Proceedings of the Thirty-Third RAMP Symposium
Nanzan University, Nagoya, November 18–19, 2021

動的ネットワーク交通流解析と確率進化ゲーム理論

Dynamic network traffic flow analysis and stochastic evolutionary game theory

佐津川　功季[1*]，和田　健太郎[2†]

Koki Satsukawa and Kentaro Wada

概要　従来，動的なネットワーク交通流研究では，車両をフローや密度で流体として近似的にモデル化することで，交通均衡状態の存在性や一意性といった解の静学的な性質の解明に成功してきた．その一方で，収束性や安定性などの解の動学的な性質については，渋滞現象の記述に伴う解析上の困難性から，不明な点が多く残されている．本稿では，解の動学的性質解析への有用性が明らかになりつつある，粒子型の動的なネットワーク交通流モデルについて紹介する．そして，確率進化ゲーム理論に基づく交通均衡状態の収束性・安定性解析手法およびその成果について解説する．

キーワード　交通ネットワーク分析，動的利用者均衡，動的システム最適，進化ゲーム理論，収束性，確率安定性

1.　はじめに

1.1.　背景と目的

都市・交通システムに大きな損失を引き起こす渋滞現象は，道路区間に車両が待ち行列として滞留しそれが時々刻々と変化する動的な現象である．そのため，きめ細やかな需要管理施策や高度交通システム (ITS: Intelligent Transport Systems) といった現代的な交通運用計画の課題に対応するためには，渋滞現象を正しく表現する時間軸を考慮した理論が必須となる [45]．こうしたニーズに応えるための理論的基盤となりうるのが，本稿が対象とする動的交通配分理論であり，Merchant and Nemhauser [19, 20] の先駆的な研究以来，多くの知見が蓄積されてきた．

動的交通配分理論では，交通渋滞を表現する動的交通流モデルと道路利用者の選択行動とが相互作用した結果生じる状態としてネットワーク流を記述する．この結果実現する交通状態のベンチマークとして代表的なものが, 動的利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 状態および動的システム最適 (DSO: Dynamic System Optimal) 状態である[*1]．これらは Wardrop [36]

1　東北大学大学院情報科学研究科，〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, Aramaki Aoba, Aobaku, Sendai 980-8579, Japan

2　筑波大学システム情報系社会工学域，〒305-8573 つくば市天王台
Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573, Japan

∗　E-mail address: satsukawa@tohoku.ac.jp

†　E-mail address: wadaken@sk.tsukuba.ac.jp

∗1　経路選択に加え出発時刻も加えたより一般的な問題 [13] もあるが，本稿では経路選択に限定した問題のみを扱う．

が提唱した配分原則を動的な交通条件へと拡張したものであり，前者は全ての利用者が各自の利得を最大化するよう行動している状態，後者は交通システム全体の一般化費用の総和を最小化する状態を求める問題である．こうした動的ネットワーク流問題は，交通分野に限らず Operations Research (OR) やゲーム理論分野でも近年 ‘Nash flow over time’ などとよばれ研究が進められている．

後述のレビューで解説するように，目標とする DUE・DSO 状態そのものの数理特性（e.g. 存在性や一意性）やフロー・コストパターンに関する知見，いわば解の静学的性質に関しては，一定の成果が得られている．しかし，利用者の日々の自然な行動変化により，交通状態は DUE・DSO 状態へと収束するのか？その状態は安定するのか？といった，解の動学的な性質については，理論的に明らかとなっていない点も多い [13]．もしこれらの性質が保証されなければ，ベンチマーク状態は稀にしか実現し得ない極端な状態ということになる [4]．つまり，解の動学的性質は動的交通配分理論のベンチマークとしての適切性に関わるものであり，これらの特性を数理的に明確に把握することは極めて重要な課題である．

解の動学的性質の解析にはまず，人々が過去の経験に基づき日々の経路選択行動を変更した結果生じる交通ネットワーク流の調整過程を動的システムとして表現する．そして，この動的システムに対する Lyapunov 関数を構成することで大域的収束性を証明するのが標準的である．従来研究（時間軸を捨象した静的配分も含む）で示されているように，このアプローチの成功の鍵となるのは，経路費用関数の単調性である [32, 22]．しかし，動的交通流ではこの性質は一般には成立せず [16, 23]，結果として DUE 配分（変分不等式）問題の写像の非単調性 [2] や DSO 配分（非線形最適化）問題の非凸性 [6] など，解の動学的性質の解析にあたっての困難性が生じることになる．

本稿の目的は，この状況を打破するために，近年著者らが提案した確率進化ゲーム理論に基づく新たなアプローチを解説することである．このアプローチでは，車両をフローや密度で表現する伝統的な流体近似モデルを用いるのではなく，そのまま粒子として扱った動的交通配分問題を戦略型ゲームの形式で定式化する．そして，進化ゲーム理論分野におけるゲーム・クラスとの対応関係を確立し，そこでの知見に基づき解析を行うものである．これにより，前述の流体型動的交通配分の抱える単調性の問題を回避し，より一般的な結果を得ることに成功している [42, 28, 29]．本稿ではこれらの解析結果について，要点を押さえながら簡潔に紹介する．

本稿の構成は以下の通りである．まず，**2 章**では戦略型ゲームとして定式化される粒子型の動的交通配分モデルの基本構造について定義・説明する．次に，**3 章**では解の動学的性質の解析準備として確率進化ゲーム理論についてその要点を説明する．そして，**4 章**および **5 章**では DUE・DSO 状態の収束性・安定性に関する解析結果について紹介する．

1.2. 関連した既存研究の紹介

利用者の選択行動を経路選択に限定した動的交通配分問題は，Merchant and Nemhauser [19, 20] に端を発する．そこではネットワーク全体での総旅行時間を最小化する時々刻々のフ

ロー・パターンを求める DSO 配分問題を定式化し，その非凸性を確認している．その後，最適化問題の制約を緩和することで DSO 問題を線形計画問題として定式化する方法が提案された [39]．この問題では最適フロー・パターンが不自然な挙動を取ることが指摘されたが，アルゴリズム的に解決をはかる研究が進められている [25]．しかし，DSO 状態の計算法については，収束性が保証されないヒューリスティックな解法の提案に留まっている [38][*2]．

DUE 配分問題は基本的に変分不等式として定式化されるが，フローの記述方法に関して二つの大きな方向性が示されている．一つは，各リンク上を流れる時々刻々のフローを 'オイラー的な' 座標系（固定座標系）を用いて記述する方法である．この方法は適用するネットワーク構造に依存せず汎用性があり，DUE の存在性 [33, 23] や不動点アルゴリズムに基づくヒューリスティックス解法が提案されている [12]．安定性に関しては，一経路に一つのボトルネックを含むネットワークでは単調性が満たされ，自然な交通流調整過程の DUE 状態への収束性が示されている [32, 22]．しかし，一般ネットワークでは利用者の経路旅行時間関数が複雑化し，DUE のより深い数理的特性を把握することが難しくなることが指摘されている [43, 46]．

一方で，適用できるネットワーク構造は限られているが DUE における経路旅行時間を簡明に扱えるのが，'ラグランジュ的な' 座標系（移動座標系）での定式化である [17]．これは各車両の走行軌跡に沿って定義した座標上でフローを記述する方法であり，均衡の一意性の証明 [14]，効率的な計算アルゴリズムの開発 [2]，パラドクス現象の解析 [1, 35] などが行われている[*3]．また，類似の定式化は 'thin-flow with resetting' として OR 分野でも近年再発見され [15]，均衡解の存在性や一意性の証明 [8]，待ち行列のリンク間延伸を考慮した交通流モデルでの計算 [31] などが行われる契機となっている．

以上は流体モデルに関する成果であるが，2000 年代になり粒子モデルに関する研究も増えてきている．交通分野における成果は以降で説明するが，OR 分野でもパラドクス現象の解析 [30] や単一起点ネットワークでの Nash 均衡解の存在証明 [5] といった研究がなされている．

2. 動的交通量配分ゲーム

本章では，戦略型ゲームとして定式化した動的交通配分問題（'DTA ゲーム'）の基本構造を説明する．DTA ゲームは，ネットワーク，車両（i.e. プレイヤー），各車両の経路選択肢集合（i.e. 戦略集合），および選択経路の旅行時間を決める動的交通流モデル（i.e. 利得関数）から構成される．これらの要素を解説した後，戦略型ゲームの解である Nash 均衡について説明する．

2.1. DTA ゲームの基本構造

本稿では，ノード集合 $\mathcal{N}$，有向リンク集合 $\mathcal{L}$ から構成される一般構造のネットワークを対象とする．交通トリップの起点および終点の集合を，それぞれ $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_d$ と表す．ネットワーク

---

*2　数値解法の収束性と行動論的に自然な交通流調整過程の収束性は厳密には異なるが，両者の特性は密接に関係している．

*3　定式化の詳細やより包括的なレビューについては Iryo [13] や和田 [46] を参考にされたい．

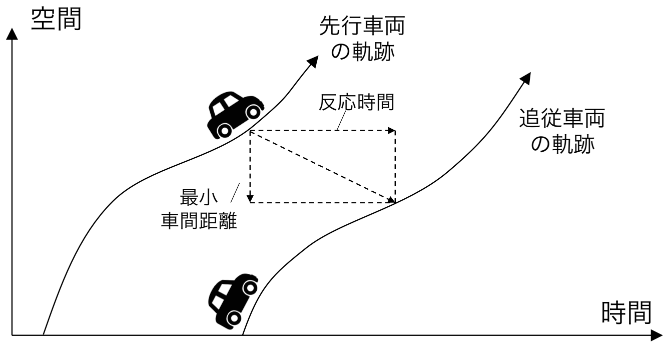

図 1　Newell の追従モデルにおける，先行車両と追従車両の時空間ダイアグラム上の軌跡

上を走行する車両（利用者とも呼ぶ）の集合を $\mathcal{P}$ とする．各利用者 $i \in \mathcal{P}$ の起終点ペア (o_i, d_i), および出発時刻 s_i は外生的に与えられるものとする．ただし，同一起点から出発する利用者は異なる出発時刻を持つものとする：$o_i = o_j \rightarrow s_i \neq s_j, \forall j \in \mathcal{P} \setminus \{i\}$.

各利用者は，自身の起終点を結ぶ任意の（サイクルを持たない）経路を選択する．利用者 i がとりうる経路の集合を $\mathcal{R}_i$ と表す．この集合には，利用者がいかなる経路も選択しない（i.e. ネットワークに配分されない）ことを表す戦略も含まれる．この戦略 ϕ_i を選択している車両は未配分車両と呼ばれ，DUE 状態を求めるアルゴリズムにおいて用いられる．全利用者が選択した戦略を並べたベクトル（戦略プロファイル）は経路プロファイルと呼び，$\mathbf{r} \equiv \{r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_{|\mathcal{P}|}\} \in \mathcal{R}$ と表す．ここで，$\mathcal{R} \equiv \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_i$ である．また，任意の利用者 i を除いた経路プロファイルを $\mathbf{r}_{-i}$ と表す．利用者 i の経路を明示的に指す際には $\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$ のように r_i と $\mathbf{r}_{-i}$ を束ねて記述する．各利用者は，選択した経路の旅行時間やその経路に課される混雑料金などの交通制御スキームにより特徴付けられた不効用を被る．利用者 $i \in \mathcal{P}$ が経路 r_i を選択したときに被る不効用を，$U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$ と表す．

2.2.　動的交通流モデルとその特性

不効用を構成する経路旅行時間や交通状態に応じた制御や課金は，時空間的に変化する車両の滞留状況（i.e. 渋滞現象）やそれが旅行時間に及ぼす影響を表現する，動的交通流モデルにより計算される．動的交通流モデルは，リンク上の車両挙動を表現するリンクモデルと複数のリンクが接続する交差点での挙動を表すノードモデルから構成される．リンクモデルは，各車両が前方を走行する車両との車間距離や相対速度に応じて自身の速度を調節するものであり，「追従モデル」とも呼ばれる．一方ノードモデルは，分合流の幾何構造や信号制御の有無に応じた各リンクから流入する車両の優先・非優先を定める．

追従挙動を最も簡潔に表現する Newell の単純追従モデル [24] のイメージを**図 1** に示す．これは，横軸に時間，縦軸にリンク内での車両位置をとった，時空間ダイアグラム（いわゆる鉄道における ‘ダイヤ’）である．実線は各車両の時空間上での走行軌跡を表す．この図のように，各車両は反応時間や最小車間距離から定められる一定の時空間的な距離を保つように走行

する．結果として，追従車両の軌跡は先行車両の軌跡をシフトしたものとなる．

以上の動的交通流モデルが持つべき特性として次の二つが挙げられる [7]．一つは，待ち行列理論などでも広く知られている「First-In-First-Out (FIFO) 原則」であり，「先にリンクに流入した車両が先に流入する（追い越しがない）」という特性である．これは動的ネットワーク流解析で重要となる渋滞状態ではほぼ成立する．もう一つは「因果律 (causality)」あるいは運転挙動の異方性 (anisotropic property) と呼ばれるものであり，「車両挙動は前方に位置する車両の挙動のみから影響を受ける」という物理制約を表す．これらの特性を組み合わせると，動的交通流を解析する上で有用な，次の性質が得られる [28]：

Property 1. FIFO および因果律を満たす動的交通流モデルでは，リンクに任意の時刻に流入した車両の旅行時間は，その時刻より後に流入した車両挙動には影響を受けない．

これは，渋滞時に流入した車両が，その渋滞継続中に流入した以降の車両に負の影響を与え続ける（i.e. 旅行時間を増加させる），という**外部性の非対称性**を生み出す要因であり，外部性が対称である標準的な静的ネットワーク流とは根本的な差異をもたらしている [44].

2.3. Nash 均衡

戦略型ゲームの解，すなわち合理的な利用者が最終的に選択するであろう均衡点は，（純粋戦略）Nash 均衡状態として定義される．正確には，ある経路プロファイル $\mathbf{r}^*$ が Nash 均衡であるとは，任意の利用者 i の戦略 r_i^* が自身以外の戦略プロファイル $\mathbf{r}_{-i}^*$ に対する最適反応戦略（相手の戦略を所与としたとき最大利得をもたらす戦略）となっていることである：

$$U_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) \leq U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall r_i \in \mathcal{R}_i \setminus \{r_i^*\}, \ \forall i \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

特に，(1) において狭義の不等号が成立する（i.e. 最適反応戦略が一意である）とき，$\mathbf{r}^*$ は狭義 Nash 均衡であるという．本稿で解析する DTA ゲームは大多数のプレイヤーから構成されており，Nash 均衡を完全情報に基づく合理的（超人的）なプレイヤーにより実現する状態として解釈するのは難しい．つまり，Nash 均衡のもう一つの解釈「限定合理的なプレイヤーによる集団均衡」[41] として捉えるべきである．

Nash 均衡条件は，利用者が自分の選択行動を変更するインセンティブを持たない，という意味で安定状態を表している．しかし，それはあくまで交通ネットワーク流が安定状態となる必要条件を与えているに過ぎない．集団均衡である DTA ゲームの Nash 均衡が実際に起こりうることを示すためには，「摂動を受けた際に元の均衡に戻るか（安定性）」や「任意の初期状態から到達できるか（収束性）」といった，均衡状態の動学的な性質を調べる必要がある．

3. 進化ゲーム理論と確率安定性

均衡状態の動学的性質の解析では，不均衡状態から均衡へ至る日々の交通状態の調整過程を

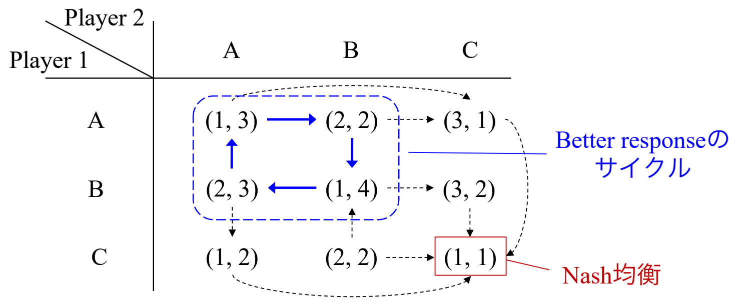

図 2　WAG である 2 プレイヤー・3 戦略の利得（不効用）行列．各矢印は BR を示している．

記述し，その特性を解析することになる．本章では，この解析上有用な性質を持つゲームである，‘weakly acyclic games’ および ‘potential games’ と呼ばれる二種類のゲームのクラスを紹介する．そして，本稿で取り上げる安定性概念である確率安定性を紹介するとともに，これらのゲーム・クラスとの関係性について解説する．

以降では，DTA ゲームが繰り返し行われ，各利用者が選択経路を日々変更する状況を考える，i.e. DTA ゲームを進化ゲームとして動学化する[*4]．日々の交通状態の調整過程を表現するために，一日内の時間軸とは別の時間軸（ここでは日）$\tau = 1, 2, \ldots,$ を導入し，τ 期での経路プロファイルを $\mathbf{r}^{\tau}$ と表す．そして，各期ごとにランダムに一人の利用者が選ばれ，この利用者が特定の行動ルールに従い経路を変更するものとする．こうした行動ルールに基づく日々の交通流調整過程は進化動学 (evolutionary dynamics)，あるいは day-to-day 動学と呼ばれる．

3.1.　Weakly acyclic games and potential games

Weakly acyclic game (WAG) とは，任意の（不均衡な）状態から，Nash 均衡に到達する better response path (BR path) が少なくとも一つ存在する戦略型ゲームである [18, 37]．この定義に用いられる BR path とは，日々一人の利用者が自らの不効用を小さくするように戦略変更を行うことで生じる，戦略プロファイルの連鎖 $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \ldots, \mathbf{r}^K$（$K$ は 1 より大きい整数）である．言い換えれば，各 τ において，$U_i(r_i^{\tau+1}, \mathbf{r}_{-i}^{\tau+1}) < U_i(r_i^{\tau}, \mathbf{r}_{-i}^{\tau})$, $r_i^{\tau+1} \neq r_i^{\tau}$ となる利用者 i が存在する．つまり，自身が現在経験している不効用を改善する（i.e. better response する）という，利用者の合理的かつ自然なルール下で実現する状態の連鎖を表している．

その定義から分かるように，WAG は，利用者の自律分散的かつ合理的な戦略（経路）変更により集団状態が Nash 均衡に到達するための必要条件を満たすクラスと位置付けられる [10]．逆に言えば，ある戦略型ゲームが WAG でない場合，Nash 均衡に接続する BR path を持たない状態が少なくとも一つ存在し，自然な進化動学の大域的な収束性は保証できない．

なお，WAG では Nash 均衡に接続する BR path の存在を示してはいるが，BR path の存在は有限回の BR の繰り返しで Nash 均衡が実現することを意味しているわけではない．なぜな

*4　一日の中 (within-day) の交通状態に加え，それが日々 (day-to-day) 変化するという，二重に動学化した（doubly dynamic な）交通配分問題を考えていることになる．

らば，BR path の中に BR のサイクルが存在し，そこに囚われる可能性があるためである（**図 2**）．ただし，経路変更を十分多く繰り返す（i.e. $\tau \to \infty$）ことで，そのような現象が起こる確率はゼロとなる，i.e. ほとんど確実 (almost surely) に収束する．これが ‘weakly acyclic’ と名付けられる所以である．

Potential game (PG) は様々な良い性質を持つことが知られているゲームのクラスであり [21]，最適化理論とも密接な関係を持つ．具体的には，PG は次のようなポテンシャル関数 $\Pi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ が存在する戦略型ゲームのことである：

$$U_i(r_i', \mathbf{r}_{-i}) - U_i(r_i'', \mathbf{r}_{-i}) = \Pi(r_i', \mathbf{r}_{-i}) - \Pi(r_i'', \mathbf{r}_{-i}), \quad \forall i \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{r}_{-i} \in \mathcal{R}_{-i}, \forall r', r'' \in \mathcal{R}_i. \tag{2}$$

つまり，あるゲームが PG であるとき，戦略変更に伴う各利用者の不効用の減少量がポテンシャル関数の変化量と等しくなる．従って，Nash 均衡はこのポテンシャル関数の局所最小点として特徴付けられる．また，この関係式を変形すると，次のような関係が導かれる：

$$U_i(r_i, r_j, \mathbf{r}_{-ij}) - U_i(r_i, \phi_j, \mathbf{r}_{-ij}) = U_j(r_i, r_j, \mathbf{r}_{-ij}) - U_j(\phi_i, r_j, \mathbf{r}_{-ij}). \tag{3}$$

これは，j をゲームから除いたときの i の不効用の変化と，i をゲームから除いたときの j の不効用の変化が等しいことを意味している．つまり，PG は外部性が対称なゲームでもある．

さらに，このゲームは収束性の観点からは WAG の特殊ケースとしてみなすことができる．具体的には，PG は，BR path にサイクルが含まれない WAG として定義される．これは，利用者の BR が常にポテンシャルの改善につながり，有限回の繰り返しで局所最小点（i.e. Nash 均衡）に到達するためである．つまり，PG は一般的な WAG よりも強い収束特性を持つ．

3.2. 確率進化動学と確率安定性

前節では，利用者の自然な行動変更による均衡状態への収束性の観点から，戦略型ゲームの分類を行なった．しかし，進化動学の収束性は即座に安定性を意味するわけではない．なぜならば，経路選択行動に何らかの ‘揺らぎ’（i.e. 不効用を改善しない経路を誤って選択する）が生じて均衡状態から逸脱した場合，交通状態が元の均衡に戻ることは保証されないため（i.e. 他の均衡へと遷移しうるため）である．そのため，安定性を示すには，この揺らぎが引き起こす交通状態の遷移を解析する必要がある．

本節では，その解析のための，確率進化動学と確率安定性 [11, 37] について説明する．確率安定性の分析では，確率進化動学の下での状態遷移の長期的な振る舞いを，対応するマルコフ連鎖の定常分布として捉える．そして，揺らぎが生じる確率を十分小さくしたときの定常分布の挙動から，どの状態が実現しやすいかを分析する．この状態が確率安定的な状態であり，揺らぎに対して頑健な状態と解釈することができる．

確率安定性のフォーマルな定義に先立ち，進化動学をマルコフ連鎖の形式で表現する．まず，前節で取り扱った BR のような自然な進化動学を考えよう．これは状態空間が経路プロファイル集合 $\mathcal{R}$ と対応するマルコフ連鎖と考えることができる．ある状態（i.e. 経路プロファ

イル）$\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$ への遷移確率を $p^0_{\mathbf{rr}'}$，またこのマルコフ連鎖の遷移確率行列を $\mathbf{P}^0$ と表す[*5]．

次に，この動学をベースとして，パラメータ $\epsilon \in (0, a]$（a は適当な正の実数）によって特徴付けられる確率で不効用が増加する戦略も選択される（i.e. 選択ミスが生じる），'確率進化動学' を考えよう．この確率進化動学に対応したマルコフ連鎖の遷移確率行列を $\mathbf{P}^\epsilon$ と表す．また，解析を可能とするためのテクニカルな条件として，次が満たされるものとする：

マルコフ連鎖は非周期かつ再帰的 (4)

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} p^\epsilon_{\mathbf{rr}'} = p^0_{\mathbf{rr}'} \tag{5}$$

$$p^\epsilon_{\mathbf{rr}'} > 0 \text{ for some } \epsilon \text{ implies } \exists c(\mathbf{r}\to\mathbf{r}') \geq 0 \quad \text{s.t. } 0 < \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{-c(\mathbf{r}\to\mathbf{r}')} p^\epsilon_{\mathbf{rr}'} < \infty. \tag{6}$$

条件 (4) は，このマルコフ連鎖がエルゴード的であり，一意な定常分布を持つことを仮定している．条件 (5) は，揺らぎがゼロになるような極限では，この確率進化動学が揺らぎのない進化動学へと収束する（i.e. $\mathbf{P}^\epsilon \to \mathbf{P}^0$）ことを仮定している．条件 (6) はこの収束の際に，状態間の遷移確率がある一定の収束率で指数収束することを仮定している．この収束率 $c(\mathbf{r}\to\mathbf{r}')$ は，$\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$ への '遷移のしにくさ' を表すものとも解釈され，特に揺らぎを持たないマルコフ連鎖において遷移可能であるとき（i.e. $p^0_{\mathbf{rr}'} > 0$），$c(\mathbf{r}\to\mathbf{r}') = 0$ となる．

揺らぎを含まない '確定的な' 動学と対応したマルコフ連鎖は通常複数の定常分布を持ち，長期的に実現する状態は初期状態に依存する．対して，確率進化動学と対応したマルコフ連鎖では初期状態に依存しない定常分布が一意に存在し，かつ揺らぎのゼロ極限を取ることで，揺らぎを含まないマルコフ連鎖が持つ定常分布のいずれかに収束することが示されている [37]．すなわち，揺らぎを用いることで，長期的に観測されやすい（i.e. 安定的に実現しやすい）状態を，初期状態の影響を考えることなく調べることができる．以上をまとめる形で，確率安定性は次のように定義される：

Definition 1. ある確率進化動学の下でプレイヤーが戦略を選択する状況を考え，このときの定常分布を $\boldsymbol{\mu}^\epsilon$ で表す．$\lim_{\epsilon\to 0} \mu^\epsilon_{\mathbf{r}} > 0$ を満たす状態 $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ を確率安定状態と呼ぶ．

3.3. Weakly acyclic games と確率安定性の関係

以上の準備をもとに，確率安定状態と WAG の均衡状態の関係を見ていこう．確率安定性の定義から分かるように，安定的な状態は，確定的な進化動学が最終的に行き着く状態や集合（マルコフ連鎖の「再帰的同値類」）に含まれることになる．そして，ゲームが WAG であれば，BR に代表される多くの自然な動学では，各再帰的同値類と Nash 均衡とが一対一対応する．これは，不均衡状態からは均衡への BR path が必ず存在し，かつ Nash 均衡ではいかなる利用者も BR できないため，一度 Nash 均衡に到達したら交通状態はそこから逸脱しないため

*5　経路変更できる利用者はランダムに選ばれるため，状態間は確率的に遷移する．

である．従って，ゲームが WAG であれば，幅広い動学において，均衡状態への収束性のみならずそれらの確率安定性をも保証できる[*6].

このように，WAG は均衡の動学的性質を示すにあたり重要な役割を果たすことが分かる．次章以降では，DUE や DSO 状態が Nash 均衡と対応するように不効用を特定化した DTA ゲームを考え，それぞれのゲームと WAG とのつながりを見ていく．また，そのつながりから明らかとなる動学的性質について紹介していく．

4. 動的利用者均衡配分—DUE ゲーム

本章では，Nash 均衡が DUE と対応するように不効用を特定した DTA ゲーム（‘DUE ゲーム’）を取り上げる．DUE 状態はすべての利用者が選択した経路が ‘事後的’ に見ても各自の真の最短経路となっているような状態である．言い換えると，どの利用者も「他の経路を選択したほうが良かった・・・」と後悔しない選択をしている状態である．

4.1. DUE ゲームの定式化と順序配分アルゴリズム

DUE ゲームは，DTA ゲームにおいて各利用者の不効用を経路旅行時間としたものである：

$$U_i(\mathbf{r}) = C_i(\mathbf{r}), \quad \forall i \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \tag{7}$$

ここで，$C_i(\mathbf{r})$ は経路プロファイルが $\mathbf{r}$ のとき，利用者 $i \in \mathcal{P}$ が経験する経路旅行時間である．このとき，Nash 均衡は全ての利用者が各自の経路旅行時間を単独で改善できない状態となり，すなわち DUE と一致する．

この DUE ゲームの解法として，井料 [40] は順序配分アルゴリズムを提案している．このアルゴリズムでは，全車両が未配分車両である状態から，一台ずつ適切な順序でネットワークに配分していくことで DUE 状態を求めていく．この適切な順序を定めるにあたり重要なのが，「最早未配分車両」という概念である．最早未配分車両は，未配分車両のうち，最短経路上のどのリンクへも他の未配分車両より早く流入できる，i.e. 他の未配分車両に追い越されない車両として定義される．この概念と動的交通流モデルの性質（**Property 1**）を組み合わせると，最早未配分車両の最短経路旅行時間は，他の未配分車両の経路選択からは影響を受けないことが保証される．従って，最早未配分車両の存在性が保証されるのであれば，最早未配分車両の探索と最短経路への配分を車両数だけ繰り返すことで，ヒューリスティックな計算なしに全ての車両が事後的な最短経路をとる DUE 状態を求めることができる．

さらに興味深いことに，順序配分アルゴリズムによって DUE を得られるということが，DUE ゲームが WAG のクラスに属することと対応するのである．そのからくりは以下の通りである．まず，順序配分アルゴリズムが DUE を導出することを保証するためには，最早未配分車両の存在が必要となる．この存在性は，DUE を得るための適切な配分順序が車両（i.e. プ

*6 仮にゲームが WAG でなく均衡以外の状態が再帰的同値類に含まれる場合，均衡でない交通状態が安定的に実現する可能性がある．

レイヤー）間に存在することに他ならない．そしてこれは，WAG のクラスに属する要件である，任意の状態から Nash 均衡へと接続する BR path の存在性を示すのである．すなわち，配分順序が早い順に車両を選択し，その車両を最短経路へと BR させていけば Nash 均衡が実現する [28]．以上をまとめることで，次の定理が導かれる：

Theorem 1. (Satsukawa et al. [28]) 最早未配分車両の存在が保証された順序配分アルゴリズムを適用できる DUE ゲームは，weakly acyclic games のクラスに属する．

最早未配分車両が存在する必要十分条件については明らかになっていないが，十分条件的には「単一方向ネットワーク」 [14] と呼ばれるノード・リンク接続構造を持つネットワークでは存在することが分かっている．これは端的に言えば，全ての最短経路が同じ方向にノードを辿っていくような構造のネットワークである[*7]．具体例としては単一起点のネットワークがあり，このネットワークでは出発時刻順に車両を最短経路に配分すれば DUE が求まることは直感的にわかるだろう．

なお，順序配分アルゴリズムは，あたかも ‘greedy’ な操作により均衡状態を導出しているとも捉えることもできる．つまり交通に限らず，均衡状態を導くためのプレイヤーの適切な選択順序が存在するゲーム ‘greedy solvable games’ であれば，全く同様のロジックにより WAG であるということが保証できる[*8]．

4.2.　DUE ゲームにおける均衡状態の動学的性質

では，前節で WAG であることを示した単一方向ネットワークでの DUE ゲームについて，均衡状態の動学的性質を見ていこう．ここでは，（学習メカニズムを持たない）近視眼的な進化動学として代表的な，better response (BR) および best response (BS) 動学を取り上げる．そして，これら動学における収束性・安定性の結果を比較考察していく．

まず，BR 動学とその確率進化動学である perturbed better response (PBR) 動学について説明しよう．DUE ゲームにおける BR 動学では，ここまでで説明してきたように，各利用者は旅行時間が現在の経路より ‘厳密に’ 短くなる経路があるとき，そのうち一つに経路を変更する．また PBR 動学では揺らぎの効果により，利用者は旅行時間が長くなる経路を確率的に（i.e. 誤って）選択する．これらの動学の収束性や確率安定性は，DUE ゲームが WAG であることから即座に導くことができる．すなわち 3 章で説明したように，BR 動学により，経路選択プロファイルは任意の初期値から（複数ある場合にはいずれかの）Nash 均衡にほとんど確実に収束する，i.e. 大域的収束性を持つことがわかる．さらにこの事実は，確率進化動学と対応す

*7　本稿冒頭で紹介した OR 分野における Nash flow 問題の多くは単一起点や単一終点ネットワークで行われており，これらは単一方向ネットワークに含まれる．つまり，これらの問題は WAG のクラスに属しており，本稿で紹介する収束性・安定性に関する結果 [28, 29] がそのまま成立する．

*8　類似の，しかし，より厳しい条件が必要となるゲーム・クラスとしては ‘dominance solvable games’ というものがある [41].

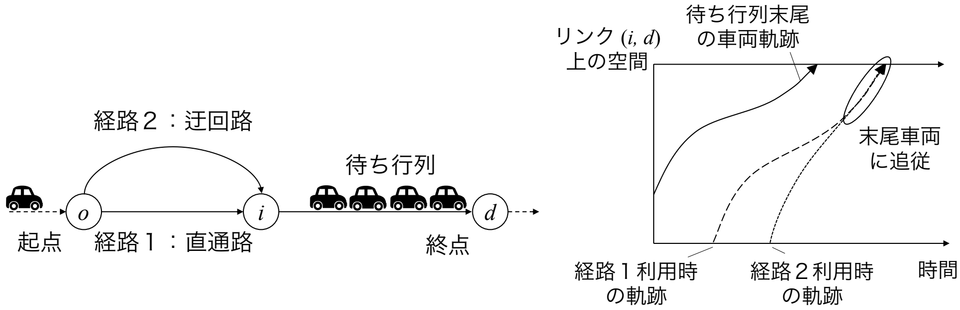

図 3　DP 原理を満たさない最短経路が存在する例

るマルコフ連鎖の再帰的同値類が Nash 均衡と一対一対応することを示すため，BR 動学を考えたとき，確率的に安定な Nash 均衡が必ず存在することも示される．

次に BS 動学について見ていこう．この動学では，各利用者は経路旅行時間が ‘最小’ となる経路を選択する．またこの確率進化動学として，ロジット選択型の動学を考える．ロジット動学では，利用者 i 以外の経路プロファイル $\mathbf{r}_{-i}$ を与件として，利用者 i が経路 r を選択する確率は次のように与えられる：

$$p_i^{\beta}(r \mid \mathbf{r}_{-i}) = \frac{\exp(\beta U_i(r, \mathbf{r}_{-i}))}{\sum_{r' \in \mathcal{R}_i} \exp(\beta U_i(r', \mathbf{r}_{-i}))} \tag{8}$$

ここで $\beta \in [0, \infty)$ は揺らぎの度合いを表すパラメータであり，$\beta \to \infty$ によりロジット動学は BS 動学に収束する．

BS 動学は一見 BR の単なる特殊ケースのように見える．しかし，BS 動学の収束性，そしてロジット動学での確率安定的な均衡の存在性は，DUE ゲームでは一般には保証できない．これは，BS 動学では同一の不効用を持つ最短経路間で経路変更が可能である，という BR 動学との違いに由来する．具体的には，こうした最短経路間の経路変更は，現在の交通状態が Nash 均衡であっても，配分順序がより遅い後続の車両の経路旅行時間に影響を与える．その結果，影響を受けた車両が経路を変更しさらにその車両の後続車両も影響を受けて経路変更する，といった車両間での雪崩的な影響により交通状態は Nash 均衡から離れうる．つまり，BS 動学では BR 動学とは異なり，全ての Nash 均衡が停留点となるわけではなく，最短経路が唯一に定まる ‘狭義’Nash 均衡がその停留点となる．さらに，DUE ゲームではそのような狭義 Nash 均衡の存在は一般には保証できないため，解の動学的性質も保証されないのである．

DUE ゲームにおいて，最短経路の一意性が一般には保証できない理由は，待ち行列が存在するネットワークでは，経路旅行時間（i.e. 終点ノードへの到着時刻）が同じであるが，経路に含まれる通過ノードへの到着時刻が他の最短経路より遅い（i.e. 部分経路が最短経路でない）最短経路が存在しうるためである．例として**図 3** のように，終点手前のリンク上に多くの待ち行列が滞留している状況を考えてみよう．ここで新たに流入する車両が二つある経路のどちらを利用しても待ち行列の末尾に追いつける場合，どちらを選んでもこの車両の終点ノード到着

時刻は待ち行列の捌け時刻にのみ依存するようになる．すなわち複数の最短経路が存在することになり*9，Nash 均衡の狭義性は容易に失われるのである．

以上をまとめると，DUE の収束性・安定性を担保するにあたり，BS 動学が要求する Nash 均衡の狭義性が一般に保証されないため，BR 動学が必要となることが分かる．これは，ある車両がより遅い配分順序を持つ車両に雪崩的に影響を及ぼしうる DUE を安定化させるためには，現状に対する ‘慣性力’（e.g. 不効用が厳密に改善されない限り選択を変更しない）が重要であることを意味している．

5. 動的システム最適配分—DSO ゲーム

本章では，戦略型ゲームとして定式化した DSO 配分問題（‘DSO ゲーム’）を取り上げ，このゲームにおける最適状態の動学的性質を均衡の観点から解析した結果について紹介する．DSO 状態は，交通ネットワーク上で走行する全ての車両が費やす総旅行時間が最小となる交通状態である．これは，最適課金（限界費用）下での Nash 均衡状態とも解釈することができる．

5.1. DSO ゲームの定式化と potential games

DSO ゲームは，DTA ゲームにおいて各利用者の不効用を選択経路の社会的限界費用としたものである．具体的には，ある利用者 $i \in \mathcal{P}$ が経路 $r_i \in \mathcal{R}_i$ を選択したときの不効用は，

$$U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) + E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}), \quad \text{where} \quad E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \equiv \sum_{i' \in \mathcal{P} \setminus \{i\}} \Big[C_{i'}(r_i, \mathbf{r}_{-i}) - C_{i'}(\phi_i, \mathbf{r}_{-i}) \Big], \tag{9}$$

と表される．ここで $E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$ は，利用者 i の外部費用（i.e. この経路を走行することで増加した他車両の旅行時間）を表している．

このように不効用を設定することで，最適状態と均衡状態が対応することを確認しておこう．式 (9) を Nash 均衡の定義式 (1) に代入することで，次の関係式が得られる：

$$\sum_{i' \in \mathcal{P}} C_{i'}(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) = \min_{r_i \in \mathcal{R}_i} \sum_{i' \in \mathcal{P}} C_{i'}(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{P}. \tag{10}$$

これは均衡状態 $\mathbf{r}^*$ において，いかなる利用者が単独で経路を変更しても総旅行時間が減少しないことを示している．すなわち，各均衡状態が総旅行時間最小化問題の局所最適解と対応することが確認できる．

以上の設定の下，DSO ゲームは PG の観点から解析することができる：

Theorem 2. DSO ゲームは，総旅行時間をポテンシャルとして持つ PG である：

$$\Pi(\mathbf{r}) = \textstyle\sum_{i \in \mathcal{P}} C_i(\mathbf{r}). \tag{11}$$

*9 これは，時間依存最短経路問題の文脈でも ‘strict FIFO’ が成立しない状況において生じる現象として指摘されている [9].

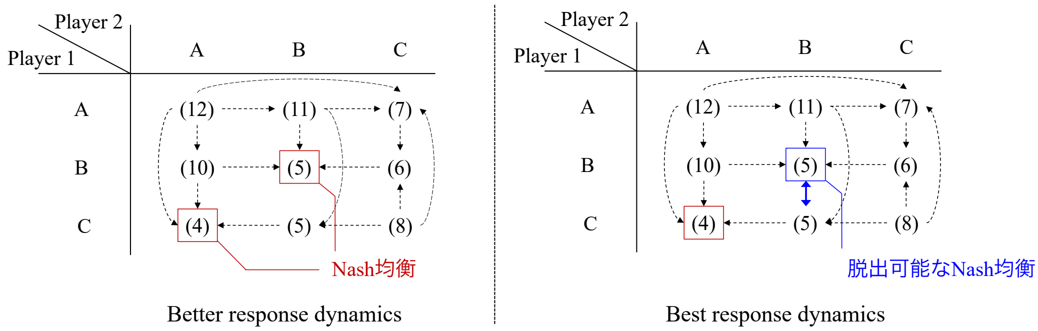

図 4　DSO ゲームの利得行列例．各要素は総旅行時間を表している．

これは，外部性が内部化されることで，時間的に非対称であった相互作用が対称になったことを意味している．つまり，前を走行する車両が後ろの車両の不効用に影響を与えるといった一方向の相互作用（**Property 1**）が，料金を通じて双方向に影響を与えあうようになっている．

5.2.　DSO ゲームにおける均衡状態の動学的性質

DSO ゲームが PG である事実からは，BR と BS 動学の両方の収束性を示すことができる．まず BR 動学については，PG が WAG のクラスに含まれているため，前章の議論と同様に，経路プロファイルが Nash 均衡（i.e. 局所最適）状態へと大域的に収束することが導かれる．一方で，BS 動学についてはある Nash 均衡 ‘点’ への収束性を示すことはできないが，総旅行時間を同一とする Nash 均衡の ‘集合’ への収束性を示すことができる．これは，PG は有限改善性を持つために，BS を繰り返すことで最終的には（Nash 均衡間を遷移し続けるとしても）ポテンシャルである総旅行時間をそれ以上改善できない状態集合，i.e. 局所最適解の集合，に到達するためである．すなわち，総旅行時間の観点からは収束性を示せることがわかる．

以上のように，DSO ゲームにおいても BR 動学と BS 動学で収束性の違いが生じる．では，ある集合内で交通状態が遷移し続ける BS 動学の性質は，DUE ゲームと同様に結局は望ましくないものなのだろうか？答えは ‘否’ である．実はこの性質は，総旅行時間がより小さい状態へと収束するのを助けることになる．具体的には，BR 動学では前述した慣性力のためにいかなる Nash 均衡にも停留してしまうが，BS 動学ではそのような慣性力は働かないため，局所的な最適に留まることなく，近傍にあるより効率的な状態を探索できるのである．

例えば，**図 4** に示すような，2 プレイヤー 3 戦略の利得行列で DSO ゲームが表されているとしよう．このゲームには (B, B) および (C, A) の二つの Nash 均衡状態が存在する．ここで利用者が BR 動学に従う場合，これらはいずれも停留点となるためどちらかに到達した後は交通状態は変化しない．しかし BS 動学では，均衡状態 (B, B) から総旅行時間が同一の状態 (C, B) へと遷移し，その後より効率的な均衡状態 (C, A) に到達できることが見て取れる．

DSO ゲームにおける BR 動学と BS 動学の収束性の違いによる得失は，確率進化動学にも継承される．具体的には，式 (8) のロジット動学では，ポテンシャルである総旅行時間を最小

化する '大域' 最適状態が確率安定状態となることが保証される[*10] [18, 3, 29]．従って，DSO ゲームでは BS 動学の「不効用を厳密に改善する必要がない」という慣性力の無さが，総旅行時間の観点ではより良い状態への収束性・安定性の両面に対して有利に働くことになる．

5.3. 応用：進化的な課金 vs. 固定的な課金

DSO ゲームの最も重要な応用の一つは，最適状態を達成する料金施策について考察することである．この観点で前節の解の動学的分析は，日々の交通状態に応じて料金を調整する進化的な課金スキームの特性を明らかにしているとみなせる．本節では，現状より一般的に用いられる，課金額を予め設定し以降は変化させない固定的な課金スキームを考え，その動学的性質を調べる．そして進化的な課金スキームとの比較考察を通して，効率的な状態の実現・安定化にあたっての進化的課金スキームの重要な性質を紹介する[*11]．

まず，固定的課金スキーム下での不効用は，経路旅行時間に加えその経路に課せられた混雑料金で表されると仮定する：

$$U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) + T_i(r_i). \tag{12}$$

ここで $T_i(r_i)$ は経路 r_i に課せられた（現在の状態に依存しない）混雑料金であり，これを適切に設定することで任意の状態を狭義 Nash 均衡状態と対応させられる．例えば，DSO 状態が予め分かっているとすれば，その状態を実現する課金額を設定することができる．こうした DTA ゲームは DUE ゲームに固定課金が加わったことから，'DUE-FCP (Fixed Congestion Pricing) ゲーム' と呼ぶこととする．

DUE-FCP ゲームは DUE ゲームでの不効用を一定値だけずらしたものであり，DUE ゲームの特性を受け継いでいる．実際，特殊な構造のネットワーク上では，DUE-FCP ゲームは WAG であることが証明できる [29]．そしてこの事実を用いれば，DSO ゲームと同じく BR・BS 動学の収束性およびそれらの確率進化動学の確率安定性といった，一連の動学的性質を得ることができる．つまり，進化的課金スキームと同様に，固定的課金スキームにおいても自然な進化動学により最適状態が達成されることになる．

しかし，DSO ゲームは PG，DUE-FCP ゲームは WAG であるという違いは，最適状態への収束性や安定性に質的な違いをもたらす．第一の収束過程の違いは，各スキーム導入下での車両間相互作用の構造に起因する．まず DUE-FCP ゲームは相互作用が非対称であり，最適状態へと収束するには，適切な配分順序で事後的な最適経路が選択されていく必要がある．しかし，日々経路を変更する利用者はランダムに選ばれるので，スムーズに最適状態へと収束していくとは限らない（i.e. 総旅行時間が減少していくとは限らない）．一方で，DSO ゲームは相互作用が対称となり，そのような特定の配分順序が存在しない．そのため，交通状態は均衡状態へとよりスムーズに収束していくことが期待される．

---

*10 揺らぎを用いて非凸問題の大域最適状態を探すというアプローチは，焼きなまし法と似た原理である [34].

*11 Sandholm は静的な混雑ゲームの文脈で同様の解析を行なっており [26, 27]，本稿で紹介する解析はその拡張にあたる．

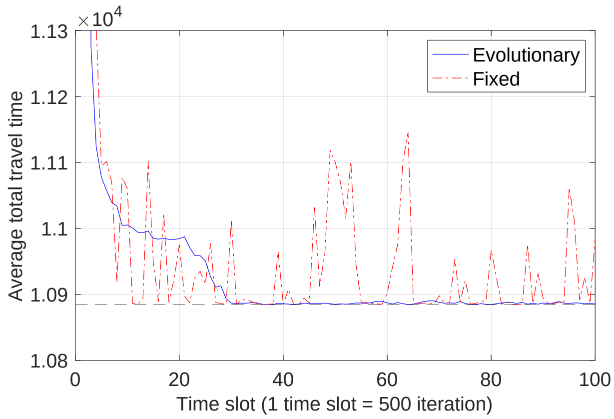

図 5　進化 (evolutionary) および固定 (fixed) 課金スキームにおける総旅行時間の挙動 [29]

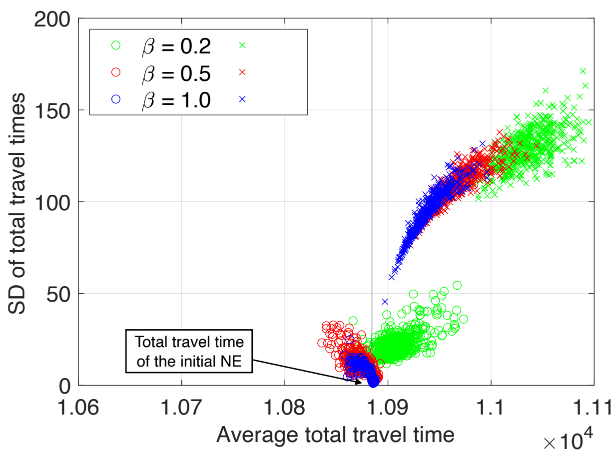

図 6　最適状態周辺における総旅行時間の挙動 [29]．各プロットはロジット動学を規定回数繰り返したサンプルパスについて，総旅行時間の平均値と標準偏差の関係を表している．

このことを具体的に示したものが**図 5** である．この図は，進化・固定課金スキーム下でロジット動学を適用したときの，ある共通した最適状態へ収束するまでの総旅行時間の挙動を表している*12．ここからは，固定課金スキームでは比較的早く減少するものの，最適状態の値近辺で総旅行時間の悪化と改善が頻繁に繰り返されていることが分かる．一方，進化課金スキームでは総旅行時間はおおよそ単調に最適状態に向かって減少していることが確認できる．

第二の安定性の違い（i.e. どの状態が確率安定状態となるか）は，課金設定の柔軟性に起因する．まず固定的課金スキームでは，ある既知の最適状態を達成するために固定された額が課金され，その目標状態が安定化する．これは，大域最適状態での外部費用が既知でない場合は非効率的な最適状態を安定化させてしまい，揺らぎが導入されても効率的な状態へと変化できなくなることを示唆している．しかし，進化的課金スキームでは日々の交通状態に応じて課金額が調整されることで，大域最適状態が常に安定化される．すなわち，大域最適状態に関する情報がなくとも，非効率的な状態への収束を回避しながら，揺らぎの効果を有効活用して効率

*12　数値計算の詳細な設定については Satsukawa et al.[29] を参考にされたい．

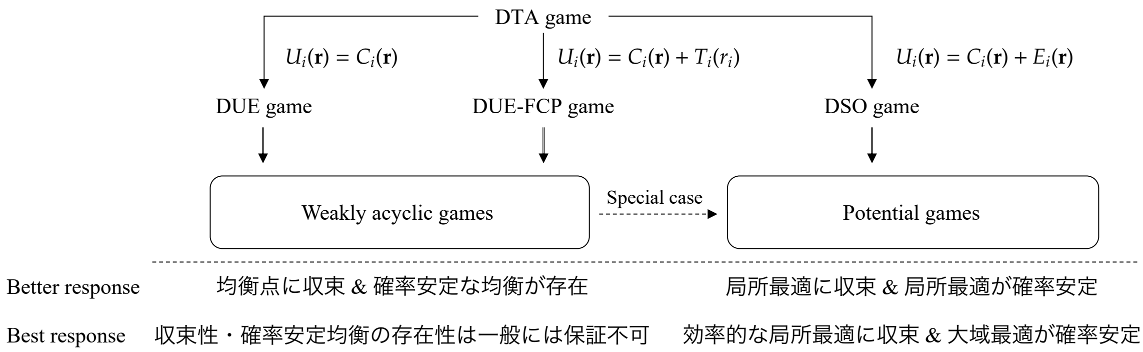

図 7　DTA ゲームとゲーム・クラスの結びつき，およびそれらの動学的性質の関係図

的な状態を探索できる．

図 6 は上記の考察を確認するために，局所最適状態を初期状態としたロジット動学のモンテカルロシミュレーションを行った結果である．ここで，初期状態における総旅行時間は黒線で示してあり，また固定課金スキームでは初期状態が安定化するように課金額を調整している．これを見ると，進化課金スキームでは揺らぎの影響により，初期状態から逸脱して総旅行時間を改善する方向へと遷移する傾向があることが分かる．一方，固定課金スキームでは揺らぎは主に総旅行時間を悪化させるのみである．これは安定化されている初期状態近傍をランダムに遷移した結果，総旅行時間が高い交通状態が平均的に実現してしまったためである．

6.　おわりに

本稿では動的なネットワーク交通流の動学的性質について，粒子モデルと確率進化ゲーム理論を用いた研究成果の解説を行った．まず，粒子モデルの動的交通配分問題である DTA ゲームを解説した．次に均衡状態の動学的性質に関する知見が蓄積されてきたゲーム・クラスを説明し，DTA ゲームとの関係性を明らかにした．そして，この関係性に基づき明らかとなった DUE・DSO 状態の動学的性質について紹介した．以上の成果をまとめたものを，**図 7** に示す．

本稿で俯瞰したように，粒子モデルはゲーム理論との親和性が高い．ゲーム理論で得られた知見を活用し，より複雑な情報構造や学習メカニズムの導入下での動学的性質の分析や，ゲーム論的な分散制御などの方向でのさらなる研究の発展が見込まれる．また，出発時刻選択などの，経路選択以外の選択行動を組み合わせたより一般的な交通配分問題への，粒子モデルの適用可能性を探ることも重要となる．そのためには，数理計画を含めた様々な関連分野とのフィードバック関係を持った研究の進展が大いに望まれる．こうした分野間連携を基盤とした新たな研究の方向性を探ること自体も，今後の重要な課題と言えるだろう．

謝辞：本研究は，日本学術振興会 科学研究費補助金，若手研究（課題番号： 20K14843）および基盤研究 (A) （課題番号：20H00265）の助成を受けた研究の一部である．

参考文献

[1] T. Akamatsu. A dynamic traffic equilibrium assignment paradox. *Transportation Research Part B: Methodological*, 34(6):515–531, 2000.

[2] T. Akamatsu. An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues. *Transportation Science*, 35(4):389–404, 2001.

[3] C. Alós-Ferrer and N. Netzer. On the convergence of logit-response to (strict) Nash equilibria. *Economic Theory Bulletin*, 5(1):1–8, 2017.

[4] M. Beckmann, C. B. McGuire, and C. B. Winsten. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, 1956.

[5] Z. Cao, B. Chen, X. Chen, and C. Wang. Atomic dynamic flow games: Adaptive vs. nonadaptive agents. *Operations Research*, 2021, in press.

[6] M. Carey. Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem. *Transportation Research Part B*, 26(2):127–133, 1992.

[7] M. Carey, Y.-e. Ge, and M. McCartney. A whole-link travel-time model with desirable properties. *Transportation Science*, 37(1):83–96, 2003.

[8] R. Cominetti, J. Correa, and O. Larré. Dynamic equilibria in fluid queueing networks. *Operations Research*, 63(1):21–34, 2015.

[9] B. C. Dean. Shortest paths in FIFO time-dependent networks: Theory and algorithms. Technical report, 2004.

[10] A. Fabrikant, A. D. Jaggard, and M. Schapira. On the structure of weakly acyclic games. *Theory of Computing Systems*, 53(1):107–122, 2013.

[11] D. Foster and H. P. Young. Stochastic evolutionary game dynamics. *Theoretical Population Biology*, 38(2):219–232, 1990.

[12] K. Han, T. L. Friesz, W. Y. Szeto, and H. Liu. Elastic demand dynamic network user equilibrium: Formulation, existence and computation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 81:183–209, 2015.

[13] T. Iryo. Properties of dynamic user equilibrium solution: Existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology. *Transportmetrica B*, 1(1):52–67, 2013.

[14] T. Iryo and M. J. Smith. On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 117:757–773, 2018.

[15] R. Koch and M. Skutella. Nash equilibria and the price of anarchy for flows over time. *Theory of Computing Systems*, 49(1):71–97, 2011.

[16] M. Kuwahara. Some aspects of the dynamic equilibrium assignment in oversaturated networks. *JSCE Journal of Infrastructure Planning and Management*, 419 (IV-13:123–126. [In Japanese.], 1990.

[17] M. Kuwahara and T. Akamatsu. Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern. In C. F. Daganzo ed., *Proceedings of the 12th International Symposium on the Theory of Traffic Flow and Transportation*, pp. 185–204, Berkeley, 1993. Elsevier.

[18] J. R. Marden and J. S. Shamma. Revisiting log-linear learning: Asynchrony, completeness and payoff-based implementation. *Games and Economic Behavior*, 75(2):788–808, 2012.

[19] D. K. Merchant and G. L. Nemhauser. Model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems. *Transportation Science*, 12(3):183–199, 1978.

[20] D. K. Merchant and G. L. Nemhauser. Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model. *Transportation Science*, 12(3):200–207, 1978.

[21] D. Monderer and L. S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14(1):124–143, 1996.

[22] R. Mounce. Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 40(9):779–791, 2006.

[23] R. Mounce and M. Smith. Uniqueness of equilibrium in steady state and dynamic traffic networks. In R. E. Allsop, M. G. Bell, and B. G. Heydecker eds., *Transportation and Traffic Theory*, pp. 281–299, Oxford, 2007. Elsevier.

[24] G. F. Newell. A simplified car-following theory: A lower order model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(3):195–205, 2002.

[25] Y. M. Nie. A cell-based Merchant-Nemhauser model for the system optimum dynamic traffic assignment problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(2):329–342, 2011.

[26] W. H. Sandholm. Evolutionary implementation and congestion pricing. *Review of Economic Studies*, 69(3):667–689, 2002.

[27] W. H. Sandholm. Pigouvian pricing and stochastic evolutionary implementation. *Journal of Economic Theory*, 132(1):367–382, 2007.

[28] K. Satsukawa, K. Wada, and T. Iryo. Stochastic stability of dynamic user equilibrium in unidirectional networks: Weakly acyclic game approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, 125:229–247, 2019.

[29] K. Satsukawa, K. Wada, and D. P. Watling. Dynamic system optimal traffic assignment with atomic users : Convergence and stability. *arXiv preprint*, p. arXiv:2101.00116, 2021.

[30] M. Scarsini, M. Schröder, and T. Tomala. Dynamic atomic congestion games with seasonal flows. *Operations Research*, 66(2):327–339, 2018.

[31] L. Sering and L. V. Koch. Nash flows over time with spillback. *Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 935–945, 2019.

[32] M. J. Smith and M. Ghali. The dynamics of traffic assignment and traffic control: A theoretical study. *Transportation Research Part B*, 24(6):409–422, 1990.

[33] M. Smith and M. Wisten. A continuous day-to-day traffic assignment model and the existence of a continuous dynamic user equilibrium. *Annals of Operations Research*, 60(1):59–79, 1995.

[34] T. Tatarenko and B. Touri. Non-convex distributed optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(8):3744–3757, 2017.

[35] K. Wada, K. Satsukawa, M. J. Smith, and T. Akamatsu. Network throughput under dynamic user equilibrium: Queue spillback, paradox and traffic control. *Transportation Research Part B: Methodological*, 126(15):391–413, 2019.

[36] J. G. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research, 1952.

[37] H. P. Young. The evolution of conventions. *Econometrica*, 61(1):57–84, 1993.

[38] P. Zhang and S. Qian. Path-based system optimal dynamic traffic assignment: A subgradient approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, 134:41–63, 2020.

[39] A. K. Ziliaskopoulos. A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem. *Transportation Science*, 34(1):36–49, 2000.

[40] 井料隆雅. 車両を離散化した動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法. 土木学会論文集 D3（土木計画学）, 67(1):70–83, 2011.

[41] 岡田章. ゲーム理論. 有斐閣, 2011.

[42] 佐津川功季, 和田健太郎. 単一終点ネットワークにおける動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法について. 土木学会論文集 D3（土木計画学）, 73(1):103–108, 2017.

[43] 赤松隆, 和田健太郎. 動的な交通ネットワーク流問題. 第 26 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 31–46, 2014.

[44] 和田健太郎. 交通ネットワーク流の安定性と制御. 計測と制御, 55(4):368–375, 2016.

[45] 和田健太郎. 道路ネットワークの渋滞マネジメント：基本原則と喫緊課題への応用. オペレーションズ・リサーチ, pp. 421–428, 2020.

[46] 和田健太郎. 動的交通均衡配分理論の近年の進展. 土木学会論文集 D3（土木計画学）, 76(5):21–39, 2021.