影同値 (このとき $|\mathrm{Lin}(\Gamma)| = 360$).

さらに，$|\mathrm{Lin}(\Gamma)| = 6d^2$ なのは Γ が Fermat 曲線 F_d あるいは Hesse 6 次曲線 H_6 : $X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$ と射影同値であるとき，そのときに限る.

注 1.6. この定理は，Γ が非特異の場合には既知である (cf. [H, Theorem 2.3]).

証明には以下の結果を用いる.

補題 1.7. C を種数 $g \geq 0$ の非特異曲線，G を C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする.

(1) ([Oi, Theorem 1]) $g \geq 2$ のとき，G が有限集合 $S \neq \emptyset$ を集合として固定するならば
$$|G| \leq 12(g-1) + 6|S|$$
が成り立つ.

(2) ([Ar, Theorem 3]) G が 3 つの有限集合 $S_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2, 3)$ を集合として固定するならば
$$|G| \leq 2(g-1) + |S_1| + |S_2| + |S_3|$$
が成り立つ.

(2) は [Ar] では $g \geq 2$ の場合に証明されているが，同じ方法で $g \leq 1$ でも成り立つことが示される．また (1) は次のように拡張できる：

補題 1.8. Γ を幾何種数 $g \geq 2$ の既約代数曲線とする．$G \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ が有限集合 $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \subset \Gamma$ を集合として固定するとき，$m = \max\{m_{P_i}(\Gamma)\}$ とすると
$$|G| \leq 12(g-1) + 6m|S|$$
が成り立つ.

証明. $f : C \to \Gamma$ を Γ の正規化とすると，G は自然に $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とみなせ，$f^{-1}(S)$ を集合として固定する．$|f^{-1}(S)| \le m|S|$ なので，補題 1.7 から主張が従う． □

記号

3 変数斉次 1 次式 H_1, H_2, H_3 によって定まる射影変換

$$(X : Y : Z) \mapsto (H_1(X,Y,Z) : H_2(X,Y,Z) : H_3(X,Y,Z))$$

を $[H_1, H_2, H_3]$ で表す．また 3 点 $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ をそれぞれ P_1, P_2, P_3 で，直線 $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ をそれぞれ L_1, L_2, L_3 で表す.

2 Fermat-Klein 曲線

この節では，主定理の証明の際に重要となる特殊な平面曲線について調べる．

$d \ge 1$ に対し，曲線

$$K_{d,m} : X^m Y^{d-m} + Y^m Z^{d-m} + Z^m X^{d-m} = 0 \quad (d \ge 2m)$$

を (d,m) 型の Fermat-Klein 曲線とよぶ．これは既約曲線である (cf. [Os, Section 60])．$K_{d,0}$ は Fermat 曲線，$K_{d,1}$ は Klein 曲線である．$m \ge 2$ のとき，$P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$ は $K_{d,m}$ の m 重点であり，proper な特異点は他にはない．したがって，命題 1.4 より任意の m について $K_{d,m}$ は bad curve ではないので，$\mathrm{Lin}_0(K_{d,m})$ は有限群である．この群について次のことが成り立つ：

命題 2.1. $m=0$ のとき $|\mathrm{Lin}_0(K_{d,m})| = d^2$, $m \ge 1$ のとき

$$|\mathrm{Lin}_0(K_{d,m})| \le d(d-3) - 3m(m-2)$$

が成り立つ.

証明. $m=0$ のときは既知なので $m \ge 1$ の場合を示す．3 点 $P_1, P_2, P_3 \in K_{d,m}$ は $\mathrm{Lin}_0(K_{d,m})$ の固定点である．$K_{d,m}$ の非特異モデルを $\tilde{K}_{d,m}$ で表すと，$\mathrm{Lin}_0(K_{d,m})$ は自然に $\mathrm{Aut}(\tilde{K}_{d,m})$ の部分群とみなせ，P_i $(i=1,2,3)$ に対応する $\tilde{K}_{d,m}$ 上の点集合 S_i $(i=1,2,3, |S_i| \le m)$ を集合として固定する（$GS_i = S_i$）．また

$$g(K_{d,m}) \le \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - 3 \cdot \frac{1}{2}m(m-1) = \frac{1}{2}\{d(d-3) - 3m(m-1)\} + 1$$

である．したがって補題 1.7(2) より

$$\begin{aligned} |G_0| &\le 2(g(K_{d,m}) - 1) + |S_1| + |S_2| + |S_3| \\ &\le d(d-3) - 3m(m-1) + 3m \\ &= d(d-3) - 3m(m-2) \end{aligned}$$

がわかる． □

3　主定理の証明の概略

この節では定理 1.5 の証明の概略を述べる．$G = \mathrm{Lin}(\Gamma)$ は $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群なので，Mitchell の結果 (cf. [M, Section 1-10], [DI, Theorem 4.8]) により次のうち一つが成り立つ：

(A) G はある直線 L とその直線上にない 1 点 P をそれぞれ固定する．

(B) G は三角形 (共点でない 3 本の直線) を固定する．

(C) G は定理 1.1(c) の群の一つ．とくに $|G| \leq 360$.

(A) の場合

Γ の正規化を $f : C \to \Gamma$ とし，$S := \Gamma \cap L = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ $(n \leq d)$ とおく．Γ の Q_i における重複度を m_i とすると $\sum_{i=1}^{n} m_i \leq d$ であり，$f^{-1}(Q_i)$ は高々m_i 点からなるので $f^{-1}(S) \subset C$ は高々d 点からなる．G は自然に $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とみなせ，$f^{-1}(S)$ を集合として固定するので，補題 1.7(1) より

$$|G| \leq 12(g-1) + 6|f^{-1}(S)| \leq 6d(d-3) + 6d = 6d(d-2) < 6d^2$$

が成り立つ．

(B) の場合

G は三角形 $\Delta = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ を固定するとしてよい．このとき自然な完全列

$$1 \to \mathrm{Lin}_0(\Gamma) \to G \to S_3 \quad (\star)$$

が得られる．

F を Γ の定義多項式とする．F の項 $cX^iY^jZ^k$ に対して，$\max\{i, j, k\}$ をその項の指数といい，最大指数の項の総和を F の核ということにする．いま F の核は

$$aF_m(Y,Z)X^{d-m} + bF_m(Z,X)Y^{d-m} + cF_m(X,Y)Z^{d-m}$$

（$F_m \neq 0$ は 2 変数斉次 m 次式）の形としてよい．G の各元は F の核を定数倍を除いて保つ．

d 次の斉次既約多項式 $F(X,Y,Z)$ は既約性から高々2 変数（例えば X, Y）のみを含む項をもつ．その項の指数は少なくとも $d/2$．したがって上の式において $m \leq d/2$ である．

二つの場合に分けて考える．

(B-1) F_m が単項式でないとき

$F_m(S,T)$ が 2 つの項 S^iT^{m-i} と S^jT^{m-j} $(0 \le i < j \le m)$ を含むとする．任意に $\sigma \in \mathrm{Lin}_0(\Gamma)$ をとると $\sigma = [\alpha X, \beta Y, Z]$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*)$ とかける．σ は F の核を定数倍を除いて保つので

$$\beta^i\alpha^{d-m} = \beta^j\alpha^{d-m} = \alpha^{m-i}\beta^{d-m} = \alpha^{m-j}\beta^{d-m} = \alpha^i\beta^{m-i} = \alpha^j\beta^{m-j}$$

が成り立つ．とくに $\alpha^{j-i} = \beta^{j-i} = 1$ が従う．したがって，$m_0 = j-i$ とおくと $1 \le m_0 \le m$ で，α, β はともに 1 の m_0 乗根である．σ は任意だったので，ζ_0 を 1 の原始 m_0 乗根とすると

$$\mathrm{Lin}_0(\Gamma) \subset \{[\zeta_0^iX, \zeta_0^jY, Z] \mid 0 \le i, j \le m_0 - 1\}$$

となる．とくに

$$|\mathrm{Lin}_0(\Gamma)| \le m_0^2 \le m^2 \le \frac{d^2}{4}$$

が従う．したがって $(\star)$ より $|G| \le (3/2)d^2$ であることがわかる．

(B-2) F_m が単項式のとき

このとき，$F_m(S,T) = S^jT^k$ $(0 \le j, k \le m, j+k = m)$ とかけるので，F の核 F_0 は

$$F_0 = aX^iY^jZ^k + bY^iZ^jX^k + cZ^iX^jY^k$$

とかける．ここで $i = d - m$. $j \ge i \ge k$ として一般性を失わない．このとき

$$\begin{aligned} F_0 &= X^kY^kZ^k(aX^{m'}Y^{d'-m'} + bY^{m'}Z^{d'-m'} + cZ^{m'}X^{d'-m'}) \\ &\quad (m' = i - k, d' = i + j - 2k = d - 3k) \end{aligned}$$

となる．したがって，$\mathrm{Lin}_0(\Gamma)$ は平面曲線

$$\Gamma' : aX^{m'}Y^{d'-m'} + bY^{m'}Z^{d'-m'} + cZ^{m'}X^{d'-m'} = 0$$

にも作用する．ここで $d' = 0$ とすると $d = 3k$, さらに $i = j = k > 0$ より $m = 2k$ となり, $d \ge 2m$ に反する．よって $d' \ge 1$.

曲線 Γ' は Fermat-Klein 曲線 $\Gamma_{d',m'}$ と射影同値であり

$$\begin{aligned} &d' = d - 3k \le d, \\ &d' - 2m' = (i + j - 2k) - 2(i - k) = j - i \ge 0 \end{aligned}$$

である．よって命題 2.1 より，$m' \ge 1$ ならば

$$\begin{aligned} |\mathrm{Lin}_0(\Gamma)| &\le |\mathrm{Lin}_0(\Gamma_{d',m'})| \le d'(d'-3) - 3m'(m'-2) \\ &\le d(d-3) + 3 < d^2, \end{aligned}$$

$m' = 0$ ならば $|\mathrm{Lin}_0(\Gamma)| \le |\mathrm{Lin}(\Gamma_{d',0})| = d'^2 \le d^2$ が成り立つ．したがって $(\star)$ より $|G| \le 6d^2$ がいえる．

$|G| = 6d^2$ とすると (B-2) で $m' = 0$ かつ $d' = d$ となり，$\mathrm{Lin}_0(\Gamma)$ は d 次 Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ に作用する．さらに位数の比較により $\mathrm{Lin}_0(\Gamma) = \mathrm{Lin}_0(F_d)$ がいえ，このことから容易に Γ が F_d と射影同値であることが示される．

(C) の場合

このとき $|G| \le 360$ である．また $g = g(\Gamma)$ とおくと，Hurwitz の定理により

$$\frac{|G|}{g-1} = 84, 48, 40, 36, 30, \frac{132}{5} \quad \text{または} \quad \frac{|G|}{g-1} \le 24$$

が成り立つ．

$d \ge 8$ ならば $|G| \le 360 < 6d^2$ なので $d \le 7$ としてよい．

$|G| \ge 6d^2$ とする．$d = 5, 7$ のとき，$(d, |G|) = (5, 168), (5, 216), (5, 360)$ または $(7, 360)$ である．$d = 5$ のとき $g \le 6$ なので，上の条件からこの場合は起こりえないことがわかる．$d = 7$ なら $g \le 15$ なので，上の条件から $g = 9, 10$ または 12．このとき Γ の特異点は高々6 点，重複度は高々4 である．G は $\mathrm{Sing}(\Gamma)$ を集合として固定するので，補題 1.8 より

$$360 = |G| \le 12(g-1) + 6 \cdot 4 \cdot 6 \le 276$$

となり矛盾．

$d = 6$ のとき，$216 \le |G| \le 360$ より $G = A_6$ または H_{216} である．

$G = A_6$ のとき，Γ が Wiman 6 次曲線 W_6 と射影同値でなければ, $W_6 \cap \Gamma$ は高々36 点からなる W_6 の部分集合で，G によって固定される．したがって補題 1.7(1) より

$$360 = |G| \le 12 \cdot 9 + 6 \cdot 36 = 324$$

となり矛盾．よって Γ は W_6 と射影同値である．

$G = H_{216}$ のとき，その生成元の作用をみることにより，Γ は Hesse 6 次曲線 $H_6 : X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$ と射影同値であることが示される．

$d = 4$ のとき，Hurwitz の定理から $|G| = 168$ となる．Γ が Klein 4 次曲線 K_4 と射影同値でなければ, $K_4 \cap \Gamma$ は高々16 点からなる K_4 の部分集合で，G によって固定される．したがって再び補題 1.7(1) より

$$168 = |G| \le 12 \cdot 2 + 6 \cdot 16 = 120$$

となり矛盾．よって Γ は K_4 と射影同値である．

4　応用

主定理を応用して，非特異曲線の自己同型群の位数を評価できる場合がある．

C を非特異曲線，Γ を C の次数 d の平面モデルとする．射影同値を除いて，Γ が C の次数 d の唯一の平面モデルならば，自然に $\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma)$ が成り立つ．このような状況を保証する条件として，次の結果がある：

命題 4.1. ([Ac, Theorem 4.3] (Accola, 1979)) 非特異曲線 C が 2 つの simple な g_d^2 をもつとき

$$g(C) \leq \frac{1}{3}(d^2 - 3d + 3)$$

が成り立つ．

とくに，この命題と定理 1.5 から次が得られる：

系 4.2. C を種数 $g \geq 2$ の非特異曲線とする．C が次数 d の平面モデル Γ をもち

$$g > \left[\frac{1}{3}(d^2 - 3d + 3)\right]$$

であるとき，$\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Lin}(\Gamma)$．さらに $C \not\simeq K_4, W_6$ ならば $|\mathrm{Aut}(C)| \leq 6d^2$ が成り立つ．

参考文献

[Ac] R. D. M. Accola, On Castelnuovo's inequality for algebraic curves I, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 357–373.

[Ar] T. Arakawa, Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets, Osaka J. Math. **37**, No. 4 (2000), 823–846.

[BD] M. Bradley and H. D'Souza, Automorphism groups of plane curves, Comm. in Alg. **32** no. 8 (2004), 2885–2894.

[DI] I. Dolgachev and V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, Algebra, Arithmetic, and Geometry, Progress in Mathematics Volume **269** (2009), 443–548.

[H] T. Harui, Automorphism groups of smooth plane curves, arXiv:math/ 1306.5842.

[M] H. H. Mitchell, Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **12**, no. 2 (1911), 207–242.

[Oi] K. Oikawa, Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself, Kodai Math. Sem. Rep. **8**, no. 1 (1956), 23–30.

[Os] A. M. Ostrowski, On multiplication and factorization of polynomials. II. Irreducibility discussion, Aequationes Math. **14** (1976), 1–32.