On a classification of automorphism groups of smooth plane curves*

春井　岳†

1　概要と背景

概要

講演の主題は，非特異平面曲線の自己同型群の研究である．C を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線とする．このとき，C の自己同型群についていくつかの問題が考えられる．

問題. (1) C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の位数の上限を与えよ．
(2) 位数の大きい自己同型群をもつ非特異平面曲線を分類せよ．
(3) $\mathrm{Aut}(C)$ の群構造を分類せよ．

これらの問題に対し，定理 3.2, 定理 3.4, 定理 3.1 でそれぞれ解答を与える．

背景

種数 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面 ($\mathbb{C}$ 上の非特異既約な射影的代数曲線) の自己同型群は有限群であり，その位数は $84(g-1)$ 以下であることが知られている (定理 2.1 を参照).

群構造については，超楕円曲線の場合には分類されている ([BEM], [BGG] など). 超楕円的でない曲線の自己同型群に関しては，種数 3(非特異平面 4 次曲線) の場合の分類 ([He], [KKu], [KKi]) をはじめ，種数の小さい場合 ([Br, Chapter 5]) や最大位数 $84(g-1)$ の場合などについてはある程度わかっている ([Ma], [K] など).

非特異平面曲線については，以前に加藤崇雄，米田二良，大渕朗各氏との共同研究により，[HKKO] で非特異平面曲線の間の自己同型，[HKO] で自己同型による商曲線の分類を行った．

*arXiv:math.AG/1306.5842
†工学院大学講師, e-mail: takeshi@cwo.zaq.ne.jp, kt13459@ns.kogakuin.ac.jp

2　コンパクトリーマン面の自己同型群

X を種数 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面とする．X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の位数についてはよく知られた上限が存在する：

定理 2.1. (Hurwitz [Hu]) $\mathrm{Aut}(X)$ は有限群で $|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1)$.

また，Greenberg の定理 ([G, Theorem 4]) からどんな有限群もあるコンパクトリーマン面の自己同型群となる．

Hurwitz の上限は Riemann-Hurwitz の公式から導かれる．同様に，不変部分集合をもつような自己同型群の部分群について，次のような位数の評価式が得られる．

定理 2.2. (及川 [O], 荒川 [A]) G を $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群とする．

(1) ([O, Theorem 1]) G が X の有限部分集合 S ($|S| = k \geq 1$) を固定する ($G(S) = S$) とき, $|G| \leq 12(g-1) + 6k$ が成り立つ.

(2) ([A, Theorem 3]) G が X の交わりのない 3 つの有限部分集合 S_i ($|S_i| = k_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$) をそれぞれ固定するとき, $|G| \leq 2(g-1) + k_1 + k_2 + k_3$ が成り立つ.

これらの不等式を用いることで，特別なコンパクトリーマン面, 例えば Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ や Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の自己同型群の構造を決定することができる．以下，射影変換 $(X : Y : Z) \mapsto (H_1(X,Y,Z) : H_2(X,Y,Z) : H_3(X,Y,Z))$ (H_1, H_2, H_3 は 1 次斉次式) を簡潔に $[H_1(X,Y,Z), H_2(X,Y,Z), H_3(X,Y,Z)]$ で表す.

命題 2.3. Fermat 曲線 F_d ($d \geq 4$) の自己同型群は 4 つの変換 $[Y, Z, X]$, $[X, Z, Y]$, $[\zeta X, Y, Z]$ および $[X, \zeta Y, Z]$ (ζ は 1 の原始 d 乗根) で生成され，3 次対称群 S_3 と巡回群の直積 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$ の半直積である:$\mathrm{Aut}(F_d) \simeq S_3 \ltimes (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2$．とくに $|\mathrm{Aut}(F_d)| = 6d^2$.

命題 2.4. $d \geq 5$ のとき，Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の自己同型群は 2 つの変換 $[Y, Z, X]$ と $[\xi^{-(d-2)}X, \xi Y, Z]$ (ξ は 1 の原始 $(d^2 - 3d + 3)$ 乗根) で生成され，2 つの巡回群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}$ の半直積である：$\mathrm{Aut}(K_d) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}$．とくに $|\mathrm{Aut}(K_d)| = 3(d^2 - 3d + 3)$. また $d = 4$ のときは $|\mathrm{Aut}(K_4)| = 168$ である．

注 2.5. 命題 2.3 は古くから知られている．命題 2.4 も既知に違いないと思われるが，筆者は証明を見たことがない.

また，とくに曲線上の 1 点を固定する場合には次のことが知られている.

命題 2.6. $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 G が X 上の 1 点を固定すれば，G は巡回群である.

3 主結果

C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線，G を C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする．このとき G は自然に射影変換群 $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ の部分群とみなされる．

主定理を述べるためいくつか用語を定める．

単項式 $cX^iY^jZ^k$ $(c \neq 0)$ に対して，$\max\{i, j, k\}$ をその式の指数とよび，d 次斉次式 $F = F(X, Y, Z)$ に対して F の最大指数の項の総和を F の核とよぶことにする．F の核を除いた各項を低指数の項という．

二つの平面曲線 C, C_0 に対して，ある斉次座標のもとで

(1) C の定義多項式の核は C_0 の定義多項式

(2) $\mathrm{Aut}(C)$ は $\mathrm{Aut}(C_0)$ の部分群

が成り立つとき，C は C_0 の子孫であるという．

$(2, 1)$ ブロック型の正則行列

$$M = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ (A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}^*)$$

で代表される射影変換の全体を $\mathrm{PBD}(2, 1)$ で表す．このとき自然な射影 $\rho : \mathrm{PBD}(2, 1) \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ $([M] \mapsto [A])$ がある．

これらの用語を用いて，非特異平面曲線の自己同型群を次のように分類することができる．

定理 3.1. C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線，G を C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする．G は $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の部分群とみなされる．このとき次のうち一つが成り立つ．

(a-i) G は C 上の 1 点を固定する．さらに G は位数 $d(d-1)$ 以下の巡回群.

(a-ii) G は C 上にない 1 点を固定する．さらに可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \to \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{PBD}(2,1) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) & \to 1 & \text{(完全)} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 \to N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \to 1 & \text{(完全)}, \end{array}$$

が存在し，$N = \mathrm{Ker}(\rho|_G)$, $G' = \mathrm{Im}(\rho|_G)$ について以下のことが成り立つ．

(1) N は位数が d を割る巡回群.

(2) G' は巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 二面体群 D_{2m}, 4 次交代群 A_4, 4 次対称群 S_4, 5 次交代群 A_5 のうち一つと共役.

(3) $G' \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ならば $m \leq d-1$，$G' \simeq D_{2m}$ ならば $m | d-2$ あるいは N が自明となる．

とくに $|G| \leq \max\{2d(d-2), 60d\}$ が成り立つ．

(b-i) C は Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ の子孫である．とくに $|G| \leq 6d^2$．

(b-ii) C は Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ の子孫である．とくに，$d \geq 5$ のとき $|G| \leq 3(d^2 - 3d + 3)$．

(c) G は $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の原始的有限部分群, つまり 5 次交代群 A_5, 6 次交代群 A_6, 位数 168 の Klein 群, 位数 216 の Hesse 群あるいはその位数 36 か 72 の部分群のうち一つと共役．とくに $|G| \leq 360$．

この定理により，非特異平面曲線の自己同型群について位数の上限が与えられる．さらに，次数 d を固定したとき，最大位数の自己同型群をもつ非特異平面曲線の分類が得られる．

定理 3.2. C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線とするとき，次の二つの場合を除いて $|\mathrm{Aut}(C)| \leq 6d^2$ が成り立つ：

(i) $d = 4$ かつ C は 4 次の Klein 曲線 $XY^3 + YZ^3 + ZX^3 = 0$ と射影同値．このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は位数 168 の Klein 群と共役である．

(ii) $d = 6$ かつ C は 6 次の Wiman 曲線

$$10X^3Y^3 + 9(X^5 + Y^5)Z - 45X^2Y^2Z^2 - 135XYZ^4 + 27Z^6 = 0$$

と射影同値．このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は 6 次交代群 A_6(位数 360) と共役である．

さらに，$d \neq 6$ のとき $|\mathrm{Aut}(C)| = 6d^2$ となるのは C が Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ と射影同値であるとき，またそのときに限る．とくに，各 $d \geq 4$ に対し, 最大位数の自己同型群をもつ非特異平面曲線は射影同値を除いてただ一つ存在する．

注 3.3. (1) この定理は次数 d が小さいときには既知の結果である．まず $d = 4$ の場合と，6 次の Wiman 曲線が 6 次交代群 A_6 を自己同型群にもつことは古典的に知られていた (see [Bl])．また，$d = 6$ のとき A_6 を自己同型群にもつ曲線が (射影同値を除いて)Wiman 曲線しかないことは [DIK] で示されている．さらに，$d = 5, 7, 11, 13, 17, 19$ の場合が [KMP] で証明されている．なお，Pambianco はプレプリント [P] で任意の次数 $d \geq 4$ についてこの定理を扱っているが，証明は概略しか述べておらず不十分に見える．
(2) $d = 6$ のとき, 方程式

$$X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$$

で定まる非特異 6 次曲線は位数 216 の Hesse 群を自己同型群にもつ．射影同値を除いて，位数 $216 = 6^3$ の自己同型群をもつ 6 次曲線は Fermat 曲線とこの曲線だけである．

曲線の次数が高い場合には，定理 3.1 を用いて位数の大きい自己同型群をもつ曲線を分類することができる．

定理 3.4. C を次数 $d \geq 60$ の非特異平面曲線とする．$|\mathrm{Aut}(C)| > d^2$ ならば C は次の曲線のうち一つと射影同値である．

(i) Fermat 曲線 $F_d : X^d + Y^d + Z^d = 0$ ($|\mathrm{Aut}(F_d)| = 6d^2$).

(ii) Klein 曲線 $K_d : XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0$ ($|\mathrm{Aut}(K_d)| = 3(d^2 - 3d + 3)$).

(iii) 曲線 $Z^d + XY(X^{d-2} + Y^{d-2}) = 0$. このとき短完全列

$$1 \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(C) \to D_{2(d-2)} \to 1$$

が存在する．とくに $|\mathrm{Aut}(C)| = 2d(d-2)$.

(iv) Fermat 曲線の子孫 $X^{3m} + Y^{3m} + Z^{3m} - 3\lambda X^m Y^m Z^m = 0$ ($d = 3m$, $\lambda \neq 0$, $\lambda^3 \neq 1$). このとき $|\mathrm{Aut}(C)| = 2d^2$.

(v) Fermat 曲線の子孫 $X^{2m} + Y^{2m} + Z^{2m} + \lambda(X^m Y^m + Y^m Z^m + Z^m X^m) = 0$ ($d = 2m$, $\lambda \neq 0, -1, \pm 2$). このとき $\mathrm{Aut}(C)$ は S_3 と $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ の半直積と同型である．とくに $|\mathrm{Aut}(C)| = 6m^2 = \frac{3}{2}d^2$.

注 3.5. (iii) の場合，曲線は点 $(0 : 0 : 1)$ を Galois 点にもつ．すなわち点 $(0 : 0 : 1)$ からの射影 $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ は Galois 被覆を与える．次数 d が小さい ($d < 60$) 場合，位数の大きい自己同型群をもつ曲線として，上の定理にあげた曲線以外に Galois 点をもつ曲線が多く現れる．Galois 点については [Y] などを参照．

4 証明の方針

前節の定理の証明にあたって最も有用なのが，Mitchell による $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類である．

定理 4.1. ([Mi, Section 1-10], [DI, Theorem 4.8]) G を $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ の有限部分群とする．このとき次のうち一つが成り立つ：

(a) G はある直線とその上にない 1 点をそれぞれ固定する．

(b) G はある三角形（共点でない三直線）を固定する．

(c) G は原始的であり, 5 次交代群 A_5, 6 次交代群 A_6, 位数 168 の Klein 群, 位数 216 の Hesse 群あるいはその位数 36 か 72 の部分群のうち一つと共役.

注 4.2. 正確には，Mitchell の結果では (a) のかわりに G が 1 点を固定する場合と直線を固定する場合があげられている．実際にはそれらはともに (a) の場合に帰着する．

<u>**定理 3.1 の証明の方針.**</u>　C を次数 $d \geq 4$ の非特異平面曲線，G を $\mathrm{Aut}(C)$ の部分群とする．G は自然に $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の部分群とみなされるので，上の定理にしたがって場合分けする．(c) の場合はそのまま定理 3.1 の (c) に対応するので，残りの場合を考える．

(A) G がある直線 L と，L 上にない 1 点 P をそれぞれ固定する場合．まず $P \in C$ ならば，命題 2.6 より G は巡回群である．このときには定理 3.1 の (a-1) が成り立つ．以下では $P \notin C$ とする．適当な座標をとり，$L : Z = 0$, $P = (0 : 0 : 1)$ としてよい．すると $G \subset \mathrm{PBD}(2,1)$ なので，自然な射影 $\rho : \mathrm{PBD}(2,1) \to \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ により可換図式

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathrm{PBD}(2,1) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r] & 1 & (\text{完全}) \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, hook] & G \arrow[r] \arrow[u, hook] & G' \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 & (\text{完全}), \end{tikzcd}$$

が得られる．ここで $N = \mathrm{Ker}(\rho|_G)$, $G' = \mathrm{Im}(\rho|_G)$．$N$ は $\mathbb{C}^*$ の有限部分群なので巡回群である．さらに $\pi : C \to C/N$ を自然な射影，$\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$ を点 P からの射影とすると可換図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\pi_P"'] & \circlearrowright & C/N \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1. & \end{tikzcd}$$

が得られ，$|N| = \deg\pi$ は $\deg\pi_P = d$ の約数であることがわかる．一方 G' は $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群である．後は G' の位数を評価することにより，(a-ii) が得られる ((b-i) が得られる場合もわずかにある)．

(B) G がある三角形 Δ を固定する場合．G は 1 点も直線も固定しないとしてよい．さらに，適当な座標をとり，$\Delta = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ($L_1 : X = 0$, $L_2 : Y = 0$, $L_3 : Z = 0$) としてよい．三角形 Δ の頂点集合を V とする： $V = \{P_1, P_2, P_3\}$ ($P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$)．

　G は 1 点も直線も固定しないので，$C \cap V = \emptyset$ か $C \supset V$ が成り立つ．$C \supset V$ のとき，C の点 P_i における接線を T_i で表す．すると次の場合にわかれる：

(B-1)　$C \cap V = \emptyset$.

(B-2) $C \supset V$ で，すべての T_i が Δ の辺である．

(B-3) $C \supset V$ で，どの T_i も Δ の辺でない．

(B-1) この場合，C は

$$aX^d + bY^d + cZ^d + (\text{低指数の項}) \quad (a, b, c \neq 0)$$

の形の多項式で定義される．必要なら座標を取り直して，$a = b = c = 1$ としてよい．こうして C は Fermat 曲線の子孫であることがわかり，(b-i) が得られる．

(B-2) この場合，$T_1 = L_3, T_2 = L_1, T_3 = L_2$ としてよい．すると C は

$$aXY^{d-1} + bYZ^{d-1} + cZX^{d-1} + (\text{低指数の項}) \quad (a, b, c \neq 0)$$

の形の多項式で定義される．必要なら座標を取り直して，$a = b = c = 1$ としてよい．こうして C は Klein 曲線の子孫であることがわかり，(b-ii) が得られる．

(B-3) この場合，実は G は 1 点か直線を固定集合にもつことがいえ，矛盾が生じる．こうしてこの場合は排除でき，証明が終わる．

参考文献

[A] T. Arakawa, Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets, Osaka J. Math. **37**, No. 4 (2000), 823–846.

[Bl] H. Blichfeldt, Finite Collineation Groups: With an Introduction to the Theory of Groups of Operators and Substitution Groups, Univ. of Chicago Press, Chicago (1917).

[Br] T. Breuer, Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann surfaces, London Mathematical Society Lecture Note Series 280, Cambridge Univ. Press (2000).

[BEM] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martínez, Automorphism groups of hyperelliptic Riemann surfaces, Kodai Math. J. **10** (1987), 174–181.

[BGG] E. Bujalance, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, The full automorphism groups of hyperelliptic Riemann surfaces, Manuscripta Math. **79** (1993), 267–282.

[DI] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, Algebra, Arithmetic, and Geometry, Progress in Mathematics Volume **269** (2009), 443–548.

[DIK] H. Doi, K. Idei, H. Kaneta, Uniqueness of the most symmetric nonsingular plane sextics, Osaka J. Math. **37** (2000), 667–687.

[G] L. Greenberg, Maximal Fuchsian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 569–573.

[He] P. Henn, Die Automorphismengruppen der algebraischen Funktionenkorper vom Geschlecht 3, Inaugural-dissertation, Heidelberg (1976).

[Hu] A. Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit Eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. **41**, No. 3 (1893), 403–442.

[HKKO] T. Harui, T. Kato, J. Komeda, A. Ohbuchi, Double coverings between smooth plane curves, Kodai Math. J. **31** No. 2 (2008), 257–262.

[HKO] T. Harui, J. Komeda, A. Ohbuchi, Quotient curves of smooth plane curves with automorphisms, Kodai Math. J. **33** No. 1 (2010), 164–172.

[K] Vik. S. Kulikov, Hurwitz curves, Russian Math. Surveys **62** No. 6 (2007), 1043–1119.

[KKi] A. Kuribayashi, H. Kimura, Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus five, J. Algebra **134** (1990), 80–103.

[KKu] I. Kuribayashi, A. Kuribayashi, On automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus 4, Proc. Japan Acad. **62** Ser. A (1986), 65–68.

[KMP] H. Kaneta, S. Marcugini, F. Pambianco, The most symmetric nonsingular plane curves of degree $n \leq 20$, I, Geom. Dedicata **85** (2001), 317–334.

[Ma] A. M. Macbeath, On a theorem of Hurwitz, Proc. Glasgow Math. Assoc. **5** (1961) 90–96.

[Mi] H. H. Mitchell, Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **12**, No. 2 (1911), 207–242.

[O] K. Oikawa, Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself, Kodai Math. Sem. Rep. **8**, No. 1 (1956), 23–30.

[P] F. Pambianco, The Fermat curve $x^n+y^n+z^n$: the most symmetric non-singular algebraic plane curve, preprint.

[Y] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239**, Issue 1 (2001), 340–355.