

Kinematic Wave 理論の近年の発展： 変分理論とネットワーク拡張

和田 健太郎¹・瀬尾 亨²・中西 航³・佐津川 功季⁴・柳原 正実⁵

¹正会員 東京大学助教 生産技術研究所 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: wadaken@iis.u-tokyo.ac.jp

²正会員 東京工業大学研究員 環境・社会理工学院 (〒 152-8522 目黒区大岡山 2-12-1)

E-mail: t.seo@plan.cv.titech.ac.jp

³正会員 東京工業大学特任助教 環境・社会理工学院 (〒 152-8522 目黒区大岡山 2-12-1)

E-mail: nakanishi@plan.cv.titech.ac.jp

⁴学生会員 東京大学大学院 工学系研究科 博士後期課程 (〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1)

E-mail: kouki@iis.u-tokyo.ac.jp

⁵正会員 首都大学東京大学院助教 都市環境科学研究科 (〒 192-0397 八王子市南大沢 1-1)

E-mail: yanagihara@tmu.ac.jp

本稿では、道路上の交通流ダイナミクスを記述する標準的な枠組みである Kinematic Wave (KW) 理論の近年の発展について解説を行う。具体的にはまず、KW モデルの従来の解析法を概説しその限界を述べた上で、交通流の変分理論 (VT) を解説する。また、様々な座標系 (Euler 座標系, Lagrange 座標系) で記述される交通流モデルが VT の枠組みにより相互に関係づけられることをみる。続く章では、上記の単一道路区間 (リンク) でのモデルをネットワークに拡張するための理論について記述する。ここでは、多車線道路や交差点を対象に、複数のリンクの境界面における交通流を決めるための条件や手法を解説する。

Key Words: traffic flow, kinematic wave theory, variational theory, network flow, multi lane model, node model

1. はじめに

交通流理論は、道路上の様々な交通現象を記述・解析・予測するための枠組みであり、分析目的や時空間スケール、表現する走行挙動の詳細度に応じて多数のモデルが開発されている。これらは主に、車群を流体として近似して交通状態の時空間進展をモデル化する巨視的なモデルと、車両の走行挙動や車両間の相互作用を直接モデル化する微視的なモデル、に大別される。

その歴史は、1930年代の Greenshields^{1),2)} の交通状態量の間の関係のモデル化 (FD: Fundamental Diagram) まで遡ることができるが、1950年代になると微視的・巨視的モデル双方で現在の標準的な道具立てとなる理論的枠組みが複数の研究者から独立に提案された¹。前者が追従理論であり、後者が本稿で対象とする Kinematic Wave (KW) 理論 (衝撃波理論) である。

KW 理論は、モデルが簡潔であり解析的にも数値的にも取り扱いが容易でありながら、いくつもの交通現象をよく表現することができるという特徴を持つ。そ

のため、多くの応用や交通シミュレーションとしての実装が存在する。しかし、その理論の現在に至るまでの発展は連続的なものというよりは、(多くの理論がそうであるように) 重要な“ジャンプ”によってなされてきたとみることができる。

実際、Lighthill and Whitham^{3),4)} と Rihards⁵⁾ により独立に提案された KW 理論は、提案された 1950 年代から長らく大きな理論的な発展は見られなかった。しかし、1990 年代になって、その応用範囲は大きく広がる画期的な解析法・数値計算法が提案される。それが、Newell^{6),7),8)} による最小包絡線原理と、Daganzo^{9),10),11)} や Lebacque¹²⁾ による Cell Transmission Model (CTM) である。さらに、2000 年代に入ると、Daganzo^{13),14)} の交通流の変分理論 (VT: Variational Theory) の提案により、KW 理論の基本的な枠組みは完成しつつある。本稿の第一の目的は、この発展の経緯を踏まえつつ、交通流の変分理論およびその応用を解説することである²。

一方、上記の単一道路における交通流ダイナミクス解析のための方法論とは異なり、ネットワーク上の交通流の記述手法については、先の Daganzo¹⁰⁾ による CTM 以来、大きな注目を集めてこなかった。しかし、2000 年代になり、Lebacque and Khoshyaran¹⁶⁾ により、ネッ

¹ こうした世界的な交通研究への関心の高まりを受け、1959 年に第 1 回の国際交通流シンポジウム (International Symposium on the Theory of Traffic Flow) が開催された。以来、より広範な交通理論を扱う国際運輸・交通流シンポジウム (International Symposium on Transportation and Traffic Theory, ISTTT) として、現在に至るまで交通分野の理論の発展に貢献している。

² VT の近年の解説としては、Kawahara¹⁵⁾ もある。

トワーク上のノード（分流・合流・交差点）での交通流を適切にモデリングすることの重要性やそのための条件が指摘され、2010年代に入るとその理論の体系化が急速に進んでいる。本稿の第二の目的は、この体系の解説である。また、ここでは、同様の手法によるKW理論の拡張とみなせる多車線道路におけるモデルについても紹介する。

なお、本稿は以上の理論に関する文献を網羅的に列挙することが目的ではなく、その基本的なアイデアや枠組みを簡潔に解説することを目標としている。また、数値計算法やシミュレーション手法についてはあまり扱っていない。こうしたシミュレーション法に関する研究やその他の交通流モデル（マイクロモデルや高次のマクロモデルなど）については近年の教科書^{17),18)}を、ここでは扱わない最新の研究については近年のレビュー^{19),20),21),22),23),24)}を参照にされたい。

2. KW モデルの概説と交通流の変分理論

本章ではまず、(1)、(2)でKWモデルの従来の解析法を簡単に解説する。その上で、(3)で交通流の変分理論について述べる。

(1) Lighthill-Whitham-Richards モデル

a) LWR 方程式

Lighthill and Whitham^{3),4)}の有名な論文“On kinematic waves”は、流体や交通流などに適用可能な次元上の波動理論を記述したものである。Richards⁵⁾は、独立に、同様の流体力学的交通流理論を提案している。これらの理論は、次の2つの要素から構成されている：

1. 微分形式の車両数の保存則（連続式）

2. Fundamental Diagram (FD)

1. の保存則は、対象の道路区間に入出りがなければ、時刻 t と位置 x について滑らかな交通量 $q(t, x)$ 、密度 $k(t, x)$ を用いて以下のように記述される：

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

2. のFDは、交通流観測から経験的に得られている交通量と密度の関係であり、一般に交通量 $q(t, x)$ が密度 $k(t, x)$ に関する凹関数になることを仮定する（図-1）：

$$q(t, x) = Q(k(t, x), t, x). \quad (2)$$

FDは $k \in [0, \kappa]$ で定義され、ある密度（臨界密度）で最大交通量（容量） q_{max} をとる。また、この図の原点からFD上の点の傾きは空間平均速度 v である ($v = q/k$)。

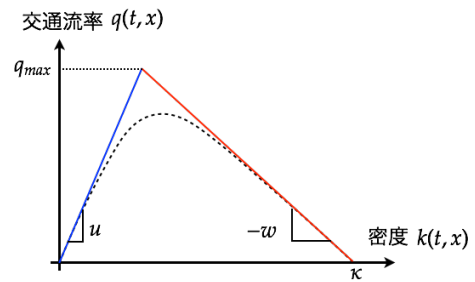


図-1 Fundamental Diagram

ここで、式(2)を式(1)に代入すると、密度 k のみの方程式が得られる：

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + x'(k, t, x) \frac{\partial k(t, x)}{\partial x} = - \frac{\partial Q(k, t, x)}{\partial x} \quad (3)$$

$$x'(k, t, x) \equiv \partial Q(k, t, x) / \partial k. \quad (4)$$

式(3)をLWR方程式と呼び、FDの接線の傾きを表す式(4)をwave speedと呼ぶ。Wave speedのうち、特に u をForward Wave (FW) 速度（あるいは自由流速度）、 w をBackward Wave (BW) 速度と呼ぶ。

b) 特性曲線法

LWR方程式(3)の標準的な解法は特性曲線法 (method of characteristics) である。この方法は、偏微分方程式を連立常微分方程式に帰着させるものである。

まず、wave speed (i.e., $dx/dt = x'(k, t, x)$) で走行する移動観測者の軌跡 $x(t)$ (特性曲線あるいはwave pathと呼ぶ) に沿った密度変化を考える：

$$\frac{dk(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + x'(k, t, x) \frac{\partial k(t, x)}{\partial x}. \quad (5)$$

この式は、密度 k に関する常微分方程式であり、右辺は式(3)そのものに一致する。そして、移動観測者の速度とそれに沿った密度変化を合わせることで、LWR方程式は以下の連立一次常微分方程式：

$$\begin{cases} dx(t)/dt = \partial Q(k, t, x) / \partial k (= x'(k, t, x)) \\ dk(t, x(t))/dt = -\partial Q(k, t, x) / \partial x \end{cases} \quad (6)$$

に帰着する。この方程式を与えられた初期条件・境界条件の下で解くことにより（次節の例を参照）、特性曲線 $x(t)$ および特性曲線上の密度 $k(t, x(t))$ が求まる。すなわち、全ての初期条件・境界条件から特性曲線に沿って密度 k を決定することができる。

FDが地点や時刻に依存しない道路区間の場合 (i.e., $Q(k, x, t) = Q(k)$) は、特性曲線に沿った密度変化は0となる。すなわち、

$$\frac{dk(t, x(t))}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial Q(k)}{\partial k} = \text{const.} \quad (7)$$

であり、特性曲線が直線となるため解析が容易となる。

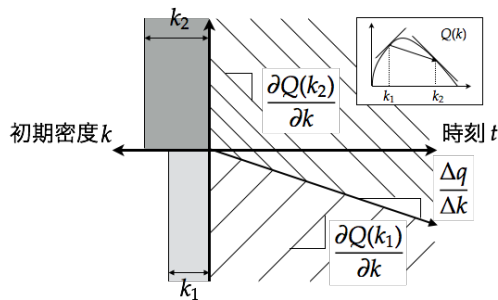


図-2 リーマン問題 ($k_1 < k_2$): 衝撃波の例

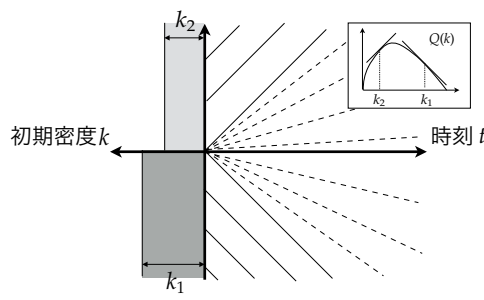


図-3 リーマン問題 ($k_1 > k_2$): 膨張波の例

c) 衝撃波と膨張波

以上で求められる各地点の密度は、特性曲線が交わらない限りにおいてLWR方程式の“正しい”解である。しかし、特性曲線が交わる場合、その地点において密度不連続に変化するという問題が生じる³。つまり、この地点で微分形式の保存則(1)はもはや成立しない。ただし、この道路区間で出入りがない以上、車両数の保存則は満たされるべきである。そこで、交通量・密度が微分可能であるという仮定を緩め、再び保存則を導こう。

いま、密度の不連続点が速度 ω で移動するとし、その上流の状態を (q_1, k_1, v_1) 、下流の状態を (q_2, k_2, v_2) とする。このとき、速度 ω で走行する移動観測者が不連続点の上下流近傍で観測する交通量は一致しなければならない。ここで、移動観測者が上流側で観測する相対交通量 r_1 は、以下のように表される：

$$r_1 = (v_1 - \omega)k_1 = q_1 - k_1\omega. \quad (8)$$

また、 $r_1 = r_2$ であるので、不連続点の移動速度 ω は、

$$q_1 - k_1\omega = q_2 - k_2\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta q}{\Delta k} \quad (9)$$

と求まる。この速度(9)に沿って進む曲線を衝撃波(shock wave)と呼ぶ⁴。衝撃波速度はFD上における上下流の2つの状態を結び傾きに一致する。

その具体例をみるために、一様な道路を区間を考え(i.e., 特性曲線は直線である)、図-2、図-3に示すリーマン問題(Riemann problem)⁵を考えてみよう。第一の例は、密度 k_1 ($x < 0$)が密度 k_2 ($x > 0$)よりも小さい場合である。このとき、上流側の境界から生じる特性曲線はどこかのタイミングで必ず下流側の境界から生じる特性曲線に追いつく。そして、特性曲線が交わる地点で衝撃波が発生し、特性曲線は消失する。

第二の例は、密度 k_1 が密度 k_2 よりも大きい場合である。このとき、上流側の境界から生じる特性曲線は、下流側の境界から生じる特性曲線に追いつくことはできない。従って、時空間図上に、空白領域が生じることになり、この領域では特性曲線法は何の情報ももたらさない。さらに、困ったことに、この空白領域を覆うことができる保存則を満たす非物理的な解は唯一ではない(e.g., 膨張衝撃波)。では、そのような物理的に不自然な解を排除する他の基準はどういうものであろうか？

ここでもう一度、図-2の衝撃波と特性曲線の関係を思い出そう。特性曲線は時間に前向きに進むとき、衝撃波と交わる点で消失する。逆に時間を遡ると、この特性曲線はどの衝撃波とも交わることはない。つまり、

$$x'(k_1) > \omega > x'(k_2) \quad (10)$$

の条件を満たしている必要がある。これは、(Laxの)エントロピー条件(entropy condition)と呼ばれるものであり、大雑把に言えば、衝撃波から特性曲線が生じないこと、つまり、時間についてのある種の不可逆性(時間の矢)を述べる条件である²⁵⁾。そのため、熱力学の第二法則とのアナロジーからその名がついたという。

この条件(10)を考えると、空白領域の任意の点から時間を遡るとき、特性曲線は衝撃波と交わるべきではない、ということになる。これを満たすのが図-3の点線で示した扇型の膨張/希薄波(expansion/rarefaction wave)である。この解は、初期状態の密度の不連続性が崩れながら(車群が拡散しながら)時間が進展していくことを表している⁶。

(2) NewellのKW理論

前節においてLWR方程式の解は、特性曲線、衝撃波、膨張波から構成されることをリーマン問題を通して見た。しかし、一般の初期条件(や境界条件)を考えた場合、上記の3種類の波を組み合わせるとその解を求める手続きは非常に煩雑となる。本節では、そのような手続きを全く必要としない手法「最小包絡線原理(minimum

³ このとき、LWR方程式を満たす連続かつ微分可能な(いわゆる古典的な意味での)解は存在しない。衝撃波等の不連続性を伴う解を“弱解”という。

⁴ このような不連続面で満たされるべき条件は、一般に、ランキン・ユゴニオ条件(Rankine-Hugoniot condition)と呼ばれる。

⁵ 初期条件に1つだけジャンプを持つような初期値問題である。リーマン問題は、対象とする偏微分方程式の解の特徴をつかむために有用なほか、LWR方程式の解析解を得る場合や適切な数値解法を開発する際に重要な役割を果たす¹²⁾。

⁶ なお、図-1中の三角形のFD⁷⁾を考えた場合、このような膨張波は発生せず、空白領域との境界で2本の衝撃波が発生する(i.e., 車群を保ったまま時間が進展する)。

envelop principle)⁶⁾」について解説する。

a) 累積曲線と Hamilton–Jacobi 方程式

LWR 方程式では密度 $k(t, x)$ が未知変数であったが、ここでは、累積交通量 $N(t, x) \equiv \int_0^t q(t, x) dt$ を未知変数として考える。時空間軸に累積交通量軸を加えた三次元累積曲面^{26), 27)} $N(t, x)$ が微分可能であるとする、交通流率・密度は、それぞれ以下のように表される：

$$q(t, x) = \partial N(t, x) / \partial t, \quad k(t, x) = -\partial N(t, x) / \partial x. \quad (11)$$

また、このような連続的な累積曲面の存在はその時空間上での交通の出入りがなく、車両数が保存されることを意味する。従って、この理論で考えるべき要素は、FD だけである。いま、関係式 (11) を用いれば、FD は以下のように与えられる：

$$\partial N(t, x) / \partial t = Q(-N_x, t, x). \quad (12)$$

ここで、 $N_x \equiv \partial N(t, x) / \partial x$ 。この形式の偏微分方程式は、Hamilton–Jacobi (HJ) 方程式と呼ばれる。

b) 特性曲線法

特性曲線 $x(t)$ に沿った累積交通量の変化を考える：

$$\begin{aligned} \frac{dN(t, x(t))}{dt} &= \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} - x'(k, t, x) \frac{\partial N(t, x)}{\partial x} \\ &= Q(k, t, x) - k(t, x)x'(k, t, x) \end{aligned} \quad (13)$$

この式は、累積交通量 N に関する常微分方程式であり、右辺は移動観測者が観測する相対交通量 $r(k, t, x)$ である。そして、HJ 方程式は移動観測者の速度と密度および累積交通量の変化に関する連立常微分方程式：

$$\begin{cases} dx(t)/dt = x'(k, t, x) \\ dk(t, x(t))/dt = -\partial Q(k, t, x) / \partial x \\ dN(t, x(t))/dt = r(k, t, x) \end{cases} \quad (14)$$

に帰着する。この方程式を初期条件・境界条件の下で解くことにより特性曲線 $x(t)$ 、特性曲線上の密度 $k(t, x(t))$ 、累積交通量 $N(t, x(t))$ が求まる。なお前節と同様に、一様な道路区間を考えたとき特性曲線は直線となり、その直線に沿った累積交通量の変化は（密度が変化しないので）一定となる。

c) 最小包絡線原理

LWR モデル同様、特性曲線法により求められる累積交通量は、特性曲線が交わらない限りにおいて HJ 方程式の“正しい”解である。しかし、ここでも特性曲線が交わる場合に、累積交通量が複数の値を持つという問題が生じる。そのため、物理的に尤もらしい解を得るためには、複数の累積交通量値のうち唯一な値を決定するルールを特定する必要がある⁷⁾。結論を先に述べるならば、このルールは次のように表される⁸⁾：「ある地

点で実現する累積交通量は、初期・境界からその地点に到達する特性曲線上の累積交通量のうち最小のものである」。これを最小包絡線原理と呼ぶ。

なぜこのような原理が導かれるのであろうか？これは以下のように説明される。道路上での車両の動きはより下流側の車両（累積台数の小さい車両）の動きに影響を受ける。従って、ある地点のある時刻までにそこを通過することができる車の数は、より早い時刻にそこを通過する車両の“制約”（累積台数の上限値）を超えるべきではない。この自然な因果関係を実現するものが、最小包絡線原理である。なお、最小包絡線原理をとるとき、求まる累積交通量は時間的に空間的にも連続的に変化するので車両数の保存則は満たされる (i.e., 累積交通量のジャンプが生じない)。

最小包絡線原理の最大の利点は、その結果として衝撃波経路が自動的に決まることである。より具体的には、複数の特性曲線上の累積交通量と同じ値になった地点を衝撃波は通過する (i.e., 累積曲面が微分不可能になる⁹⁾)。これにより、特性曲線・衝撃波・膨張波を組み合わせるという LWR 方程式の手続きが、大幅に簡略化される。ただしそれでもなお、一般的な状況設定に対しては面倒さが残る。というのも、特殊な場合を除いて、特性曲線は“曲線”となり、その全てを求める（連立常微分方程式を解く）ことは簡単ではないためである。実際、最小包絡線原理の適用が効果的なのは、特性曲線が直線となる場合である。そして、このような一般的な状況下での KW モデルの解析法が、次節で示す交通流の変分理論である。

最後に、交通流の変分理論との比較のため、最小包絡線原理を数学的に表現しておこう。いま、一様な道路における時空間上の地点 $P = (t_P, x_P)$ の累積交通量 N_P を求めたい。図-4 に示すように、wave speed で地点 P に到達できる初期・境界上の点 $B = (t_B, x_B) \in \mathbf{B}$ の累積交通量 N_B と密度 k_B は与えられているとする。このとき、累積交通量 N_P は、地点 P に到達する特性曲線 (wave path) 群 \mathbf{W}_P の累積交通量値のうち最小のものである：

$$N_P = \min_{\mathcal{W} \in \mathbf{W}_P} [N_{B(\mathcal{W})} + \Delta_{\mathcal{W}}]. \quad (15)$$

$$\Delta_{\mathcal{W}} \equiv \int_{t_{B(\mathcal{W})}}^{t_P} r(k, t, x) dt \quad \forall \mathcal{W} \in \mathbf{W}_P. \quad (16)$$

ここで、 $\Delta_{\mathcal{W}}$ は境界から地点 P までの特性曲線上で予測される累積交通量の変化である。

(3) 交通流の変分理論

交通流の変分理論 (variational theory of traffic flow)¹⁴⁾ (以下、この手法を VT と呼ぶ) は、時空間上の各地点の累積台数を求める問題を変分問題 (最適制御問題) と

⁷⁾ LWR 方程式に対するルールは、衝撃波および膨張波 (ランキン・ユゴニオ条件およびエントロピー条件) の導入である。

⁸⁾ Luke²⁸⁾ は、同様の原理を土壌侵食に関する文脈で提案している。

⁹⁾ 衝撃波上で交通量・密度が不連続になることに対応する。

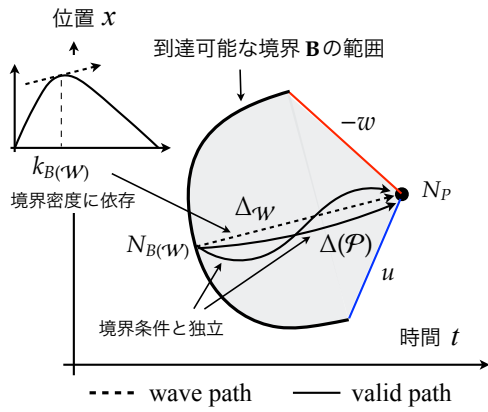


図-4 Wave path と valid path

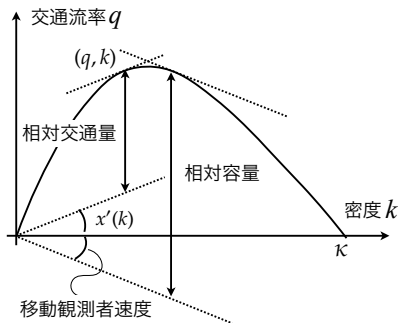


図-5 相対交通量と相対容量

して定式化するものである。この手法の交通解析上の意義は様々であるが、大きく以下の点が挙げられよう：

1. 複雑な境界条件下の KW モデルを解析する統一的方法を与える (本章の a)
2. Dynamic Programming (DP) 原理に基づく効率的な解法を与える (本章の b)
3. 様々な交通流モデルを関係づける統一的な見方を与える (次章)

よりテクニカルな点としては、この手法により最小包絡線原理の解の安定性を証明することができる¹⁰。

a) 基本理論

VT でも、状態変数は累積台数 $N(t, x)$ であり、HJ 方程式 (12) によりそのダイナミクスが記述される。

いま、時空間図上を速度 $x'(t, x) \in [-w, u]$ で走行する移動観測者を考える。このとき、移動観測者が実際に観測する累積交通量の変化量 (相対交通量) (13) を知るためには、その移動軌跡上の密度 k が必要であり、前節ではそのために特性曲線法を用いたのであった。し

¹⁰ このことをイメージするには (第二の意義とも関連するが)、ここでの変分問題が KW モデルの“等価最適化問題”と考えるとよい。交通量配分理論の発展からもわかるように、Wardrop 均衡モデルに対する Beckmann の等価最適化問題が見つかったことで、解の性質 (存在、一意性、安定性等) を調べやすくなり、また、問題を解く効率的なアルゴリズムも構築可能となった²⁹⁾。

かし最小包絡線原理で見たように、特性曲線法で求められた累積台数値は (一旦、特性曲線が交われば) “上限値”として用いられるのであり、実際に実現する値を知ることは必ずしも重要でない、とも考えられる。

そこで、移動観測者が観測可能な累積交通量の“最大”変化量を考える。これは、相対容量 (relative capacity) と呼ばれ、VT において中心的な役割を果たす概念である。相対容量は、以下のように与えられる¹¹⁾：

$$R(x', t, x) = \sup_{k \in [0, \kappa]} \{Q(k, t, x) - kx'(t, x)\}. \quad (17)$$

Q は k についての凹関数であるので、(17) の最大化条件は $\partial Q / \partial k = x'$ であり、移動観測者の速度 x' と FD の傾きが並行となる密度 k^* で最大値をとる (図-5)。また、移動観測者の速度 x' が wave speed $x'(k)$ に一致するとき、相対交通量と相対容量は一致する。

相対容量を導入する最大の利点は、相対容量 $R(x', t, x)$ が密度 k (初期条件や境界条件等のインプット・データ) に依存しないことである。このことにより、 $[-w, u]$ 内の任意の速度 x' で走行する移動観測者の軌跡 (valid path と呼ぶ) に沿った累積交通量の変化の“上限”を、その軌跡に沿った密度変化と独立に評価することができる：

$$dN(t, x(t)) / dt = r(k, t, x) \leq R(x', t, x). \quad (18)$$

いよいよ、ある地点 P の累積交通量 N_P を求める問題を考えよう (図-4)。まず、初期・境界 B から速度 $x' \in [-w, u]$ で点 P に到達する valid path 群を V_P とおく (当然、 $W_P \subset V_P$ の関係が成り立つ)。ある valid path \mathcal{P} を考えたとき、相対容量を用いれば、ある境界 B から地点 P の累積交通量の変化の上限 $\Delta(\mathcal{P})$ は、

$$\Delta(\mathcal{P}) = \int_{t_{B(\mathcal{P})}}^{t_P} R(x', t, x) dt \quad (19)$$

である。ここで、 $\Delta(\mathcal{P})$ は経路 \mathcal{P} の“関数”である¹²⁾。この累積交通量の変化の上限 $\Delta(\mathcal{P})$ を用いれば、地点 P の累積交通量 N_P の制約は以下のように書ける：

$$N_P \leq N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P}) \quad \forall \mathcal{P} \in V_P. \quad (20)$$

ここで、 $N_{B(\mathcal{P})}$ は経路 \mathcal{P} の起点となる境界の累積台数を表す。さらに、交通流の自然な特性として、制約の中でのなるべく多くの交通が流れると仮定する：

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathcal{P} \in V_P} N_P \quad \text{s.t.} \quad N_P \leq N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P}) \\ \Leftrightarrow & N_P = \inf_{\mathcal{P} \in V_P} [N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P})]. \end{aligned} \quad (21)$$

これが HJ 方程式 (12) の解を与える変分問題 (最適制御問題) である。より具体的には、目的関数は経路 \mathcal{P} の関数であり、 $N_{B(\mathcal{P})}$ と $R(u, t, x)$ を“コスト”とみなせば、問題 (21) は連続時空間上の最短経路問題と見ることができる。また、この理論で求められる累積台数値

¹¹ $-R$ は Q の Fenchel-Legendre 変換である。

¹² 前節で定義した Δ_w は経路の関数ではなく、特性曲線法 (連立一次常微分方程式) の“解”、すなわち“値”である。

は、wave path 群が valid path 群に含まれること (i.e., $W_P \subset V_P$), 特性曲線上の相対容量は相対交通量に一致すること (従って, $\Delta(W) = \Delta(w)$) を考えれば, 最小包絡線原理で求めた累積台数値に一致することが容易に示すことができる¹³⁾.

さらに, この理論では複雑な境界条件や状況を相対容量という概念で統一的に扱うことができる. 例えば, 時間や位置により FD が変化する場合は, その時刻・位置を移動観測者が横切る際の単位時間当たりの累積台数の最大変化量 (例えば, 信号を考慮するのであれば, 青現示のときは飽和交通流率 q_{max} , 赤現示のときは 0) を与えてやるだけでよく, 問題 (21) の複雑さ自体は変わらない. また, プローブ車両の軌跡データのような (流体ではない) 境界条件も容易に扱うことができる. 例えば, この軌跡データを初期条件として考えるのであれば, その軌跡 B に沿った累積台数値 $N_B = 1$ とすればよい. そのため, 多様なソース (e.g., 感知器, プローブ車両, bluetooth) からの情報を融合する手法としても応用されている (例えば, 文献^{15),30)} を参照).

b) 単純化と解法

一様な道路区間を考え, 最短経路問題 (21) を解くことを考える (より一般的な状況に対する解法は Daganzo¹⁴⁾ を参照). このときの VT の重要な特性は, 「時空間上の任意の 2 点間の累積交通量の変化の上限 $\Delta(\cdot)$ が経路によらない», つまり, 起終点のみに依存することである. さらに, 三角形の FD を仮定すると, 2 点 P, P' 間の累積交通量の変化の上限 $\Delta(P, P')$ は次式で与えられる.

$$\Delta(P, P') = q_{max}(t_{P'} - t_P) - (q_{max}/u)(x_{P'} - x_P) \quad (22)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } (x_{P'} - x_P)/(t_{P'} - t_P) = u \\ \kappa(x_{P'} - x_P) & \text{if } (x_{P'} - x_P)/(t_{P'} - t_P) = -w \end{cases}$$

さて, VT では問題 (21) を, 時空間上に構成する“離散的なネットワーク”における最短経路問題に帰着させ問題を解く. このネットワークが持つべき性質は,

1. 各ノードからでるそれぞれのリンクの傾きは wave speed である
2. そのリンクのコストは相対容量で与える

である. なぜなら, このようなネットワークには, (区分線形近似された) wave path が必ず含まれるためである. また, 経路上のリンクコストの和として $\Delta(P)$ が表される. より具体的には, 図-6 に示すような FD を敷き詰めたネットワーク (VT ネットワークと呼ぶ) を構築すればよい. ここでは, FD の各頂点をノード, それらを繋ぐリンクは $-w, u$ のいずれかの傾きを持つ; 式 (22) より, FW 速度 u の傾きを持つリンクのコストは 0, BW 速度 $-w$ の傾きを持つリンクのコストは $\kappa\Delta x (= w\Delta t)$ である. そして, ネットワーク上のノード P の累積台

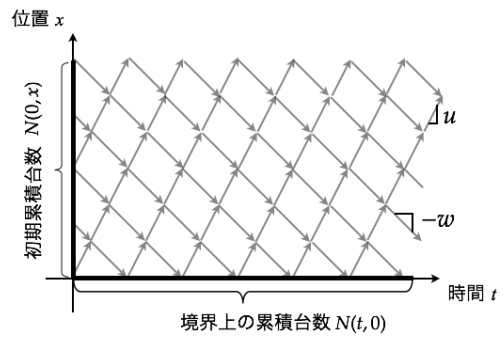


図-6 時空間上の VT ネットワークと境界条件

数値 N_P は, 問題 (21) と同様に, 到達可能な境界ノードからそのノードまでの多起点 1 終点の最短経路問題を解くことにより与えられる.

この解法は, LWR モデルの差分法 (Godunov 法^{11),12)} である CTM⁹⁾ に比べていくつもの優位性を持っている¹³⁾. まず, 一つは, 計算効率が高いという点である. これは, DP 原理に基づくアルゴリズム (e.g., Dijkstra 法¹⁴⁾ が利用可能であるためである¹⁵⁾. 二つ目は, 計算精度が高いという点である. CTM は FW 速度を基準にセルを分割するため¹⁶⁾, 下流側から BW 速度で伝わる波の伝播 (i.e., 特性曲線) が正確に表現できない. これに対して VT に基づく解法では, それぞれ wave speed に沿ったネットワークを考えているため, ある条件下では厳密な計算が可能となる.

3. 様々な座標系における KW モデル

本章では, 主に Daganzo³²⁾ と Laval and Leclercq³³⁾ に基づき, 3つの座標系における KW モデルについて解説する. これらのモデルは, 先述した $t-n-x$ の三次元累積曲面で表される交通流をそれぞれ異なる座標系においてモデル化するものである.

より具体的には, この曲面を, 「 $t-x$ 座標系における状態量 n 」とした表現 $N(t, x)$ によるモデルがここまでで説明してきた KW モデルである. この座標系は時間・空間に対して固定されており, Euler 座標系と呼ばれ, 古くから広く用いられる古典的な考え方といえる. 一方, 同じ交通流に対し, 「 $t-n$ 座標系における状態量 x 」とした表現 $X(t, n)$ や, 「 $n-x$ 座標系における状態量 t 」

¹³⁾ CTM と VT の解法の関係は赤松・和田²⁹⁾ を参照.

¹⁴⁾ このネットワークはループを含まないため (directed acyclic graph), Dijkstra 法より高速なアルゴリズムも利用可能である (ヒープ・ソートではなくトポロジカル・ソートに基づく).

¹⁵⁾ さらには, 一様な道路区間を全く分割しないリンク単位の解法も容易に構築可能であり¹⁴⁾, また, 離散的なネットワークを必要としない解析的アプローチ (Lax-Hopf formula²⁵⁾) に基づく効率的なアルゴリズムも提案されている³¹⁾.

¹⁶⁾ 差分法が不安定になることを防ぐためであり, 一般に CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件あるいはクーラン条件として知られている.

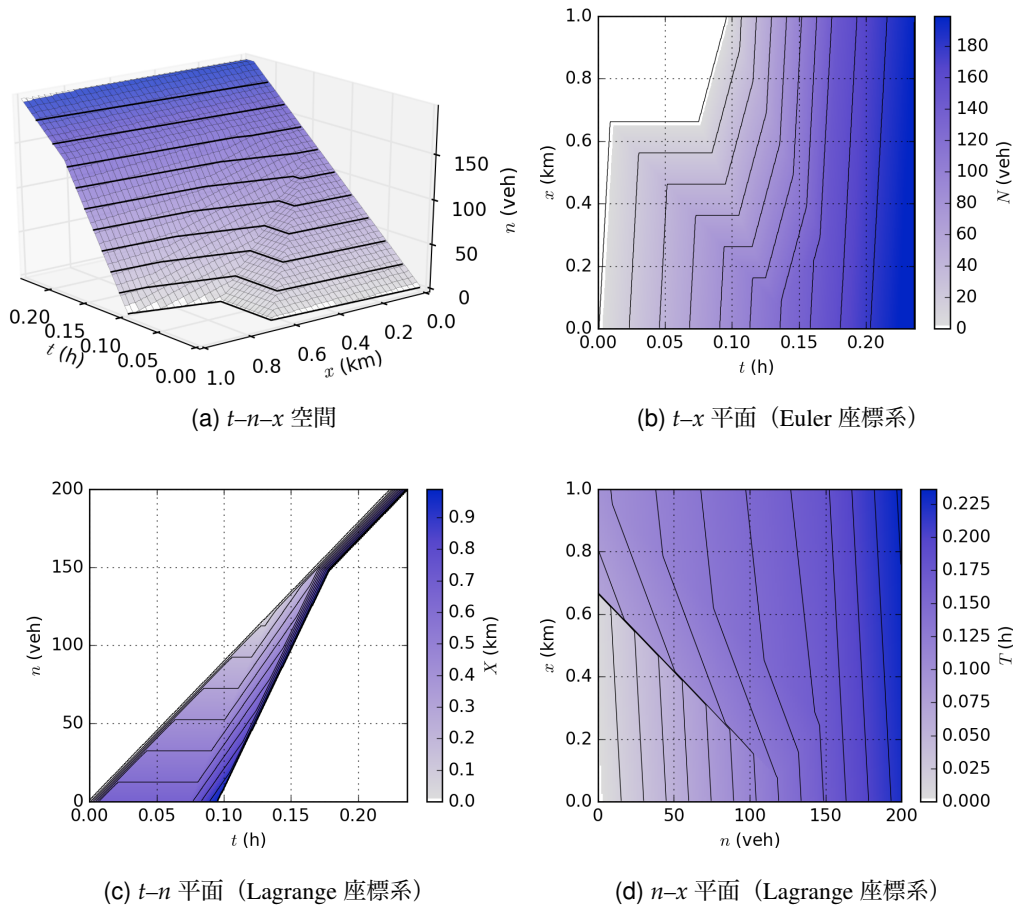


図-7 様々な座標系での交通流の表現

とした表現 $T(n, x)$ も可能である。これらは車両と共に(空間・時間に対して)移動する座標系であり、移動座標系や Lagrange 座標系³⁴⁾と呼ばれる。同一交通流を以上の3つの座標系で表現したものを図-7に示す。またここでは、Laval and Leclercq³³⁾に従い、それぞれの座標系におけるモデルを以下のように呼ぶ：

N モデル $N(t, x)$ を求める Euler 座標系のモデル

X モデル $X(t, n)$ を求める Lagrange 座標系のモデル

T モデル $T(n, x)$ を求める Lagrange 座標系のモデル

3つの座標系におけるKWモデルは、同一の物理現象を記述する様々な手法を提供しており、理論上興味深い含意を見出せるほか、実用上有効な手段となりうるといえる。例えば、問題としたい交通現象に応じて、その表現を得意とするモデルを選択することができる。さらに、これらのモデルをVTの枠組みで記述することにより、従来提案されてきた交通流モデルを相互に関係づけることができる。

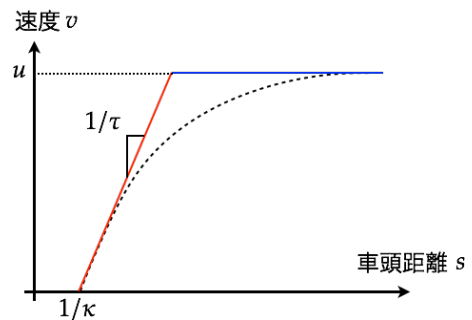


図-8 速度-車頭距離関係を表すFD

(1) VTとしての表現

a) Nモデル

Nモデルは、先述したオリジナルのKWモデルと同一である。比較のため再掲すると、

$$\partial N(t, x) / \partial t = Q(-N_x). \quad (23)$$

また、VTによる表記は以下であった：

$$\begin{cases} N_P = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{V}_P} \cdot \{N_{B(\mathcal{P})} + \Delta(\mathcal{P})\} \\ \Delta(\mathcal{P}) = \int_{t_B(\mathcal{P})}^{t_P} R(u, t, x) dt \end{cases} \quad (24)$$

図-7(b)は解 $N(t, x)$ の例 (i.e., 累積台数の等高線, つまり, 車両の軌跡) である。

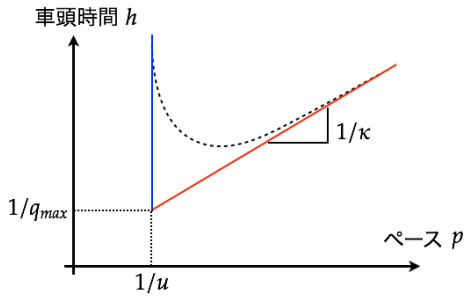


図-9 車頭時間-ペース関係を表す FD

b) X モデル

X モデルにおいて、N モデルの (q, k) に対応する変数は、速度と車頭距離 (v, s) である：

$$v(t, n) = \partial X(t, n) / \partial t, \quad s(t, n) = -\partial X(t, n) / \partial n. \quad (25)$$

$X(t, n)$ は車両 n の時刻 t における位置 (km) である。いま、 $q = v/s$, $k = 1/s$ の関係式を、式 (23) に代入すると、 $v = V(s) \equiv Q(1/s)s$ が得られる。 $V(s)$ は速度-車頭距離関係を表す FD である (図-8 を参照)。さらにこの FD に式 (25) を代入すれば、X モデルは下式で表される：

$$\partial X(t, n) / \partial t = V(-X_n) \quad (26)$$

式 (26) も Hamilton-Jacobi 方程式であるので、前章で示した要領で変分問題を構成することができる。

$$\begin{cases} X_P = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{V}_P^X} \{X_{B(\mathcal{P})} + \Delta^X(\mathcal{P})\} \\ \Delta^X(\mathcal{P}) = \int_{t_B(\mathcal{P})}^{t_P} R^X(q, t, n) dt \end{cases} \quad (27)$$

ここで、 $R^X(\eta, t, n)$ は

$$R^X(q, t, n) = \sup_{s \in [1/k, \infty)} \{V(s, t, n) - sq(t, n)\}. \quad (28)$$

で定義され、その意味は相対速度の最大値である。

変分問題 (27) の意味は以下ようになる。 t - n 平面上の点 P 、すなわち、 n_P 番目 (ここでは、実数である) の車両の時刻 t_P の位置 X_P を求めたい。この位置は、境界から点 P に到達するすべての valid path \mathcal{P} 群による制約： $X_P \leq X_{B(\mathcal{P})} + \Delta^X(\mathcal{P})$ (i.e., 時刻 t_P に先行車両よりも進んだ位置にいない) を満たす必要がある。ここで、N モデルが制約条件の中で最も多く交通を流すと仮定したのと同様に、車両が前に進める限り移動すると仮定する。すると、式 (27) の第一式が得られる。図-7(c) は解 $X(t, n)$ の例 (i.e., 位置の等高線、つまり、各位置の累積曲線) である。

c) T モデル

T モデルにおいて、X モデルの変数 (v, s) に対応する変数は、車頭時間とペース (単位距離を進むのに要する時間) (h, p) である：

$$h(n, x) = \partial T(n, x) / \partial n, \quad p(n, x) = \partial T(n, x) / \partial x. \quad (29)$$

$T(n, x)$ は車両 n が位置 x に存在する時刻 (h) である。いま、 $v = 1/p$, $s = -h/p$ の関係式を、式 (26) に代入する

と、 $h = H(p) \equiv -V^{-1}(1/p)p$ が得られる。 $H(p)$ は車頭時間-ペース関係を表す FD である (図-9)。さらにこの FD に式 (29) を代入すれば、T モデルが得られる：

$$\partial T(n, x) / \partial n = H(T_x) \quad (30)$$

T モデルでは累積台数 n が、N モデル、X モデルにおける時間 t に相当する。

式 (29) もまた Hamilton-Jacobi 方程式であるので、以下の変分問題を構成することができる¹⁷⁾。

$$\begin{cases} T_P = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{V}_P^T} \{T_{B(\mathcal{P})} + \Delta^T(\mathcal{P})\} \\ \Delta^T(\mathcal{P}) = \int_{n_B(\mathcal{P})}^{n_P} R^T(-s, n, x) dn \end{cases} \quad (31)$$

ここで、 $R^T(-s, n, x)$

$$R^T(-s, t, n) = \inf_{p \in [1/v, \infty)} \{H(p, n, x) + ps(n, x)\}. \quad (32)$$

と定義され、相対車頭時間の最小値を表す。

変分問題 (31) の意味は以下ようになる。 n - x 平面上の点 P 、すなわち、 n_P 番目の車両の位置 x_P の到達時刻 T_P を求めたい。この位置は、境界から点 P に到達するすべての valid path \mathcal{P} 群による制約： $T_P \geq T_{B(\mathcal{P})} + \Delta^T(\mathcal{P})$ (i.e., 先行車両よりも早い時刻に位置 x_P に到着できない) を満たす必要がある。ここでも、車両がなるべく早く位置 x_P に到達するように走行するとすると、式 (31) の第一式が得られることになる。図-7(d) は解 $T(n, x)$ の例である。

(2) N, X, T モデルの等価性

以上の3つのモデルは、等価な境界条件と FD が与えられれば、それぞれが n - t - x 空間内で構成する曲面が (基本的には) 互いに一致する³³⁾。例えば、N モデルと X モデルでは、

$$N(t, X(t, n)) = n, \quad X(t, N(t, x)) = x \quad (33)$$

がほとんど全ての x, t で成り立つ³²⁾。例外は、N モデルにて $k = 0$ となる場合であり、そのとき X モデルにて $s = \infty$ な特異点が生じ、式 (33) の後者の式が成り立たない (X が多価関数になる)。ただし、そのような場合でも、X モデルに新たな弱解¹⁸⁾ (e-solution と呼ばれる) を導入することで、N モデルと等価な解を得ることができる³⁵⁾。従って、N モデルと X モデルは厳密に等価である^{35), 36)}。

一方、T モデルは、N モデルとの厳密な等価性は示されていない。つまり、車両が停止した場合 (特異点 $p = \infty$)、その位置の T は複数の値をとり、 T が多価関数になる (図-7(d) 中の不連続線)。このような特異点は、X モデルの特異点とは異なり、頻繁に生じうる。た

¹⁷⁾ N モデル、X モデルと T モデルで最大/最小が逆転しているのは、FD が凸関数であるためである。

¹⁸⁾ LWR モデルにおける特異点 (密度の不連続点) の問題を解決するのが衝撃波であった。また、衝撃波上の点は N モデル (および X, T モデル) でも特異点である (i.e., 微分不可能)。この問題に対しては (実は) 粘性解という弱解が導入されている。

だし、この問題も（理論的には未解決であるが）、実際上は数値計算法の工夫で回避できると考えられ¹⁹、大きな問題とはならないであろう。

(3) 各モデルの意義

N, X モデル間の等価性の重要な含意として、交通流の流体近似に基づくマクロモデルと、追従モデルに基づくマイクロモデルの等価性がある²⁰。つまり、KW 理論において、マクロな交通流の挙動がマイクロな各車両の行動原理によって基礎づけられるという意味であり、物理モデルとして非常に好ましい性質である。

具体的には、図-8 に示した区分線形の FD を考え、X モデルの VT 表現 (27) を適当に離散化すると、

$$X(t, n) = \min \cdot \left\{ \begin{array}{l} X(t - \tau, n) + u\tau, \\ X(t - \tau, n - 1) - 1/\kappa \end{array} \right\}. \quad (34)$$

が得られる。これは、車両 n の時刻 t における位置は、その τ 時刻前の交通状態に基づき決まる、という追従モデルとして解釈できる。つまり、 τ は反応遅れ時間に相当する変数であり、車両 n は自由流時には速度 u で走行し（ \min 内第一項）、渋滞時には先行車両 $n - 1$ に対し安全車頭距離を確保するよう走行する（同第二項）。式 (34) から明らかになようにこれは、Newell の単純追従モデル³⁹⁾ そのものである。

交通流モデリングの柔軟性という観点からはこれらのモデルには違いがある。すなわち、モデルによって、容易に考慮できる異質性が異なる。現実の交通流には、様々な要素に依存した異質性があるが、實際上重要な異質性の例として、位置固有の要素としての地点ボトルネックや、車両固有の要素としての運転挙動が挙げられよう。これらの異質性を、KW 理論においては FD の変化によって記述するため、N モデルは位置・時刻に依存した異質性を扱うことができることになる。それに対し、X モデルでは位置固有の要素の考慮は難しいが、車両固有の要素を容易に考慮できる⁴⁰⁾。T モデルは位置・車両固有の要素を容易に考慮できる。

さらには、解法という意味でもそれぞれのモデルで異なる特徴を持つ。例えば先にも述べたように、LWR モデルの Godunov 法である CTM と VT に基づく解法は一般に一致しないが、X モデルでは、保存則形式：

$$\frac{\partial s(t, n)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, n)}{\partial n} = 0 \quad (35)$$

を Godunov 法により離散化したモデルと、VT を離散化したモデル (34) が比較的緩い現実的な条件のもとで互いに一致する。これは、X モデルの FD が単調であ

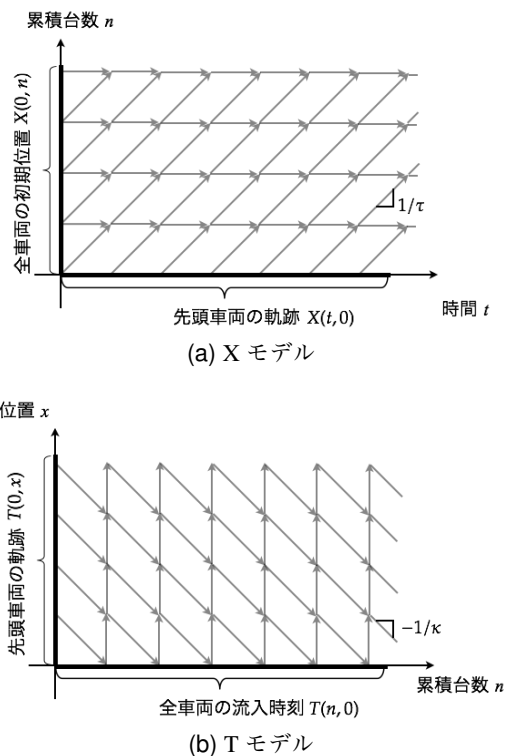


図-10 X, T モデルの VT ネットワークと境界条件

るという特徴による（N, T モデルでは成立しない）²¹。すなわち、特性曲線の傾きが非負であり、情報が時間経過により一方向（ n が減少しない方向）にのみ伝わる。これを可視化したものとして、図-10(a) に X モデルの VT ネットワーク（および境界条件）を示す（(b) は T モデルのネットワークである）。

(4) 様々な交通流モデルの関係

ここで述べてきた N, X, T モデルの関係を用いると、従来提案されてきた様々な交通流モデルの関係性を整理することができる^{32),33)}。より具体的には、様々な数値計算・シミュレーションモデルやセルオートマトンモデル（e.g., 有名な Nagel-Schreckenberg モデル⁴⁴⁾ の特殊ケース）が、“採用する座標系”（あるいは状態変数 N, X, T ）と“離散化する変数の数”（ t, x, n のいずれかまたは全て）という 2 つの軸を用いて分類される。すなわち、VT は交通流モデルに対する統一的な見方を提供しているとも言えるであろう。

¹⁹ 例えば、T モデルの解を与件として、X モデルにより停止挙動を補完することもできるであろう。

²⁰ なお、マクロとマイクロの等価性はある種の高次交通流モデルの場合にも議論されており（e.g., Aw et al.³⁷⁾）、より一般的な流体近似モデルと追従モデルを相互に変換する手法も提案されている³⁸⁾。

²¹ この特性は、データ同化による交通状態推定⁴¹⁾ への応用の際に有用となる。なぜなら、X モデルでは Godunov 法がより簡便な風上差分法に帰着され、微分可能となるためである。つまり、計算コスト・精度の観点から効率的な推定が可能となる^{34),42)}。一方、N モデルは微分不可能であり、推定上の問題（e.g., Monte Carlo 法の必要性）が生じる⁴³⁾。

4. Demand/Supply アプローチ

ここまでの章でみてきたモデルは、単一道路区間・単一車線の交通流を対象としていた。本章の後に続く2つの章では、KWモデルを空間的に拡張する手法について解説を行う。より具体的には、次章では、複数車線を持つ単一道路区間のより現実的な交通流ダイナミクスを記述するためのKWモデルについて述べる。また6.では、KWモデルを用いてネットワーク交通流を記述するために必要不可欠である交差点のモデリング（以下、ノード・モデルと呼ぶ）について解説を行う。

これらの拡張の動機や問題とする交通現象は当然異なるが、拡張の基本的なポイントは「リンクダイナミクスとの整合性を保ちながら、どのように複数のリンクの境界を互いに結びつけるのか？」という点で共通している。そして、その問いに答えるための基本となる枠組みが、CTMの構築に際して導入された“Demand/Supplyアプローチ”である^{11),12)}。本章では、以降の章の準備として、このアプローチを概説する。

(1) CTMとDemand/Supply関数

CTM²²は、LWRモデルに対するGodunov法であり、道路区間を長さ Δx のセルに分割し、セル単位での交通流をモデル化する。セルは単位時間 Δt に自由流速度で進む距離 $u\Delta t$ で分割される： $\Delta x = u\Delta t$ 。この離散化された時空間上の点 (t, x) において、LWRモデルにおける交通流率 $q(t, x)$ 、密度 $k(t, x)$ に対応する変数を次のようにそれぞれ定義する：

- $n_i(t)$ ：時刻 t にセル i 内に存在する車両台数、
- $y_i(t)$ ：時刻 $t \sim t + \Delta t$ にセル i を流出する交通量。

ここで、 $n_i = k_i \Delta x$ 、 $y_i = q_i \Delta t$ である。

これらの状態変数のダイナミクスを記述するための要素は、LWRモデル同様、交通量保存則とFDであり、FDとしては区分線形のもの（ここでは三角形）を仮定する。具体的には、セル i の交通量保存則は、

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + y_i(t) - y_{i+1}(t). \quad (36)$$

と表される。一方、セル断面を流れる交通量 $y_i(t)$ は以下のように与えられる：

$$y_i(t) = \min \{ n_{i-1}(t), q_{max} \Delta t, (w/u)[\bar{n} - n_i(t)] \} \quad (37)$$

$$= \min \{ uk_{i-1}(t), q_{max}, w[\kappa - k_i(t)] \} \Delta t. \quad (38)$$

式(38)より、 $y_i(t)$ がFDによって決まっていることが見てとれる。この式の重要な点は、FDの自由流部分はセル断面の上流側交通状態 $n_{i-1}(t)$ を用いて表されてお

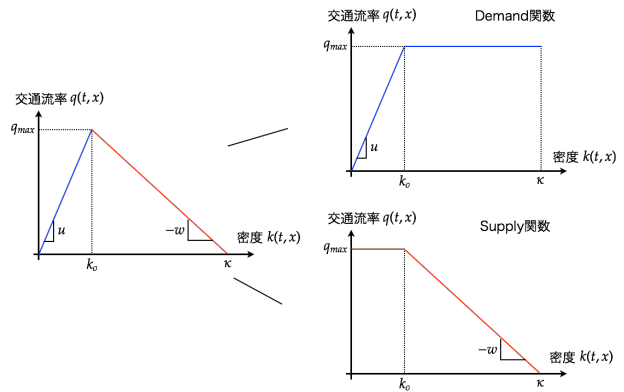


図-11 FDとDemand/Supplyの関係

り、渋滞流部分は下流側交通状態 $n_i(t)$ で表されていることである。これは、交通密度がwave speed (i.e., 自由流時は正の速度、渋滞流時は負の速度)で進展することと整合的である(2.(1)のb)特性曲線法を参照)。

より直感的には、右辺第一項(および第二項)は上流側からセル断面に流入可能な交通量を表しており、第三項(および第二項)はセル断面の下流側で受け入れ可能な台数を表す。これらはそれぞれ、“demand” D 、“supply” S と呼ばれ²³、次のように定義される(図-11)：

$$D(k) \equiv Q(\min\{k_0, k\}), \quad S(k) \equiv Q(\max\{k_0, k\}) \quad (39)$$

ここで、 k_0 は臨界密度である。これらを用いると、上述のCMT(37)は、上流側需要制約と下流側供給制約の下での交通量最大化として解釈することができる：

$$\max. y_i(t) \quad \text{s.t.} \quad y_i(t) \leq D(k_{i-1}(t))\Delta t, \quad y_i(t) \leq S(k_i(t))\Delta t.$$

以上のDemand/Supplyアプローチは、LWRモデルのリーマン問題(2.(1)のc)衝撃波と膨張波を参照)を解くことと等価であり²⁴、かつ、交通流モデルの分析にあたって極めて直感的な解釈を可能とする。そのため、交差点など空間的に不連続な地点(境界)での交通流モデリングにおける有用なツールとなる。なお、ここではCTM(LWRモデル)に基づきdemand/supplyを定義したが、VT(NewellのKW理論)に基づきdemand/supplyを定義することができる⁴⁶⁾。これは、“Link Transmission Model(LTM)”と呼ばれ⁴⁷⁾、CTMよりも計算効率のかつ精度も高いため、現在も活発に研究されている⁴⁸⁾。

(2) リンク端における適切な境界条件

Demand/Supplyアプローチのもう一つの重要な役割は、リンク内の交通状態を唯一に定めるための適切な境界条件を与えることである。すなわち、ここまでは初期条件とリンク上下流端の境界条件が与えられればKWモデルによりリンク内の交通状態を一意に決定で

²² 同種の手法は、日本では1970年代にブロック密度法として開発されていたが⁴⁵⁾、1990年代にDaganzo^{9),10),11)}によってLWRモデル(1)に対するGodunov法としてフォーマライズされ、その存在が広く知られるようになった。

²³ Daganzo¹¹⁾では、これらをそれぞれ“sending flow”, “receiving flow”と呼んでいる。

²⁴ 初期密度を $k_{i-1}(t), k_i(t)$ としたリーマン問題を解いた結果、セル断面の交通流率として $q_i(t)$ が得られる¹²⁾。

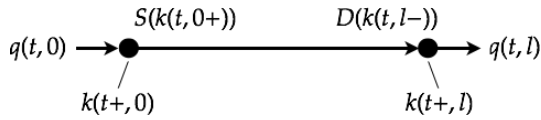


図-12 Demand/Supply とリンク端の境界条件

きるとしてきたが、そこには暗に初期・境界条件が互いに整合していることが仮定されていた。しかし現実には、データの観測誤差やデータソースの違いなどから初期・境界条件が整合しない状況は容易に生じうる。そして、そのデータの下ではKWモデルは ill-posed な問題となる (e.g., 解が唯一でない, 解が存在しない等)。

そこで、与えられたデータをそのままKWモデルへの入力とするのではなく、リンクの demand/supply を介して適切な境界条件に変換するというのが、ここでの問題解決手法である¹⁶⁾。そしてこの手法は、次章以降のKWモデルの空間的な拡張の基礎とも言える。なぜなら、Demand/Supplyアプローチを用いている限り、リンクのKWモデルには適切な境界条件が与えられる、すなわち、車線間や交差点における交通流モデルを考える際に、リンクのKWモデルとの整合性を心配する必要が(基本的には)なくなるためである。

具体的にその手法を記述しよう。いま、時刻 t においてリンク $x \in (0, l)$ 上に密度 $k(t, x)$ が与えられているとする。また、リンク上流端の交通量データ $q(t, 0)$ 、リンク下流端の交通量データ $q(t, l)$ が与えられたとする(図-12)²⁵⁾。このとき、適切なリンク上流端・下流端の密度(境界条件)は、リンクの demand/supply を用いて以下のように与えられる^{12), 16)}：

$$k(t+, 0) = \begin{cases} D^{-1}(q(t, 0)), & q(t, 0) \leq S(k(t, 0+)) \\ k(t, 0+), & q(t, 0) > S(k(t, 0+)) \end{cases} \quad (40)$$

$$k(t+, l) = \begin{cases} S^{-1}(q(t, l)), & q(t, l) \leq D(k(t, l-)) \\ k(t, l-), & q(t, l) > D(k(t, l-)) \end{cases} \quad (41)$$

ここで、 $+/-$ は右側/左側極限を表す。この条件は一見複雑であるが、この境界条件を交通量で表示すると、

$$q(t+, 0) = \min\{q(t, 0), S(k(t, 0+))\} \quad (42)$$

$$q(t+, l) = \min\{D(k(t, l-)), q(t, l)\} \quad (43)$$

であり、CTMと同様の条件を表していることがわかる。

5. 多車線道路におけるKWモデル

実際の道路は複数の車線からなる場合が多く、多車線ならではの現象が実際上重要となることがある。例えば、高速道路での織り込み区間や出口付近での車線

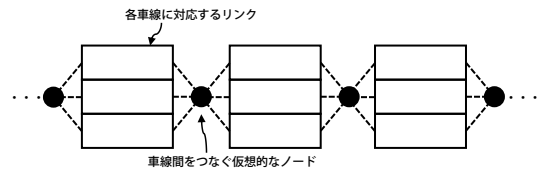


図-13 離散ネットワークによる多車線道路の模式図

変更による交通流の効率低下や、通常車線と追越し車線の性質の違い、車線毎の交通運用・制御などがある。

こうした車線変更を伴う多車線道路の交通流のモデル化は、主に2つの観点からなされてきた：(a) 車線変更の意思決定モデリング；(b) 車線変更が周辺交通へ与える影響のモデリング。このうち、(a) は微視的なモデルに基づくものであり膨大な研究蓄積がある⁴⁹⁾。一方、(b) はその重要性にも関わらずその研究は限られている。本章ではその数少ない(b)に関するモデルを解説する。その概要は以下の通りである：

- 離散ネットワークアプローチ (本章(1))：多車線リンクを、車線を明示的に考慮してモデル化する⁵⁰⁾。数値計算により解を求める際には、短い単一車線リンクが並列に並び、かつそれが直列に並んでいるネットワークとして離散化する⁵¹⁾。それぞれの車線の交通流は通常のKWモデルで記述されるという意味で、KWモデルと整合的である。ノード部における車線変更の動機や、車線の性質の考え方に応じて異なるモデルが提案されている^{52), 53)}。
- 単純連続アプローチ (本章(2))：車線を明示的に考慮せず、車線変更による交通流の効率性低下のみを表現する⁵⁴⁾。織り込み区間などでの現象を簡潔に表現するために提案されたものであり、KWモデルと整合的である。

(1) 離散ネットワークアプローチ

多車線リンク内の車線を考慮する離散ネットワークアプローチでは、それぞれの異なる車線に、異なる別々の状態を割り当てることで車線の区別を明示的に行う。(CTMのように)道路を空間的に離散化した場合、図-13のように、各区間内の各車線がリンクとなり、区間でノードを介して接続されたより高次のネットワークとして交通流がモデル化される。このモデリング・アプローチの利点は、車線別の交通量や平均速度などを扱うことで車線別の交通管制・交通制御などに応用ができる点にある。

より具体的には、このアプローチでは、各車線 l 毎に区別して微分形式の保存則を考える⁵⁵⁾：

$$\frac{\partial k_l(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q_l(t, x)}{\partial x} = \sum_{l' \neq l} [\Phi_{l'l} - \Phi_{ll'}] \quad l = 1, \dots, n \quad (44)$$

²⁵⁾ ここでのデータは“観測”データのみを意味するのではなく、リンクのKWモデルとは別のモデル (e.g., ノード・モデル) により決まる交通量とも解釈される。

ここで、 $\Phi_{ll'}$ は車線 l から車線 l' への車線変更流率であり、この特定化により様々なモデルが考えられる。

以降では、まず、本アプローチの根幹となる $\Phi_{ll'}$ の計算原理 “Incremental Transfer (IT) Principle” を 2 車線道路を例に説明する。その上で、3 車線以上の拡張や $\Phi_{ll'}$ の様々な特定化例について説明する。

a) 状況設定

Daganzo et al.⁵¹⁾ に基づき、2 種類の車両が 2 種類の車線を走行する単純な状況を考える。2 種類の車線は通常車線と優先車線、2 種類の車両は、通常車線のみを走行できる通常車両、どちらの車線も走行できる優先車両として区別される。通常車線と優先車線の車線数をそれぞれ f_r, f_p とし ($f_r + f_p = n$)、全車線の密度を k_T 、全車線の通常 “車両” の密度を k_r 、優先 “車両” の密度を k_p とする。また、 f_r 本の通常車線群の密度を \hat{k}_r 、 f_p 本の優先車線群の密度を \hat{k}_p とする。さらに、車線変更がない定常流における車線種類別の速度は、車線種類別・1 車線あたりの密度 $\hat{k}_r/f_r, \hat{k}_p/f_p$ (あるいは車頭距離) の関数である FD (26) を用いて、

$$v_r = V(\hat{k}_r/f_r), v_p = V(\hat{k}_p/f_p) \quad (45)$$

と表せると仮定する。

以上の状況設定の下、優先車両はより速く移動できる車線を選ぶことができるため、車線変更のない定常流においては優先車線の速度は通常車線の速度以上とならなければならない： $v_r \leq v_p$ 。また、優先車両はより速く走行するという原理により車線選択を行っているのであれば、定常流における車線選択均衡条件は次のように述べることができる：優先車両が存在するすべての車線において速度は均一である。この条件を定式化すると、

$$\begin{cases} \hat{k}_r = k_r, \hat{k}_p = k_p & \text{if } v_r < v_p \\ \hat{k}_r \geq k_r, \hat{k}_p \leq k_p & \text{if } v_r = v_p \end{cases} \quad (46)$$

$v_r < v_p$ の状態は通常車両と優先車両が分離している状態であり、“2-pipe regime” と呼ばれ、 $v_r = v_p$ の状態は、通常車両と優先車両が混在した 1 つの流れであることから “1-pipe regime” と呼ばれる。

定常流で実現するすべての (4 つの) 状態を 2 種類の車両の密度ペア (k_p, k_r) 平面で表現したものが図-14 である²⁶。自由流状態 A では、各車両が自由流速度 u で走行する。通常車両が優先車両より比率が高く (i.e., $k_r/k_p > f_r/f_p$)、かつ、通常車両の密度がその臨界密度 $f_r k_o/n$ よりも高い状態 B, C では、優先車両と通常車両が 2 種類の車線へ分離する。優先車両の比率が通常車

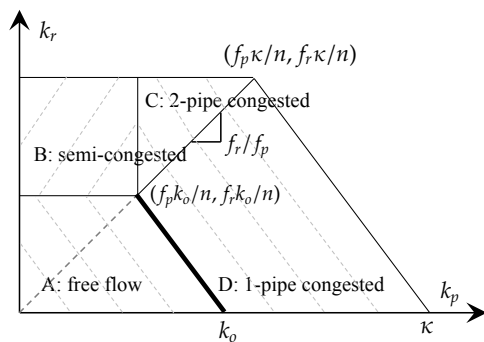


図-14 2 種類の車両・車線における交通状態

両より高く、かつ、臨界密度より密度が高い状態 D では、2 種類の車両の速度が一致する。

最後に通常・優先車両それぞれの交通量：

$$q_r = k_r v_r, q_p = k_p v_p \quad (47)$$

について述べておこう。図-14 における破線は総交通量 $q_r + q_p$ の等高線を示しており、状態 A と状態 D の境界 (太線) において、総交通量は最大となる。この交通量は 1-pipe regime の交通容量を表している。一方、状態 A と状態 B の境界では、優先車線の交通量 q_p が一定のとき、通常車両の交通量 q_r が最大となり、2-pipe regime における交通容量を規定することになる。

b) Incremental Transfer Principle

さて、いよいよ式 (44) を時空間に離散化し、計算することを考える。より具体的には、図-13 で示したようなネットワークを考え、微小区間・微小な時間間隔の間において実現される (ノードを通過する) 車線別交通量 (q_r, q_p) (および、車線間の遷移交通量 $\Phi_{ll'}$) を求める。

いま、ノード上流側の通常・優先車線の demand を (D_r, D_p)、ノード下流側の通常・優先車線の supply を (S_r, S_p) とする。これらの値は、2 種類の車両密度 (k_p, k_r) に応じて与えられる (図-14)。すなわち、交通状態が 1-pipe regime にあるときは、

$$D_r = Q(\min\{k_o, k_T\})k_r/k_T, D_p = Q(\min\{k_o, k_T\})k_p/k_T$$

$$S_r = Q(\max\{k_T, k_o\})f_r/n, S_p = Q(\max\{k_T, k_o\})f_p/n$$

と定義され、2-pipe regime では次のように定義される：

$$D_r = Q(\min\{f_r k_o/n, k_r\}), D_p = Q(\min\{f_p k_o/n, k_p\})$$

$$S_r = Q(\max\{f_r k_o/n, k_r\}), S_p = Q(\max\{f_p k_o/n, k_p\}).$$

IT principle はこの demand をある特定のルールに従って徐々に下流側の supply に流していき、最終的に実現する交通量を求めるものである。いま、図-15 の上図の灰色領域に demand ペア (D_r, D_p) があり、それぞれの軸に示した supply (S_r, S_p) が与えられていたとしよう。この状況を模式的に表したのが、図-15 の真ん中の図である。Supply 側はそれぞれの車線数に対応した幅を持

²⁶ 通常の交通量-密度曲線が、密度によって交通状態を自由流/渋滞流と判別するのと同様に、この図も密度ペアによって交通状態を判別することができる。従って、この図は 2 種類の車両・車線に対する一種の FD とみなすことができる。

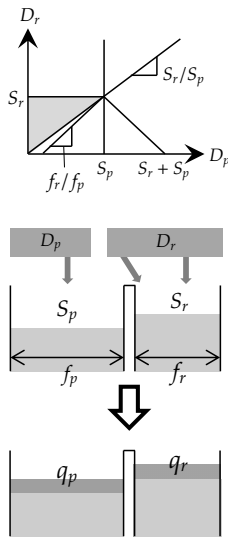


図-15 IT principle の模式図

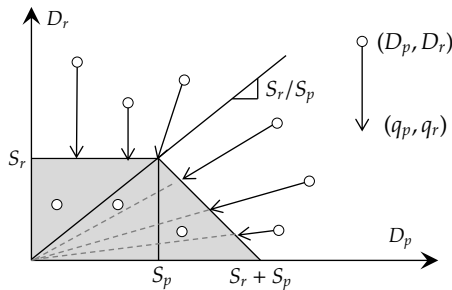


図-16 IT principle により実現する交通量

つ (高さは同じ) 貯水槽として表現され、灰色で表される流体の高さが混雑度、残りの部分が受け入れ可能な supply を表している。この状態に対して、以下のルールに従って demand を流したとき、最終的に実現する交通量が図-15 の下図の濃い灰色で表される部分である。

- 通常車両の demand は通常車線の貯水槽に流す
- 優先車両の demand は通常・優先車線のより空いている (流体の高さが低い) 貯水槽に流す
- すべての demand が流し終わるか、いずれかの supply が満たされた場合にその手順を終了する

また以上の手順を様々な demand ペア (D_p, D_r) に適用し、最終的に実現する交通量 (q_p, q_r) をまとめたのが図-16 である。この図では、白丸が与えられた demand ペア、矢印の先が最終的に実現する交通量を表している。つまり、demand が supply を下回る (i.e., 交通容量以下の) 灰色領域に与えられたとき、demand がそのまま交通量として実現する。一方、demand が supply を超える領域で与えられたとき、 $D_r/D_p \geq S_r/S_p$ では各交通量はそれぞれの supply に一致し、 $D_r/D_p \leq S_r/S_p$ では

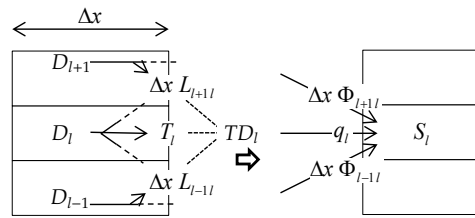


図-17 多車線区間の Demand/Supply

総 supply が各車両の demand 比でそれぞれの車両に割り当てられる状態が実現する。またこのルールは以下の式でも表すことができる：

$$\begin{cases} q_r = \min\{D_r, S_r\}, q_p = \min\{D_p, S_p\} & \text{if } D_r/D_p \geq S_r/S_p \\ q_p + q_r = \min\{D_r + D_p, S_r + S_p\} & \text{and } q_p/q_r = D_p/D_r \\ & \text{if } D_r/D_p \leq S_r/S_p \end{cases}$$

後者はさらに、次のように書き換えられる：

$$q_r = D_r \min\left\{1, \frac{S_r + S_p}{D_r + D_p}\right\}, q_p = D_p \min\left\{1, \frac{S_r + S_p}{D_r + D_p}\right\} \quad (48)$$

IT Principle に基づく実現交通流は、すべての車両の車線選択が走行速度をより高くしようと走行するという仮定に矛盾しない状態を保持している。加えて、下流の車両から車線変更の状態が決定されていく場合には、上述した仮定に矛盾しない状態の交通流が常に実現される。なお、IT principle は、式 (44) の Godunov 法と整合的であり、数学的に実現交通量を決める式を導くこともできる。ただし、IT principle は物理的な意味が直感的に分かりやすく、また、この状況設定に限らず応用可能な基礎原理として重要である。

c) 多車線モデルへの拡張

次に、3 車線以上に対応可能な交通流モデルについて Laval and Daganzo⁵²⁾ に基づき説明する。まず、各車線の demand/supply を図-17 のように定義する。具体的には、単位距離当たりの車線 l' から車線 l への demand を $L_{l'l}$ 、車線を推移しない demand を T_l 、車線 l の supply を S_l とする。また、車線 l への demand の合計は下式のように表せる。

$$TD_l = T_l + \sum_{l' \neq l} \Delta x L_{l'l} \quad (49)$$

一般的な多車線の場合、すべての車両はすべての車線に移動可能であり、2 車線の例における車両が混在している状態が常に実現されると考えられる。従って、交通流が IT principle に従うとき、実現する交通量は式 (48) に類似した以下の式で与えられる。

$$q_l = T_l \min\left\{1, \frac{S_l}{TD_l}\right\}, \Phi_{l'l} = L_{l'l} \min\left\{1, \frac{S_l}{TD_l}\right\} \quad (50)$$

ただし、この時点ではまだモデルは完全に指定されておらず、車線変更の demand $L_{l'l}$ をどのようにモデル化

するかがモデリングの主なポイントになる。

この demand には、速度などに基づくドライバーの車線選好のほか、下流の分合流の影響などさまざまなものが影響するため、そのモデル化には様々なものが考えられるが、以下では車線間の速度や車線選好に基づいた代表的な例を2つ紹介する。

Laval and Daganzo⁵²⁾では、速度差に従うモデルとして、以下のような L_{pl} を提案している：

$$L_{pl} = \frac{D_l \Delta v_{pl}}{\Delta x \tau} \quad (51)$$

ここで、 Δv_{pl} が車線間の速度差であり、車線変更の demand が速度差に比例する。また、 τ はドライバーが車線変更を決め、実行するまでにかかる時間に相当するパラメータである。この研究ではさらに、車線変更する車両を moving bottleneck となる粒子として扱い、後続車両への影響も考慮している²⁷⁾。

Shiomi et al.⁵³⁾では、車線利用率の均衡状態を表現するために、以下のような関係式に基づくモデリング手法を提案している：

$$L_{pl} = \frac{1}{\tau \Delta x} \frac{\exp(-\theta c(k_l))}{\sum_{l \neq i} \exp(-\theta c(k_l))} D_l \quad (52)$$

ここで、 θ は分散パラメータであり、 $c(k_l)$ は密度 k_l についての単調増加な車線コスト関数である。そして、これらのコストとパラメータに従う選択モデルに従う均衡車線選択確率に比例して L_{pl} が決まるとされる。

(2) 単純連続アプローチ

前節で解説したアプローチでは、いわゆる discretionary な車線変更行動の下での多車線交通流のモデル化が主眼に置かれており、その動機を記述するためにモデルが複雑化していた。一方、mandatory な車線変更行動のみを考慮する単純なモデルも提案されている。

Jin⁵⁴⁾は、単一リンク中の OD の異なる車両群を想定し、多車線交通流をモデル化した。このモデルでは、各車両がリンク下流端で所定の車線を走行する必要があると仮定し、その必要を満たすための車線変更（錯綜）行動により交通流の全体的な効率性が低下する現象を表現している。より具体的には、車両が車線変更中は2車線を占有し（図-18）、見かけ上の密度が2倍になることに着目している。なお、常に1-pipe流であると仮定されており、discretionary な車線変更は生じない。

本モデルは、保存則形式で

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial kV(k(1 + \epsilon(t, x)))}{\partial x} = 0 \quad (53)$$

と定式化される。ここに、 $\epsilon(t, x)$ は時刻 t の位置 x における車線変更の激しさを表す。つまり、式(53)は、車

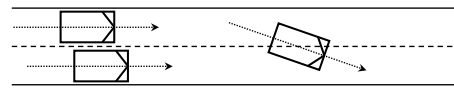


図-18 単純連続アプローチでの車線変更の模式図

線変更する車両が多ければ多いほど見かけ上の密度が大きくなり流率が低下することを意味している。 ϵ は全車両数、車線変更する車両数、一台の車両が車線変更に必要な時間（これは車両速度、車線幅、車線変更時の車両移動方向によって決まる）によって現象論的にモデル化されている²⁸⁾。

以上のように、本モデルは、KWモデルに特定の位置・時刻依存FDを導入して多車線交通流を表現しており、扱いやすいシンプルなモデルである。そのため、織り込み区間がボトルネックとして働く現象や、その緩和策（例： $\epsilon(t, x)$ を x 方向に均一にする）の検討に力を発揮するといえる。一方で、常に1-pipe流であるとの仮定は、車線毎の密度は同一であることを暗に要求しており、車線毎に交通状態が大きく違う状態（例：出口付近の渋滞、分流部での queue spillover）は扱えない。

6. KWモデルのネットワーク拡張

KWモデルをネットワークに拡張するために必要不可欠なノードモデルの役割は、ノードに接続するリンクの demand/supply に基づき、実際にノードを通過する交通量を決定することであり、この点では5.(2)で解説したIT principleと変わりはない。しかしながら、一般的な交差点では、実現しうる交通状態は組み合わせ的に増加するため（5.(1)では高々4つであった）、そこから物理的に意味のある解を絞り込むための条件を適切に設定する必要がある。本章では、最も単純な分合流モデルからより一般的なノードモデルへと解説を進めながら、それらの条件を順に述べていく。

なお、多くのモデルにおいて、ノードはpoint-likeに、すなわち、物理的な領域を有しない点として扱われており、本章で説明するモデルもこれに該当する。この場合、ノードを介して衝撃波が上流に伝播するのは、下流側リンクの容量が上流側リンクからの交通に対して不足しているためである（高速道路における合流や分流等）。一方で、現実には、ノード内での交錯により制約が発生する場合もある（都市部の平面交差、ラウンドアバウト等）。この影響を扱うモデルは、本章の最後で簡単に述べる。

²⁷⁾ 前節のような流体モデルでは、車両は無限大の加速度で車線変更できることになっており、車線変更時の後続交通への影響を過小評価していた。

²⁸⁾ Jin⁵⁶⁾は、この ϵ を行動論的に（i.e., ドライバの運転挙動特性により）定める手法を提案している。

(1) 分合流部におけるモデル

本節では、ネットワーク交通流の最も基本的な要素である分合流部を対象に、各ノード上で満たされるべき（エントロピー）条件と代表的なモデルを概説する。ここでは、単路のモデルに対して追加的に必要となるパラメータ（分流における分岐率および合流における優先率）を導入する。

a) 分流部におけるノードモデル

図-19に、分流部を持つネットワークを示す。このネットワークにおいて、ノード上流(下流)リンク*i* (*i* = 1, 2, 3)で実現する流出(流入)交通量を q_i , demand を D_i , supply を S_i とする。このとき、交通量 q_i が満たされるべき制約条件は次のようにまとめられる：

1. 車両台数の保存則： $q_1 = q_2 + q_3$

2. Demand/supply との整合条件 & 非負条件：

$$0 \leq q_1 \leq D_1, 0 \leq q_2 \leq S_2, 0 \leq q_3 \leq S_3.$$

3. 分岐率の条件 (FIFO 原則⁵⁷⁾ の成立)：

$$q_2 = f_{12}q_1, q_3 = f_{13}q_1, f_{12} + f_{13} = 1.$$

ここで、 f_{ij} は上流リンク *i* から下流リンク *j* への分岐率を表す (ここでは簡単のため $f_{ij} > 0$ とする)。

ここで導入された分岐率は、ネットワークにおける経路選択から決まってくるものであり、交通流モデルの中では基本的には外生的に与えられる¹⁰⁾。

この制約を満たす交通量は一般にいくつも考えられるが、その中でどのような解が交通流として自然であろうか。その答えの1つは、交通流の変分理論やCTMの解説で度々言及してきた「制約条件下での交通量の最大化」によって選ばれる解である²⁹⁾。ただし、ここでいう交通量とは、ノードを通過する(リンク)交通量の総和ではないことに注意が必要である。むしろ、ここでいう「交通量の最大化」の正確な意味は、各リンクの局所的な交通量の最大化、言い換えれば、3.のXモデルやTモデルの説明で述べたような「前方が空いている限り進む」(逆に言えば、理由もなく止まらない(“holding-free”))というものである。従って、以降ではこの条件を「holding-free 条件」呼ぶことにし、ノードを通過する交通量の総和を最大化する条件を述べる場合は「総交通量の最大化」という用語を用いる³⁰⁾。

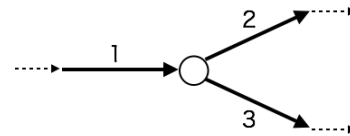


図-19 分流部を持つネットワーク

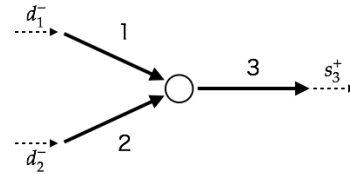


図-20 合流部を持つネットワーク

Holding-free 条件は、次のような相補性条件として記述することができる：

$$\begin{cases} q_1 = D_1 & \text{if } q_2 < S_2 \text{ and } q_3 < S_3 \\ q_1 \leq D_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (D_1 - q_1)(S_2/f_{12} - q_1)(S_3/f_{13} - q_1) = 0 \\ D_1 \geq q_1, S_2/f_{12} \geq q_1, S_3/f_{13} \geq q_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q_1 = \min\{D_1, S_2/f_{12}, S_3/f_{13}\} \quad (54)$$

2行目への変換では上記の制約条件3を、3行目への変換は相補性条件と minimum 演算の等価性を用いた。これにより q_1 が定めれば、 q_2, q_3 は分岐率により決まる。

b) 合流部におけるノードモデル

図-20に、合流部を持つネットワークを示す。分流部と同様に、このネットワークにおいて満たされるべき条件は次のようにまとめられる：

1. 車両台数の保存則： $q_1 + q_2 = q_3$

2. Demand/supply との整合条件 & 非負条件：

$$0 \leq q_1 \leq D_1, 0 \leq q_2 \leq D_2, 0 \leq q_3 \leq S_3.$$

次に、ここでも解を絞り込むために、holding-free 条件を考えてみよう。リンク1について、

$$\begin{cases} q_1 = D_1 & \text{if } q_1 + q_2 < S_3 \\ q_1 \leq D_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q_1 = \min\{D_1, S_3 - q_2\} \quad (55)$$

また、リンク2についても同様に、

$$q_2 = \min\{D_2, S_3 - q_1\} \quad (56)$$

が成立する。このとき、 $D_1 + D_2 \leq S_3$ であれば、 $q_1 = D_1, q_2 = D_2$ となる。しかしそれ以外では、これらの条件は互いに他方の交通量を含んでおり、その値を決定することができないケースが存在する。それは、 $q_1 = S_3 - q_2 < D_1$ または $q_2 = S_3 - q_1 < D_2$ が成立するとき、

²⁹⁾ 従来の文献で提案されたモデルには、この条件を満たさないものも存在する⁵⁸⁾。

³⁰⁾ 単路においては「holding-free 条件」と「総交通量の最大化」は等価である。

すなわち、下流の supply が上流からの総 demand に対して不足するケースである (i.e., $D_1 + D_2 > S_3$).

このケースでは、 $q_1 + q_2 = S_3$ であるので、残る作業は S_3 をどのような割合で上流リンクに割り当てるかである。この比率を定めるのが優先率である。いま、リンク i からリンク j への優先率を p_{ij} とすると ($\sum_j p_{ij} = 1$),

$$\begin{cases} q_1 = p_{13}S_3 (< D_1), q_2 = p_{23}S_3 (< D_2) \\ q_1 = D_1 (\leq p_{13}S_3), q_2 = S_3 - D_1 (< D_2) \\ q_1 = S_3 - D_2 (< D_1), q_2 = D_2 (\leq p_{23}S_3) \end{cases} \quad (57)$$

のいずれかが実現することになる。後の 2 ケースはそもそもリンクに割り当てられた supply よりも demand が小さい状況である。これらをひとまとめにすると、

$$q_1 = \min\{p_{13}S_3, D_1\}, q_2 = S_3 - q_1. \quad (58)$$

優先率については、様々な設定法が提案されている。Daganzo⁵⁹⁾ では、オン・ランプでの合流を想定し、上流リンクの車線比に応じて優先率を静的に与えている。同様の方法として、Ni and Leonard⁶⁰⁾ はリンクの容量に基づいて優先率を決定する方法を提案している³¹⁾ :

$$p_{13} = \frac{q_{\max,1}}{q_{\max,1} + q_{\max,2}}, p_{23} = \frac{q_{\max,2}}{q_{\max,1} + q_{\max,2}}. \quad (59)$$

一方、Jin and Zhang⁶¹⁾ では、上述の式 (57) の場合分けを減らすために、優先率を交通状況に応じて (demand 比率で) 設定することを提案している :

$$p_{13} = D_1 / (D_1 + D_2), p_{23} = D_2 / (D_1 + D_2) \quad (60)$$

これはある種の公平性を考慮したものであると言えよう。

(2) Invariance Principle

前節 (あるいは前章の IT principle の節) で示した条件は、ある瞬間においてリンク交通量を一意に定めるための静的な要件であり、時間軸については考えてこなかった。これは、ある交通状態がリンクを伝わる速度 (i.e., wave speeds) は有限であり、ノードはリンクの交通ダイナミクスとは独立に (瞬間瞬間で) 考えても問題がないとの考えに基づくものである⁵⁸⁾。

しかし、ある種のノードモデルは、リンク上での無意味な衝撃波の発生 (i.e., ノード上を通過する交通量が不自然に変化する) など、不自然な (リンク/ノード) ダイナミクスを招くことが、Lebacque and Koshyaran¹⁶⁾ により指摘されている。また同時に、この問題を回避するためにノードモデルが満たすべき条件 “invariance principle” を提示している。厳密に言えば、この問題および invariance principle は異なる時刻でのフローに関連するものであり、本稿で説明する “静的な” ノードモデルでは取り扱うことができない³²⁾。ただし、invariance

³¹⁾ Kuwahara and Akamatsu⁴⁶⁾ でも同様のモデルが想定されている。
³²⁾ ノードを通過する衝撃波の挙動を動的に解析するアプローチとしては、Jin⁶²⁾ などが挙げられる。

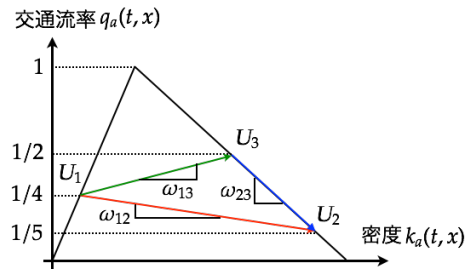


図-21 交通状態の FD 上での推移 (リンク 2)

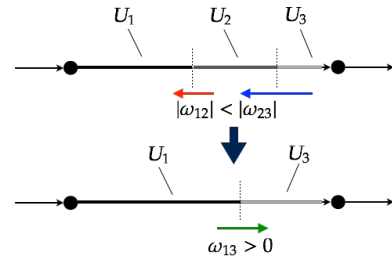


図-22 交通状態推移のイメージ図 (リンク 2)

principle を満たすための十分条件は示されており、現在の多くのモデルはこの十分条件を採用している。

以下では、具体例を通してこの問題を見ていく。図-20 において、リンク 1, 2 の上流端から一定の交通が流入する状況 (初期は空の状態) を考えよう。それらを、それぞれ、 $d_1 = 1, d_2 = 1/4$ とし、全てのリンク容量は 1 とする。また、ノードはモデル (60) に従うものとし、ある時刻に実現する状態を demand/supply の関数 $U : (D_1, D_2, S_3) \rightarrow (q_1, q_2)$ で表す。

以上の設定の下、ノードモデル (60) に demand/supply を逐次代入することでノードにおける状態の推移を見ていこう。まず、交通がノードにちょうど到達した初期状態 (状態 1) は、 $U_1 \equiv (q_1, q_2) = (1, 1/4)$ であり、両リンクとも自由流状態である。次に、このときの demand/supply を代入することで、 $U_2 = U(1, 1/4, 1)$ (状態 2) が微小時間後に実現する。具体的には、下流側の supply が不足している状況であるので、

$$q_1 = p_{13}S_3 = 4/5, q_2 = p_{23}S_3 = 1/5, \quad (61)$$

と計算される。そして、上流リンクはともに $q_a < D_a$ ($a = \{1, 2\}$) の渋滞流となり、demand は容量値 1 に修正される (式 (39) を参照)。さらに、この修正された demand/supply に基づき、再び新たな状態 $U_3 \equiv (1/2, 1/2) = U(1, 1, 1)$ (状態 3) が実現する。

この例は、単純な先詰まり現象であるにも関わらず、交通量が時々刻々不連続に変化することを示しており、このことだけでも直感的に不自然であることがわかる。しかし、このときのリンク上のダイナミクスを考えると、さらにその不自然さを理解することができる。

リンク 2 に着目して、以上の交通状態の推移を FD 上で示したものが図-21 であり、リンク上で 3 つの状態が空間的にどのように広がっているかのイメージを示したものが図-22 である。これらの図を見ると、リンク 2 上では、次のような現象が起きていることがわかる。まず、速度 ω_{12} の衝撃波が上流に伝播する。その直後に、速度 ω_{23} の衝撃波も上流に伝播するが、 $|\omega_{12}| < |\omega_{23}|$ であるため、微小時間経過後に状態 2 は消失することになる。その結果、図-22 の下図のように、リンク上には状態 1 と状態 3 のみが存在することになり、今度は衝撃波が下流に伝播し始める。そのため、さらに微小時間が経過したとき、状態 3 も消失してしまう。このように、1 つの衝撃波が上流に伝播するだけ（であるべき）単純な先詰まりにも関わらず、微小時間に（ほとんど無意味な）衝撃波が複数生じることになる。

これは「実現する交通状態 (i.e., 自由流, 渋滞流) に応じて修正される demand/supply がその交通状態と整合的でない」ことに起因して生じる問題である。従って、この問題を回避するための invariance principle は次のように与えられる：あるノードの上流リンク i , 下流リンク j の交通量 q_i, q_j は、次の demand/supply の変化によって変化することはない：

$$\begin{cases} D_i \rightarrow q_{\max,i} & \text{if } q_i < D_i, \\ S_j \rightarrow q_{\max,j} & \text{if } q_j < S_j. \end{cases} \quad (62)$$

つまり、上流リンクが渋滞流のとき、そのリンクの demand の増加によりリンク交通量は変化せず、また、下流リンクが自由流のとき、そのリンクの supply の増加によりリンク交通量は変化しない。これは結局、衝撃波が物理的に不自然な向きに向かわないための条件と言える。なお、この条件を満たすための必要十分条件は明らかではないが、優先率を demand と無関係に与えることが十分条件であることは知られている。

現在、前節の静的な条件に加え、動的な条件である invariance principle を“十分条件的に”満たすモデルを、“適切な”ノードモデルとする立場⁶³⁾が大勢である³³⁾。しかし、先の例で言えば、上流需要が渋滞時の優先率に影響を与えることは、現実には十分あり得るであろう。そのため、現象/行動論的に妥当な non-invariant モデル³⁴⁾を invariant 化する方法の研究も進められている⁶⁴⁾。

(3) 一般的なノード

これまでの議論をより一般的なノードに拡張する。ノードおよびそこに接続するリンクの一般的な構造を図-23 に示す。すなわち、ノードには $m+n$ 本のリンク

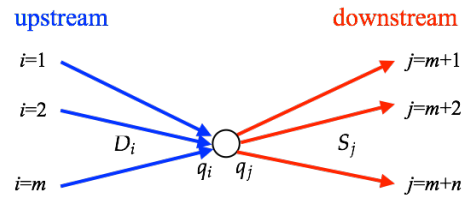


図-23 ノードの構造と変数

が接続している。 $i = \{1, 2, \dots, m\}$ の m 本のリンクからノードへ交通が流入する。また、ノードから $j = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$ の n 本のリンクへ交通が流出する。前出の単純な分流は $m=1, n=2$, 合流は $m=2, n=1$ であり、一般的な十字路は $m=4, n=4$ の場合である。

以下で、一般の m, n の場合にノードモデルが満たすべき条件を説明する。まず、前節までに見た分合流モデルの素直な拡張として考える。すなわち、

1. 車両台数の保存： $\sum_i q_i = \sum_j q_j$
2. Demand/supply との整合性 & 非負条件：
 $0 \leq q_i \leq D_i, \forall i, 0 \leq q_j \leq S_j, \forall j$
3. 分流部における分岐率条件： $q_j = \sum_i f_{ij} q_i, \forall j$
4. Holding-free 条件³⁵⁾：

$$(D_i - q_i) \prod_{j, f_{ij} > 0} (S_j - q_j) = 0 \quad \forall i \quad (63)$$

の下で得られる解のうち物理的に意味を有する、つまり

5. Invariant principle

を満たすものを見つければ良い^{58), 63)}。

しかし、(1) の合流モデルで見たように、条件 1-4 だけでは上流の demand に対して下流側の supply が不足する場合に実現する交通量を一意に決めることはできない。そのため、優先率の設定を含めた supply の上流リンクへの配分ルール (アルゴリズム) を特定化する必要がある。このルールは、Supply Constrained Interaction Rule (SCIR) と呼ばれ⁶³⁾、そのノードにおける幾何構造や車両挙動特性を表現することになる。

この SCIR の特定化にあたっては、主に 2 つの困難性がある。1 つ目は、このルール次第では、invariance principle (の十分条件) が満たされないことである。これは、前節で見た通りである。2 つ目は、一般的なノード場合、式 (57) では高々 3 つであった状態が膨大な数となることである。すなわち、すべての上下流リンクを結ぶ mn 通りの交通量の組み合わせが demand と supply のどちらに制約されているかを判断する必要があり、かつ、その際にすべてのリンクにおける分岐率と優先率が影響するという相互作用が存在する。そのため、単純な分合流と比較すると問題は桁違いに難しくなる。

³⁵⁾ 総交通量の最大化で代替することもあるが^{63), 65)}、意図している条件はすべて holding-free 条件である。

³³⁾ この十分条件を満たさないモデルは、“non-invariant”なモデルと呼ばれることもある。

³⁴⁾ 例えば、IT principle の結果として導かれた式 (50) は demand 比率に応じて優先率を決めており、non-invariant なモデルである。

現在のところ, invariance principle を満たす SCIR の一般形は見つかっていないが, (紙面の制約上その詳細は省略するが) 具体的な形式として5種類が示されている^{63),65),66),67)}. また, これらのルールの背後にある車両挙動を, 先に示した KW モデルと等価な T モデル (ミクロモデル) により調べ, 整理することが試みられている⁶⁶⁾. さらに, ノード自体の容量を制約 (internal supply constraint と呼ばれる) を組み込んだモデル化も進められている⁶⁸⁾.

7. おわりに

本稿では, 道路上の交通流ダイナミクスを記述する標準的な枠組みである Kinematic Wave (KW) 理論の近年の展開に関するレビューを行った. 具体的には, まず, KW 理論に関する従来の解析法を概説しその限界を述べた上で, 交通流の変分理論 (VT) を解説した. また, この理論の応用として, 様々な座標系 (Euler 座標系, Lagrange 座標系) が VT の枠組みにより統一的に記述されることをみた. 後半では, 上記の単一道路 (リンク) 上での理論をネットワーク拡張するための理論を解説した. ここでは, CTM の開発と同時に提示された Demand/Supply アプローチにより, 多車線道路や交差点など複数のリンクの境界面で物理的に意味のある交通流を決める手法および条件について整理を行った.

本稿では紙面の制約上触れることができなかった要素として, 有界加速度制約を導入した KW モデル^{69),70)}, 多クラスの KW モデル^{71),72),73)} や確率的な KW モデル^{74),75),76),77)} がある. 前者2つは, 加速度や交通流の異質性の導入により, capacity drop, 逆λ型のFD, ヒステリシス現象, 粗密波などの交通現象を表現しようとするものであり, 後者は不確実性を考慮した短期的な旅行時間予測や頑健な交通制御に繋がるものである.

なお, 本稿では基本的には理論のみを解説したが, その数値計算法や実データへの適用は極めて重要なテーマである. 特に後者については, 現在, 様々なデータが取得可能になっており, それらのデータによる理論の検証や交通状態推定手法⁷⁸⁾の開発が期待される. さらに, 動的なネットワーク問題や交通管理・制御問題のサブモデルとしても交通流理論は重要な役割を果たしており, その発展のインパクトは小さくないと考えられる. 実際, 和田ら^{79),80)}では, 交通流の変分理論により系統信号制御問題の新たな定式化に成功している. 従って, 以上のような, (本稿で解説した近年の) 理論の実証や応用に関しては改めて別の機会に報告したい.

謝辞: 本稿は下記の助成金を受けた成果の一部である: 第一著者, JSPS 科研費・若手 B (課題番号 16K18163),

鹿島学術振興財団 (2015 年度研究者交流援助); 第二著者, JSPS 科研費・若手 B (課題番号 16K18164). なお, 本稿の修正にあたっては, 匿名の査読者からのコメントを参考とした. ここに記し, 感謝の意を表します.

参考文献

- 1) Greenshields, B. D.: The photographic method of studying traffic behavior, *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the Highway Research Board*, pp. 382–399, 1934.
- 2) Greenshields, B. D.: A study of traffic capacity, *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the Highway Research Board*, pp. 448–477, 1935.
- 3) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol.229, No.1178, pp.281–316, 1955.
- 4) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol.229, No.1178, pp.317–345, 1955.
- 5) Richards, P. I.: Shock waves on the highway, *Operations Research*, Vol.4, No.1, pp.42–51, 1956.
- 6) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I: General theory, *Transportation Research Part B*, Vol.27, No.4, pp.281–287, 1993.
- 7) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part II: Queueing at freeway bottlenecks, *Transportation Research Part B*, Vol.27, No.4, pp.289–303, 1993.
- 8) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part III: Multi-destination flows, *Transportation Research Part B*, Vol.27, No.4, pp.305–313, 1993.
- 9) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B*, Vol.28, No.4, pp.269–287, 1994.
- 10) Daganzo, C. F.: The cell transmission model, part II: Network traffic, *Transportation Research Part B*, Vol.29, No.2, pp.79–93, 1995.
- 11) Daganzo, C. F.: A finite difference approximation of the kinematic wave model of traffic flow, *Transportation Research Part B*, Vol.29, No.4, pp.261–276, 1995.
- 12) Lebacque, J. P.: The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models, *Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by J. B. Lesort), pp. 647–677, Elsevier, 1996.
- 13) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research Part B*, Vol.39, No.2, pp.187–196, 2005.
- 14) Daganzo, C. F.: A variational formulation of kinematic waves: Solution methods, *Transportation Research Part B*, Vol.39, No.10, pp.934–950, 2005.
- 15) Kuwahara, M.: Theory, solution method and applications of kinematic wave, *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol.21, No.1, pp.63–75, 2015.
- 16) Lebacque, J.-P. and Khoshyaran, M. M.: First-order macroscopic traffic flow models: Intersection modeling, network modeling, *Proceedings of the 16th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by H. S. Mahmasani), pp. 365–386, Elsevier, Maryland, 2005.
- 17) Treiber, M. and Kesting, A.: *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

- 18) Ni, D.: *Traffic Flow Theory: Characteristics, Experimental Methods, and Numerical Techniques*, Butterworth-Heinemann, 2015.
- 19) Helbing, D.: Traffic and related self-driven many-particle systems, *Reviews of Modern Physics*, Vol.73, No.4, pp.1067–1141, 2001.
- 20) Hoogendoorn, S. P. and Bovy, P. H. L.: State-of-the-art of vehicular traffic flow modelling, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I*, Vol.215, No.4, pp.283–303, 2001.
- 21) Nagel, K., Wagner, P. and Woesler, R.: Still flowing: Approaches to traffic flow and traffic jam modeling, *Operations Research*, Vol.51, No.5, pp.681–710, 2003.
- 22) Bellomo, N. and Dogbe, C.: On the modeling of traffic and crowds: A survey of models, speculations, and perspectives, *SIAM Review*, Vol.53, No.3, pp.409–463, 2011.
- 23) Wilson, R. and Ward, J.: Car-following models: fifty years of linear stability analysis a mathematical perspective, *Transportation Planning and Technology*, Vol.34, No.1, pp.3–18, 2011.
- 24) Mohan, R. and Ramadurai, G.: State-of-the art of macroscopic traffic flow modelling, *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*, Vol.5, No.2-3, pp.158–176, 2013.
- 25) Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2002.
- 26) Moskowitz, K.: Discussion of ‘freeway level of service as influenced by volume and capacity characteristics’ by D. R. Drew and C. J. Keese, *Highway Research Record*, No.99, pp.43–44, 1965.
- 27) Makigami, Y., Newell, G. F. and Rothery, R.: Three-dimensional representation of traffic flow, *Transportation Science*, Vol.5, No.3, pp.302–313, 1971.
- 28) Luke, J. C.: Mathematical models for landform evolution, *Journal of Geophysical Research*, Vol.77, No.14, pp.2460–2464, 1972.
- 29) 赤松隆, 和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, 第26回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 31–46, 2014.
- 30) Mehran, B., Kuwahara, M. and Naznin, F.: Implementing kinematic wave theory to reconstruct vehicle trajectories from fixed and probe sensor data, *Transportation Research Part C*, Vol.20, No.1, pp.144–163, 2012.
- 31) Mazaré, P.-E., Dehwah, A. H., Claudel, C. G. and Bayen, A. M.: Analytical and grid-free solutions to the Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.10, pp.1727–1748, 2011.
- 32) Daganzo, C. F.: On the variational theory of traffic flow: well-posedness, duality and applications, *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.1, No.4, pp.601–619, 2006.
- 33) Laval, J. A. and Leclercq, L.: The Hamilton–Jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow, *Transportation Research Part B*, Vol.52, pp.17–30, 2013.
- 34) Leclercq, L., Laval, J. A. and Chevallier, E.: The Lagrangian coordinates and what it means for first order traffic flow models, *Transportation and Traffic Theory 2007* (Ed. by R. Allsop, M. Bell, and B. Heydecker), pp. 735–753, Elsevier, 2007.
- 35) Daganzo, C. F.: Singularities in kinematic wave theory: Solution properties, extended methods and duality revisited, *Transportation Research Part B*, Vol.69, pp.50–59, 2014.
- 36) Wagner, D. H.: Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions, *Journal of Differential Equations*, Vol.68, No.1, pp.118–136, 1987.
- 37) Aw, A., Klar, A., Rascle, M. and Materne, T.: Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follower-leader models, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.63, No.1, pp.259–278, 2002.
- 38) Jin, W.-L.: On the equivalence between continuum and car-following models of traffic flow, *Transportation Research Part B*, Vol.93, pp.543–559, 2016.
- 39) Newell, G. F.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.
- 40) van Wageningen-Kessels, F., van Lint, H., Hoogendoorn, S. P. and Vuik, K.: Lagrangian formulation of multiclass kinematic wave model, *Transportation Research Record*, Vol.2188, pp.29–36, 2010.
- 41) 福田大輔: データ同化アプローチによる交通状態の推定に関する研究動向, *交通工学*, Vol.47, No.2, pp.33–38, 2012.
- 42) Yuan, Y., van Lint, J. W. C., Wilson, R. E., van Wageningen-Kessels, F. and Hoogendoorn, S. P.: Real-time Lagrangian traffic state estimator for freeways, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol.13, No.1, pp.59–70, 2012.
- 43) Blandin, S., Couque, A., Bayen, A. M. and Work, D. B.: On sequential data assimilation for scalar macroscopic traffic flow models, *Physica D*, Vol.241, No.17, pp.1421–1440, 2012.
- 44) Nagel, K. and Schreckenberg, M.: A cellular automaton model for freeway traffic, *Journal de Physique I*, Vol.2, No.12, pp.2221–2229, 1992.
- 45) 桑原雅夫, 吉井稔雄, 堀口良太: ブロック密度法を用いた交通流の表現方法について, *交通工学*, Vol.32, No.4, pp.39–44, 1997.
- 46) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many OD pattern, *Transportation Research Part B*, Vol.35, No.5, pp.461–479, 2001.
- 47) Yperman, I., Logghe, S. and Immers, B.: The link transmission model: An efficient implementation of the kinematic wave theory in traffic networks, *Proceedings of the 16th Mini - EURO Conference and 10th Meeting of EWGT*, 2005.
- 48) Jin, W.-L.: Continuous formulations and analytical properties of the link transmission model, *Transportation Research Part B*, Vol.74, pp.88–103, 2015.
- 49) Zheng, Z.: Recent developments and research needs in modeling lane changing, *Transportation Research Part B*, Vol.60, pp.16–32, 2014.
- 50) Daganzo, C. F.: A continuum theory of traffic dynamics for freeways with special lanes, *Transportation Research Part B*, Vol.31, No.2, pp.83–102, 1997.
- 51) Daganzo, C. F., Lin, W.-H. and Del Castillo, J. M.: A simple physical principle for the simulation of freeways with special lanes and priority vehicles, *Transportation Research Part B*, Vol.31, No.2, pp.103–125, 1997.
- 52) Laval, J. A. and Daganzo, C. F.: Lane-changing in traffic streams, *Transportation Research Part B*, Vol.40, No.3, pp.251–264, 2006.
- 53) Shiomi, Y., Taniguchi, T., Uno, N., Shimamoto, H. and Nakamura, T.: Multilane first-order traffic flow model with endogenous representation of lane-flow equilibrium, *Transportation Research Part C*, Vol.59, pp.198–215, 2015.
- 54) Jin, W.-L.: A kinematic wave theory of lane-changing traffic flow, *Transportation Research Part B*, Vol.44, No.8, pp.1001–1021, 2010.
- 55) Munjal, P. and Pipes, L.: Propagation of on-ramp density perturbations on unidirectional two- and three-lane freeways, *Transportation Research*, No.4, pp.241–255.
- 56) Jin, W.-L.: A multi-commodity Lighthill-Whitham-Richards model of lane-changing traffic flow, *Transportation Re-*

- search Part B, Vol.57, pp.361–377, 2013.
- 57) Papageorgiou, M.: Dynamic modeling, assignment, and route guidance in traffic networks, *Transportation Research Part B*, Vol.24, No.6, pp.471–495, 1990.
 - 58) Jabari, S. E.: Node modeling for congested urban road networks, *Transportation Research Part B*, Vol.91, pp.229–249, 2016.
 - 59) Daganzo, C. F.: The nature of freeway gridlock and how to prevent it, *Proceedings of 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by J. B. Lesort), pp. 629–646, Pergamon-Elsevier, 1996.
 - 60) Ni, D. and Leonard, J. D.: A simplified kinematic wave model at a merge bottleneck, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.29, pp.1054–1072, 2005.
 - 61) Jin, W. L. and Zhang, H. M.: On the distribution schemes for determining flows through a merge, *Transportation Research Part B*, Vol.37, No.6, pp.521–540, 2003.
 - 62) Jin, W. L.: A kinematic wave theory of multi-commodity network traffic flow, *Transportation Research Part B*, Vol.46, No.8, pp.1000–1022, 2012.
 - 63) Tampère, C. M., Corthout, R., Cattrysse, D. and Immers, L. H.: A generic class of first order node models for dynamic macroscopic simulation of traffic flows, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.1, pp.289–309, 2011.
 - 64) Jin, W.-L.: A Riemann solver for a system of hyperbolic conservation laws at a general road junction, *Transportation Research Part B*, Vol.98, pp.21–41, 2017.
 - 65) Flötteröd, G. and Rohde, J.: Operational macroscopic modeling of complex urban road intersections, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.6, pp.903–922, 2011.
 - 66) Smits, E.-S., Bliemer, M. C., Pel, A. J. and van Arem, B.: A family of macroscopic node models, *Transportation Research Part B*, Vol.74, pp.20–39, 2015.
 - 67) Gibb, J.: Model of traffic flow capacity constraint through nodes for dynamic network loading with queue spillback, *Transportation Research Record*, Vol.2263, No.1, pp.113–122, 2011.
 - 68) Corthout, R., Flötteröd, G., Viti, F. and Tampère, C. M.: Non-unique flows in macroscopic first-order intersection models, *Transportation Research Part B*, Vol.46, No.3, pp.343–359, 2012.
 - 69) Lebacque, J.: Two-phase bounded-acceleration traffic flow model: Analytical solutions and applications, *Transportation Research Record*, Vol.1852, No.03, pp.220–230, 2003.
 - 70) Laval, J. A. and Leclercq, L.: A mechanism to describe the formation and propagation of stop-and-go waves in congested freeway traffic, *Philosophical Transactions. Series A*, Vol.368, No.1928, pp.4519–41, 2010.
 - 71) Daganzo, C. F.: A behavioral theory of multi-lane traffic flow. Part I: Long homogeneous freeway sections, *Transportation Research Part B*, Vol.36, No.2, pp.131–158, 2002.
 - 72) Wong, G. C. K. and Wong, S. C.: A multi-class traffic flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers, *Transportation Research Part A*, Vol.36, No.9, pp.827–841, 2002.
 - 73) Costeseque, G. and Duret, A.: Mesoscopic multiclass traffic flow modeling on multi-lane sections, *Transportation Research Board 95th Annual Meeting*, 2016.
 - 74) Sumalee, A., Zhong, R., Pan, T. and Szeto, W.: Stochastic cell transmission model (SCTM): A stochastic dynamic traffic model for traffic state surveillance and assignment, *Transportation Research Part B*, Vol.45, No.3, pp.507–533, 2011.
 - 75) Jabari, S. E. and Liu, H. X.: A stochastic model of traffic flow: Theoretical foundations, *Transportation Research Part B*, Vol.46, No.1, pp.156–174, 2012.
 - 76) Laval, J. A. and Chilukuri, B. R.: The distribution of congestion on a class of stochastic kinematic wave models, *Transportation Science*, Vol.48, No.2, pp.217–224, 2014.
 - 77) 和田健太郎, 白井健人, 大口敬, 井料 (浅野) 美帆: 交通流の変分原理に基づく信号路線の期待遅れ時間の評価法, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.1, pp.85–96, 2017.
 - 78) Seo, T., Bayen, A. M., Kusakabe, T. and Asakura, Y.: Traffic state estimation on highway: A comprehensive survey, *Annual Reviews in Control*, Vol.43, pp.128–151, 2017.
 - 79) 和田健太郎, 瀧川翼, 桑原雅夫: ネットワーク・モデリングによる系統交通信号の最適化, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.71, No.4, pp.168–180, 2015.
 - 80) Wada, K., Usui, K., Takigawa, T. and Kuwahara, M.: An optimization modeling of coordinated traffic signal control based on the variational theory and its stochastic extension, *Transportation Research Procedia*, Vol.23, pp.624–644, 2017.

(2017. 2. 24 受付)

RECENT ADVANCES IN KINEMATIC WAVE THEORY OF TRAFFIC FLOWS: VARIATIONAL FORMULATION AND NETWORK EXTENSION

Kentaro WADA, Toru SEO, Wataru NAKANISHI, Koki SATSUKAWA
and Masami YANAGIHARA

This paper summarizes recent advances in the kinematic wave (KW) theory of traffic flows. First, we review the variational formulation of kinematic waves and its application together with pointing out the limitations of its conventional analysis methods. Second, the KW theories for the network traffic are introduced. Specifically, we review and summarize the methods/conditions to determine boundary flows of links at multi-lane roads and intersections.