

動的交通均衡配分理論の近年の進展

和田 健太郎¹

¹正会員 筑波大学准教授 システム情報系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)
E-mail: wadaken@sk.tsukuba.ac.jp

本稿では、動的交通均衡配分モデルの解析理論の近年の進展について解説する。渋滞の時空間進展と利用者行動の相互作用から生じる、複雑な交通ネットワーク流の見通しのよい解析を可能とする移動座標系アプローチを対象を限定し、車両を流体近似する伝統的なモデルと最近進展している粒子型のモデルを対比的に紹介する。その中で得られる、それぞれのモデルの特徴や関係、均衡解の数理解特性に関する成果を踏まえ、双方の優位性を活かした今後の発展の方向性について述べる。

Key Words: dynamic user equilibrium, Lagrange coordinate system, fluid model, atomic model, Nash equilibrium

1. はじめに

(1) 交通流モデルの二つの実装法

唐突ではあるが、途中出入りのない単一道路（単一車線）区間の交通シミュレーション、ここでは追従モデルを実装することを考えてみよう。どのような実装法が思い浮かぶであろうか？ 細部の違いはあるにしても、その実装法は大きく二つに別れるであろう。

一つは、単位時間 Δt 毎に、道路上に存在する全車両の位置をモデルから計算される速度・加速度に基づき更新していく方法である。交通シミュレーションのデモなどで車両が時々刻々動いていく様子をイメージすれば分かりやすい。もう一つは、 n 台目の車両の位置を対象区間全体に渡って計算した後に、その次に流入する車両 $n+1$ 台目の計算を行う、というものである。ここでは、前者を時間ベースの実装法、後者を車両ベースの実装法と呼ぶことにしよう。また、二つの方法のイメージを時空間図で表したものが、**図-1**である。

現在考えている状況では、これらの二つの実装法は（同じ結果をもたらすという意味で）等価である。その理由は第一に、標準的な交通流モデルでは、因果律、あるいは、（運転挙動の）異方性（anisotropic property）が満たされるためである。因果律とは、現在の交通状態は過去の状態のみ依存する（逆に言えば、将来の交通の影響を受けない）こと¹⁾、運転挙動の異方性は、車両が前方の車両のみから影響を受ける（逆に言えば、後方の車両から影響を受けない）こと²⁾、を意味する。因果律と追従挙動の異方性は、同様の交通流特性を異なる視点（前者はある地点の視点、後者は車両の視点）から述べたものと言える（以下では、「因果律」の用語を用いる）。第二の理由は、追い越しがなく **First-In-First-Out**

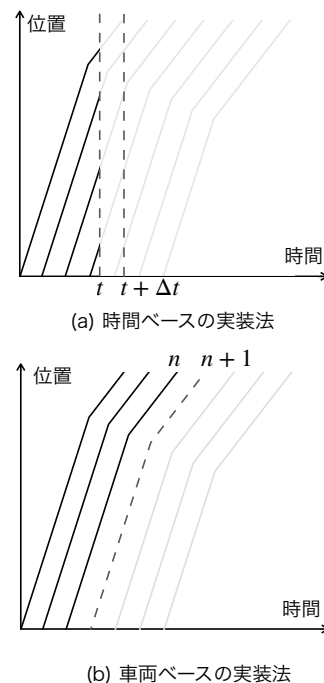


図-1 交通流モデルの二つの実装法

(FIFO) 原則が成り立つためである。

上述の二種類の交通特性と二つの実装法の関係は以下のようにまとめられる。時間ベースの実装法は、時間という大域的な参照点¹⁾に従って計算を進める因果律（のみ）に基礎をおく方法である。一方、車両ベースの実装法は、因果律に加え FIFO が成立する場合に存在する、車両の“適切な”配分順序（ここでは、車両の流入順序）を大域的な参照点として計算を進める方法である。つまり、汎用性という観点からは必要となる条件の少ない時間ベースの実装法に優位性がある。

¹ “グローバル変数”と呼ぶこともできよう。

(2) 動的交通均衡配分の二つの解析アプローチ

本題であるネットワーク交通流モデル, 具体的には, 動的利用者均衡 (DUE: Dynamic User Equilibrium) 配分モデルに話を移そう。DUE 配分モデルは, 静的な Wardrop 均衡配分モデル^{3),4)} の自然な拡張であり, 全ての利用者が事後的な最短経路を選択することを仮定する。このモデルを含む動的なネットワーク交通流モデルは, 従来の“時間軸”を完全に捨象した静的なモデルの抱える本質的課題—渋滞現象を表現できない—の解決を目的としている⁵⁾。そして, きめ細かな需要管理施策や ITS (Intelligent Transportation Systems) の評価といった現代的な交通計画あるいは交通運用上の課題に対応する理論的基盤として研究が進められている。

DUE 配分モデルやその解析のアプローチの分類は様々考えられるが, ここでは, 前節の二つの実装法の考え方に対応する解析アプローチの分類を考える。第一のアプローチは, 時間の関数として変数を定義しモデルを記述するものであり, 時々刻々のネットワーク交通流を記述する上で極めて自然なアプローチであると言える。第二のアプローチは, 車両の“適切な”配分順序の関数として変数を定義しモデルを記述するものである。上述のように, 車両の適切な配分順序が存在するためには FIFO が成立している必要があるが, DUE 配分モデルでは少なくとも起終点 (OD: Origin-Destination) ペア毎には FIFO の成立が保証できる。つまり, ある時刻に起点を出発する車両が, より早い時刻に同一起点を出発する車両より早く同じ終点に到着できる (i.e., 追い越しが発生する) とすると, DUE 配分の想定する経路選択原理に明らかに矛盾する。

以上の分類における, 時間, 車両配分順序という大域的参照点の違いは, モデルを記述する (変数を定義する) “座標系”の違いと言うこともできる。ネットワークモデルでは, ネットワーク上の“位置”を表すノード/リンクが共通するもう一つの大域的な参照点となるので, 第一のアプローチは (時間, 位置) 座標系, 第二のアプローチは (車両順序, 位置) 座標系を採用していることを意味する。交通流理論⁶⁾ に倣って, 前者のような時間と位置に固定された座標系をオイラー座標系 (Euler coordinate system), 後者のように車両を追跡するかたちで定義される移動座標系をラグランジュ座標系 (Lagrange coordinate system) と呼ぶ。

OD 毎の FIFO の成立は, 複数 OD の車両の適切な配分順序の存在を保証するものではないため, ラグランジュ座標系に基づくアプローチはネットワークや OD の設定にいくらかの制約をもうける必要がある (その制約については本稿の以降の章で詳述する)。つまり, 汎用性という観点からはやはり, オイラー座標系に基づくアプローチに優位性がある。しかしながら, ネットワークレベルで FIFO が成立するという DUE 配分モデルの本質的な特性を活かしたラグランジュ座標系アプローチは, オイラー座標系アプローチでは見えてこないモデルの持つ数理構造をあぶりだし, 見通しのよい解析を可能にする, という大きなメリットがある。

このことを簡単に見るために, (DUE 配分モデルにおける) 利用者が実際に経験する経路旅行時間を具体的に表現してみよう。いま, ある起点を時刻 t に出発する利用者の最短経路 r の旅行時間を $C_r(t)$ とすると, オイラー座標系では, 経路に含まれるリンク $l = 1, 2, 3, \dots$ の流入時刻 t 毎に定義される旅行時間 $c_l(t)$ を用いて,

$$C_r(t) = c_1(t) + c_2(t + c_1(t)) \\ + c_3(t + c_1(t) + c_2(t + c_1(t))) + \dots$$

と表される。この式から分かるように, 各リンクへの到着 (流入) 時刻にそのリンクに到着するまでの全てのリンクの旅行時間が含まれる, という複雑なネスト構造が経路旅行時間評価に含まれる。しかも, 一般的なネットワークでは, このような複雑な旅行時間構造を持つ経路が多数存在し, それらが各リンク (正確には, ボトルネック) 上で相互干渉している。このような複雑な経路旅行時間関数の数学的特性を把握することは極めて難しい。実際, オイラー座標系に基づく従来研究では, この壁に阻まれ, モデル特性を数理的に明確に把握するに至っていない。

一方, ラグランジュ座標系では, (例えば, 単一 OD ネットワークを考えれば) ある起点を n 番目に出発する利用者の最短経路 r の旅行時間 $C_r(n)$ は, 各リンクの車両配分順序毎に定義される旅行時間 $c_l(n)$ を用いて,

$$C_r(n) = c_1(n) + c_2(n) + c_3(n) + \dots$$

のように書くことができる²⁾。先とは異なり, (あたかも標準的な静的な利用者均衡配分モデルのように) リンク旅行時間の線形和として経路旅行時間が記述される。こうした違いが生じる大きな理由は, 利用者がトリップ中に実際に経験する旅行時間を評価するためには, 利用者の“時空間”経路を追跡する必要があるためである。オイラー座標系では, 空間を表すリンクの順番に加え, 各リンクへの到着時刻を (絶対) 時刻を用いて車両を追跡しているために評価が複雑化していた。一方, ラグランジュ座標系では, そもそもリンク旅行時間が利用者の時空間移動に沿って定義されるため, 極めて単純な記述が可能となる。

もう一つのラグランジュ座標系のメリットは, 図-1(b) のイメージのように, DUE 配分モデルを車両順序の軸に沿って分解することができるという点である。すなわち, ある車両 (あるいは OD フロー) のネットワー

²⁾ この記述は必ずしも正確なものではないが, 現時点ではこの式のように理解して問題はない (正確な記述は後述する)。

クへの配分は、その車両よりも前の順序の車両にのみ影響を受け、後ろの順序の車両の影響を受けることはない。そのため、車両順序に関して“前向き”に逐次解析/計算してゆくことが可能である。

なお、DUE 配分以外の配分原則を仮定する、動的利用者最適 (DUO: Dynamic User Optimal) 配分モデルや動的システム最適 (DSO: Dynamic System Optimal) 配分モデルは、ネットワークレベルの FIFO は成立しないので、オイラー座標系で解析するのが自然である⁴⁾。

(3) 研究小史と本稿の概要

DUE 配分モデルをラグランジュ座標系で解析するアプローチは、Kuwahara and Akamatsu^{7),8)}により提案され、主に我が国で研究が進んできている。その初期の成果 (1990~2000 年代前半) は、赤松^{9),4)}、桑原^{10),11)}、桑原・赤松¹²⁾にまとめられている。具体的には、ラグランジュ座標系³⁾に基づく DUE 配分モデルの定式化や解析解の分析とその交通制御問題への応用^{13),14),15),16)}、効率的な解法アルゴリズムの開発¹⁷⁾、出発時刻・経路同時選択モデルへの拡張¹⁸⁾、などの成果が得られている。

上記に続く 2000 年代後半から現在に至る一連の研究の流れの中で、とりわけ新しいのが、井料^{19),20)}によって導入された、粒子型の DUE 配分モデルである。これは車両を流体/連続体近似する従来のモデルとは異なり⁴⁾、車両を粒子として扱い、DUE 配分を (純粋戦略) Nash 均衡としてモデル化するものである。これまでのところ、均衡解の導出を保証するアルゴリズムの開発^{23),24),25)}や均衡解の安定性に関する結果²⁶⁾など、従来の流体モデルでは得られていない結果を得ることに成功している。一方、流体モデルについても、解の一意性に関する結果²⁷⁾や出発時刻・経路同時選択モデルの解法構築²⁸⁾、ネットワークレベルの交通状態/性能を巨視的に捉える指標“Macroscopic Fundamental Diagram (MFD)²⁹⁾”を DUE 配分モデルから理論的に理解/説明しようという試み^{30),31)}がなされている。

以上、ラグランジュ座標系アプローチの近年の進展は、流体モデルと粒子モデルの双方の強みを活かしたものであると見ることができ、現在でも両モデルの関係性が完全にわかっているわけではないが、その関係性が明らかになってくれば、相互に知見を補いながらさらなる理論の発展を期待することができる。本稿の目的は、これらのモデルを対応づけながら紹介することである。

なお、DUE 配分モデルの研究の大半はオイラー座標

系に基づくものであり、近年も多くの研究がなされている。特に理論的な側面に焦点を当てたものとして、比較的新しい理論である微分変分不等式³²⁾を DUE 配分モデルの数学的基礎として採用しようとする研究がある^{33),34)}。解の存在に関しては弾性需要型の出発時刻・経路選択同時均衡問題といふかなり一般的な場合での成果が得られている³⁵⁾が、その他は不動点アルゴリズムに基づくヒューリスティックス解法を示すに留まっており、より深い均衡解の特性解析⁵⁾ (i.e., 一意性, 安定性, 保障つきの解法構築) に有効か否かは現時点で未知数である。その他としては、利用者選択行動の一般化³⁷⁾や交通流ダイナミクスの精緻化³⁴⁾など、より現実的な“モデル開発”を志向するものが多い³⁸⁾。しかし、こうした拡張モデルは複雑性が増すため、均衡解の持つ数値特性や一般性のある知見を得ることはさらに難しくなっているのが現状である。

また、本稿では紙面の都合上割愛するが、Vickrey³⁹⁾や Hendrickson and Kocur⁴⁰⁾を嚆矢とする DUE 配分モデルのもう一つの主要な流れである、出発時刻選択均衡問題においてもラグランジュ座標系アプローチの近年の進展がある。Kuwahara⁴¹⁾のタンデム・ボトルネックの解析、井料ら^{42),43)}の出発時刻選択均衡問題の線形計画問題としての定式化に始まるこの流れでは、複数ボトルネック問題への拡張^{44),45)}や均衡フローパターンの規則性解析⁴⁶⁾などの理論的な成果が得られている。

本稿の構成では以下の通りである。まず、2. では、最も単純な単一起点ネットワークを対象に、DUE 配分の粒子モデルと流体モデルを示す。ここでは、なぜ粒子モデルでは均衡解の導出を保証するアルゴリズムを構築できるのか? (逆に、流体モデルではなぜそれが難しいのか?), について論ずる。続く 3. では、単一終点ネットワークを対象に、唯一の起点を持つ場合には起こりえない課題について考える。両モデルにおいて生じる課題は異なるものの、その原因となるのは、道路上流への車両の到着 (需要) パターンの情報が、渋滞を通過する、すなわち、整流化されることによって失われる (i.e., 道路下流における車両流出パターンから上流での到着パターンを復元できない)、という渋滞ネットワーク特有の性質である。4. では、現在明らかになっている、ラグランジュ座標系による解析が可能な最も広いクラスのネットワーク“単一方向ネットワーク” (unidirectional networks) における DUE 配分モデルの数値特性—解の一意性と安定性—の成果についてその証明の背景にある発想を概観する。5. では本稿の内容のまとめとそれらを踏まえた今後の展望について簡潔に述べる。

³⁾ 当時は「ラグランジュ座標系」という呼び名は使われていない。

⁴⁾ 「オイラー座標系 = 流体/連続体モデル」, 「ラグランジュ座標系 = 粒子/追従モデル」という対応で語られることも多いが、近年の交通流理論^{21),22)}によれば、座標系と車両の表現粒度 (離散化の程度) は独立に考えることができる。

⁵⁾ この観点でのレビューとしては、Iryo³⁶⁾を参照。

2. 単一起点ネットワーク問題

本稿で取り扱うネットワークは、ノードと有向リンクから構成される。ノードの集合を \mathcal{N} 、有向リンクの集合を \mathcal{L} とし、それぞれの集合の要素を $i \in \mathcal{N}$ 、 $(i, j) \in \mathcal{L}$ と表す。起点の集合を \mathcal{N}_o 、終点の集合を \mathcal{N}_d とし、起終点 (o, d) 間の acyclic な経路の集合を $\mathcal{R}(o, d)$ と表す。また、経路 r に含まれるノードの集合を $\mathcal{N}(r)$ と書く。

(1) 粒子モデル

a) DUE ゲームの定式化

本節では、DUE 配分を戦略形ゲーム (“DUE ゲーム”) の Nash 均衡として定式化する^{24),25),26)}。DUE ゲームは、プレイヤー (車両)、プレイヤーの戦略 (経路) 集合、戦略の不効用 (旅行時間) から構成される。

粒子として扱われる車両の集合を \mathcal{P} とする。車両 $p \in \mathcal{P}$ の OD ペア (o_p, d_p) と出発時刻 s_p は外生的に与えられるものとし、 $o_p = o_q$ ならば、 $s_p \neq s_q$ とする (i.e., 同一の起点を持つ車両は異なる出発時刻を持つ)。

車両 p は自身の OD を結ぶ任意の acyclic な経路 r_p を選ぶことができる。その集合を $\mathcal{R}_p (= \mathcal{R}(o_p, d_p))$ と表す。この集合には車両がいかなる経路も選択していない、あるいは、まだネットワークに配分されていない状態を示す選択枝 ϕ も含まれる。この選択枝 ϕ を選択している車両を未配分車両と呼び、後述する解法アルゴリズムにおいて用いる。全車両の経路選択プロファイルは $\mathbf{r} \equiv \{r_1, \dots, r_p, \dots, r_{|\mathcal{P}|}\} \in \mathcal{R}$ と表す。ここで、 $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_{|\mathcal{P}|}$ である。また、車両 p を除いた経路選択プロファイルを $\mathbf{r}_{-p} \equiv \{r_1, \dots, r_{p-1}, r_{p+1}, \dots, r_{|\mathcal{P}|}\}$ と表し、ある車両の経路を明示的に指す際には経路選択プロファイル \mathbf{r} を (r_p, \mathbf{r}_{-p}) と表現する。

本稿では、車両の不効用は旅行時間に一致すると仮定する。起点の出発時刻は与件であるので、車両の終点到着時刻を不効用と同一視することができる。いま車両 p が経路 r_p を選択し、また他の車両の経路選択は \mathbf{r}_{-p} であるとき、車両 p の終点到着時刻を $g_p(r_p, \mathbf{r}_{-p})$ と書く。経路選択プロファイル \mathbf{r} が与えられた下で、各車両の旅行時間は交通流モデル (i.e., network loading model) により計算される。各リンクと各ノードの交通流モデルとしては、因果律と FIFO を満たす任意のモデルが採用可能である。なお、 $g_p(\phi, \mathbf{r}_{-p}) = \infty$ とする。

以上の設定の下、DUE、あるいは、Nash 均衡は、全ての車両が旅行時間を最小とするような経路を選択している状態として定義される。より正確には、経路選択プロファイル \mathbf{r}^* が Nash 均衡であるとは、全ての車両の戦略 r_p^* が他の車両のプロファイル \mathbf{r}_{-p}^* に対する最適応答 (best response) となることである、i.e.,

$$g_p(r_p^*, \mathbf{r}_{-p}^*) \leq g_p(r_p, \mathbf{r}_{-p}^*) \quad \forall r_p \in \mathcal{R}_p, \forall p \in \mathcal{P}. \quad (1)$$

さらに、この不等号が狭義に成立するとき、 \mathbf{r}^* は狭義 Nash 均衡 (strict Nash equilibrium) であると言う。

b) DUE ゲームの解法 | 順序配分アルゴリズム

前節で定義した DUE ゲームの解法として、井料²⁴⁾ は順序配分アルゴリズムを提案している。このアルゴリズムは、未配分状態の車両を適切な順序で一台一台ネットワークに配分していくことで DUE ゲームの Nash 均衡を求めるものである。以下では、適切な順序を定めるための概念である最早未配分車両を定義し、アルゴリズムのロジックを概説する。

定義 1 (最早ノード到着時刻). 他の車両の経路選択プロファイル \mathbf{r}_{-p} を考える。いま、車両 p の少なくとも一つの経路に含まれるノードの集合を $\mathcal{N}_p = \{i \mid i \in \mathcal{N}(r), r \in \mathcal{R}_p\}$ と書くとき、 \mathbf{r}_{-p} の下での車両 p のノード i への最早到着時刻 $\tau_i(o_p, s_p; \mathbf{r}_{-p})$ は、以下のように定義される。

$$\tau_i(o_p, s_p; \mathbf{r}_{-p}) = \min_{r \in \{r' \mid r' \in \mathcal{R}_p, i \in \mathcal{N}(r')\}} \tilde{\tau}_i(o_p, s_p, r; \mathbf{r}_{-p}), \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{\tau}_i(o_p, s_p, r; \mathbf{r}_{-p})$ は、 \mathbf{r}_{-p} の下で車両 p が経路 r を使ってノード i に到着する時刻である。

定義 2 (最短経路). 他の車両の経路選択プロファイル \mathbf{r}_{-p} を考える。このとき、車両 p の最短経路 r_p^* は以下のように定義される。

$$r_p^* \in \arg \min_{r \in \mathcal{R}_p} g_p(r; \mathbf{r}_{-p}), \quad (3a)$$

$$\text{s.t. } \tilde{\tau}(o_p, s_p, r_p^*; \mathbf{r}_{-p}) = \tau_i(o_p, s_p; \mathbf{r}_{-p}), \quad \forall i \in \mathcal{N}(r_p^*) \quad (3b)$$

最短経路の定義の一つ目の式 (3a) は最短経路が他の車両の経路選択プロファイルに対する最適応答になっていることを表しており、二つ目の式 (3b) は最短経路に含まれるどのノードに対しても他の経路を使った場合より遅くなく到着することを保証するためのものである (i.e., DP: Dynamic Programming 原理)。DP 原理は通常の最短経路問題では必ず満たされるが、本節で考えているような待ち行列の存在する時間依存最短経路問題⁶ (time-dependent shortest path problem) ではその限りではない。つまり、旅行時間を最小にする DP 原理を満たさない最適応答経路 (本稿の定義では最短経路ではない) が存在するため、明示的な言及が必要である。

いよいよ最早未配分車両の定義に移ろう。いま、経路選択プロファイル \mathbf{r} における未配分車両の集合を $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ とするとき、最早未配分車両は以下のように定義される。

定義 3 (最早未配分車両). $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる経路選択プロファイル \mathbf{r} を考える。このとき、未配分車両 $p \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ が最早未配分車両であるとは、この車両が以下の条件

⁶ リンクに流入する時刻によりその旅行時間が変化するネットワークにおける最短経路問題である。

を満たす最短経路 \bar{r}_p^* を持つことである。

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i(o_p, s_p, \bar{r}_p^*; \mathbf{r}_{-p}) &\leq \tau_i(o_q, s_q; \mathbf{r}_{-q}), \\ \forall i \in \mathcal{N}(\bar{r}_p^*) \cap \mathcal{N}_q, \forall q \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \setminus \{p\} \end{aligned} \quad (4)$$

最早未配分車両とは、他の未配分車両のいかなる経路によっても追い越されない経路を持つ車両である (式 (4) は追い越されない条件を表す)。この性質と交通流モデルの因果律と FIFO を組み合わせると、最早未配分車両の経路 \bar{r}_p^* の旅行時間は他の未配分車両の経路選択とは無関係である (i.e., 影響を受けない) ことがわかる。従って、最早未配分車両をその最短経路に一台ずつ配分することで、全ての車両が事後的な最短経路をとる状態 (i.e., Nash 均衡状態) が実現するのである。

順序配分アルゴリズム

0. 初期設定：繰り返し回数 $n = 1$ とし、全ての車両を未配分車両とする $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^m) = \mathcal{P}$, i.e., $r_p^m = \phi$, $\forall p \in \mathcal{P}$. ここで、 r_p^m は車両 p の m 回目の経路である。
1. 配分車両の決定：経路選択プロファイル \mathbf{r}^m の下、未配分車両 $p \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^m)$ から式 (4) に従って最早未配分車両を見つける。もし複数の最早未配分車両があった場合には任意の一台を選ぶ。
2. 車両の配分：車両 p を適切な交通流モデルに従って最短経路 \bar{r}_p^* に配分し、経路選択プロファイルおよび未配分車両の集合を更新する： $\mathbf{r}^m := (\bar{r}_p^*, \mathbf{r}_{-p}^m)$, $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^m) := \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^m) \setminus \{p\}$.
3. 終了判定： $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^m) = \emptyset$ ならば、 \mathbf{r}^m を Nash 均衡解としてアルゴリズムを終了。そうでなければ、 $n := n + 1$ としてステップ 1 に戻る。

このアルゴリズムはステップ 1 において最早未配分車両が存在すれば、ヒューリスティックな計算なしに車両数回分の繰り返し (i.e., $n = |\mathcal{P}|$) で Nash 均衡解を導く。アルゴリズムのロジックからもわかる通り、最早未配分車両の存在は、1. で述べた車両の適切な配分順序の存在に対応している (i.e., ラグランジュ座標系を用いたアルゴリズムである)。ここでは、まず、最も単純な単一起点ネットワーク (i.e., $o_p = 0$, $\forall p \in \mathcal{P}$) における最早未配分車両の存在を考えよう。単一起点ネットワークにおいては直感的にわかる通り、ステップ 1 における未配分車両のうち出発時刻 s_p が最も早い車両が最早未配分車両である²⁴⁾。つまり、出発時刻順に一台ずつ車両をネットワークに配分していけば、Nash 均衡解が求まる。(終点は複数あるが) イメージとしては、図-1(b) そのものである。

ステップ 2 は先にも述べた時間依存最短経路問題 (3) となる。このクラスの問題は一般ケースでは非常に解くことが難しいが (i.e., NP 困難問題)、リンクにおいて

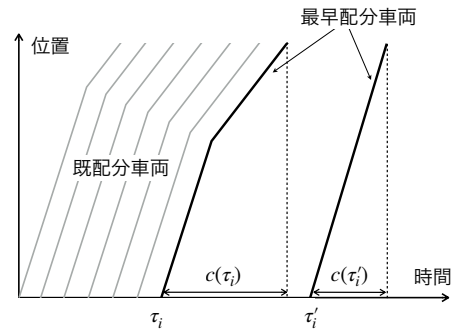


図-2 最早未配分車両が費やすリンク旅行時間

FIFO が成立する (本稿で扱うような) 時間依存最短経路問題は、通常の静的な最短経路問題とほぼ同様の取り扱いが可能であり、Dijkstra 法やラベル修正法 (の軽微な修正) により解くことができる⁴⁷⁾。例えば、Dijkstra 法であれば、唯一の修正点は、リンク旅行時間をその上流ノードへの最早到着時刻 $\tau_i(o_p, s_p; \mathbf{r}_{-p})$ で評価することである (i.e., その時刻にリンクに流入したとして交通流モデルにより旅行時間を計算する)。

さて、このステップ 2 が、伝統的な交通量配分モデルの文脈で言うところの flow independent な配分、あるいは、all-or-nothing 配分に相当するものになっていることに気づいたであろうか? つまり、粒子モデルでは車両を分割できないため、車両一台というフローを最短経路に全て配分していることになる。そしてこのとき、リンク旅行時間はもはやフローの関数ではなく、流入時刻のみの関数となる。このことを具体的に示したのが、図-2 の時空間図である。黒太線で表される最早未配分車両の軌跡は、それぞれ、異なる時刻 τ_i , τ'_i にリンクに流入した際に実現する軌跡である。つまり、時刻 τ_i にリンクに流入すると、順序配分アルゴリズムの中で既に配分された車両に追いつき旅行時間が増加し、時刻 τ'_i では自由旅行時間で走行できる、というように旅行時間が流入時刻のみに依存することがわかる。

以上をまとめると、粒子モデルでは、フローの配分と旅行時間が相互に作用するという交通均衡問題一般に現れる難しさ (具体的には、次節を参照) を回避でき、均衡配分問題を flow independent な最短経路問題に分解することができる。これが、粒子モデルの流体モデルに対する大きなアドバンテージである。

フロー配分への影響を考慮することなくリンク旅行時間を評価できるという以上の性質は、様々な交通流モデルを容易に均衡配分モデルのサブモデルとして扱うことができる⁷⁾、という利点にも繋がる。次節の流体モデルで想定するシンプルな point queue モデル³⁹⁾ だけでなく、physical queue モデル (e.g., kinematic wave モ

⁷⁾ 大雑把な言い方をすれば、シミュレーションができる因果律と FIFO を満たす交通流モデルならなんでもよい。

デル^{48),49),50)}/Newellの単純化追従モデル⁵¹⁾や内生的に capacity drop (i.e., 一旦渋滞が発生すると捌け交通量が低下する)現象を表現するモデル (e.g., Wada et al.⁵²⁾)を用いてもよい。例えば, 井料^{19),20)}は point queue モデル, 井料²⁴⁾, 佐津川・和田²⁵⁾は Newellの単純化追従モデルを用いている。ノードモデルについても同様に, 提案されている様々なモデル^{53),6)}を, 本質的な問題の難しさ変えることなく, 組み込むことができる。

(2) 流体モデル

本節では, point queue モデルを仮定した流体型の DUE 配分モデルを定式化する⁴⁾。そこでまず, 粒子モデルでは定義されていない各種フロー変数, および, フロー変数に基づく旅行時間関数を導入する。

モデルの入力である各 OD ペア間の交通需要は, 時刻 t までに起点 o を出発し, 終点を d とする累積交通量 $Q_{od}(t)$ として表現される。また, 各リンク (i, j) への累積流入交通量と累積流出交通量は, それぞれ, $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ と表し, これらを時間で微分することで流入・流出交通流率は以下のように表される。

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{dA_{ij}(t)}{dt}, \quad \kappa_{ij}(t) = \frac{dD_{ij}(t)}{dt}$$

Point queue モデルでは, リンク下流端にボトルネックが存在すると仮定し, 旅行時間が自由旅行時間とボトルネック待ち行列による遅れ時間の和で表されるとする。いま, 自由旅行時間を c_{ij}^0 , ボトルネック容量を μ_{ij} とすると, 時刻 t にリンク (i, j) に流入した際の旅行時間 $c_{ij}(t)$ は,

$$c_{ij}(t) = c_{ij}^0 + \frac{e_{ij}(t + c_{ij}^0)}{\mu_{ij}} = c_{ij}^0 + \int_0^t \frac{dc_{ij}(\omega)}{d\omega} d\omega$$

と表される。ここで, $e_{ij}(t) = A_{ij}(t - c_{ij}^0) - D_{ij}(t)$ は時刻 t のリンク下流端における待ち行列台数であり, リンク旅行時間の変化率は,

$$\frac{dc_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda_{ij}(t)/\mu_{ij} - 1 & \text{if } c_{ij}(t) > c_{ij}^0 \\ \max\{0, \lambda_{ij}(t)/\mu_{ij} - 1\} & \text{if } c_{ij}(t) = c_{ij}^0 \end{cases}$$

となる。また, この条件は以下の相補性条件に緩和すると解析上便利である⁸⁾。

$$\begin{cases} dc_{ij}(t)/dt = \lambda_{ij}(t)/\mu_{ij} - 1 & \text{if } c_{ij}(t) > c_{ij}^0 \\ dc_{ij}(t)/dt \geq \lambda_{ij}(t)/\mu_{ij} - 1 & \text{if } c_{ij}(t) = c_{ij}^0 \end{cases} \quad (5)$$

a) ラグランジュ座標系における定式化

単一起点ネットワークの DUE 状態では, 終点は異なっても同時刻 s に起点を出発したフローの任意のノードへの最早到着時刻 $\tau_i(s)$ は経路によらず等しい。また, 交通流モデルの FIFO 原則から, 同一起点を異なる時刻

⁸⁾ 緩和した条件であり, 厳密には両者は一致しないが, 元の point queue モデルの FIFO 等の基本的な性質は満たしている⁵⁴⁾。

$s < s + ds$ に出発したフローは, 終点までに利用される各ノードへ出発時刻順に到着する (i.e., $\tau_i(s) < \tau_i(s + ds)$)。つまり, ネットワークレベルの FIFO が成立して^{7),8)},

$$\dot{\tau}_i(s) \equiv \frac{d\tau_i(s)}{ds} > 0. \quad (6)$$

さらに, 因果律により, 起点出発時刻 s に関して配分問題を前向きに逐次解析することができる⁷⁾。

以下では, 出発時刻 s でラベル付けされたフローを用いたラグランジュ座標系⁹⁾における DUE 配分の定式化を行っていこう⁷⁾ (オイラー座標系における定式化は, 例えば, 赤松^{9),4)}を参照)。まず, 旅行時間関数は,

$$c_{ij}(s) = c_{ij}^0 + \int_0^s \dot{c}_{ij}(\omega) d\omega,$$

ここで,

$$\begin{aligned} \dot{c}_{ij}(s) &= \frac{dc_{ij}(\tau_i(s))}{d\tau_i(s)} \cdot \dot{\tau}_i(s) \\ &= \begin{cases} y_{ij}(s)/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i(s) & \text{if } c_{ij}(s) > c_{ij}^0 \\ \max\{0, y_{ij}(s)/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i(s)\} & \text{if } c_{ij}(s) = c_{ij}^0 \end{cases} \end{aligned}$$

である。新たなフロー変数である, 出発時刻 s に対するリンク交通流率 $y_{ij}(s)$ は以下のように定義される:

$$\begin{aligned} y_{ij}(s) &\equiv \frac{dA_{ij}(\tau_i(s))}{ds} \\ &= \frac{dA_{ij}(\tau_i(s))}{d\tau_i(s)} \cdot \dot{\tau}_i(s) = \lambda_{ij}(\tau_i(s)) \cdot \dot{\tau}_i(s). \end{aligned} \quad (7)$$

また, 式 (5) と同様に, (出発時刻 s についての) 旅行時間の変化率は以下のように緩和できる。

$$\begin{cases} \dot{c}_{ij}(s) = y_{ij}(s)/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i(s) & \text{if } c_{ij}(s) > c_{ij}^0 \\ \dot{c}_{ij}(s) \geq y_{ij}(s)/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i(s) & \text{if } c_{ij}(s) = c_{ij}^0 \end{cases} \quad (8)$$

ネットワーク上の各ノード k ($\neq o$) におけるフロー保存則は, 累積交通量を用いて,

$$\sum_i D_{ik}(\tau_k(s)) - \sum_j A_{kj}(\tau_k(s)) - Q_{ok}(\tau_o(s)) = 0.$$

さらに, 時刻 s に起点を出発したフローのリンク内での順序が保たれることに注意して (i.e., $D_{ik}(\tau_k(s)) = A_{ik}(\tau_i(s))$), 両辺を出発時刻 s について微分すると,

$$\sum_i y_{ik}(s) - \sum_j y_{kj}(s) - \dot{Q}_{ok}(s) = 0 \quad (9)$$

が得られる。ここで, $\tau_o(s) = s$, $\dot{\tau}_o(s) = 1$ を用いた。

最後の条件は, 経路選択条件であり, リンクベースの最短経路条件は以下のように表される。

$$\begin{cases} \tau_i(s) + c_{ij}(s) = \tau_j(s) & \text{if } y_{ij}(s) > 0 \\ \tau_i(s) + c_{ij}(s) \geq \tau_j(s) & \text{if } y_{ij}(s) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

⁹⁾ 総累積交通量 $n = \sum_d Q_{od}(s)$ の (適切な) 逆関数により, 出発時刻 s と車両配分順序 n は一対一に対応づけられる。

以降の表現を簡便にするため、上述の3つの条件のベクトル・行列を以下に記す。

$$\mathbf{c}^0 \leq \mathbf{c}(s) \perp \{\dot{\mathbf{c}}(s) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(s) + \mathbf{A}_+^T \boldsymbol{\tau}(s)\} \geq \mathbf{0} \quad (11a)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(s) = -\dot{\mathbf{Q}}(s) \quad (11b)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{y}(s) \perp \{\mathbf{c}(s) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau}(s)\} \geq \mathbf{0} \quad (11c)$$

ここで、 \perp は相補性条件、 T は行列の転置を表す。 \mathbf{A} は起点ノードを除いた $|\mathcal{N}|-1$ 行 $|\mathcal{L}|$ 列のリンク・ノード接続行列であり、 \mathbf{A}_+ は \mathbf{A} の -1 の要素を 0 で置き換えた行列、 \mathbf{M} は容量 μ_{ij} を対角要素に持つ対角行列、その他はすべてリンクやノード毎に定義された変数を並べたベクトルである。

b) 解法

全ての出発時刻 s に対して定式化された DUE 配分問題 (11) を解くためには、まず、時間を離散化する必要がある。具体的には、微分変数の含まれる (渋滞時の) 旅行時間に関する条件 (8) を幅 ds で離散化すると、

$$c_{ij}(s) = y_{ij}(s)ds/\mu_{ij} - \tau_i(s) + \eta_{ij},$$

ここで、 $\eta_{ij} = c_{ij}(s - ds) + \tau_i(s - ds)$ は出発時刻 $s - ds$ の車両のリンク流出時刻である。DUE 配分が起点出発時刻について前向きに逐次計算できるので、時刻 s の問題を考える際には $c_{ij}(s - ds), \tau_i(s - ds)$ 所与である (i.e., η_{ij} は定数である)。一方、フロー保存則は、式 (9) の微分変数 $\dot{Q}_{ok}(s)$ を $q_{ok}(s) \equiv \{Q_{ok}(s) - Q_{ok}(s - ds)\}$ に置き換えればよい。

次に、離散化された DUE 配分問題を数理的性質の解明が進んでいる標準的なクラスの問題に変換する。変換する枠組みとしては、相補性問題、変分不等式問題、不動点問題などがありえる。ここでは線形相補性問題 (LCP: Linear Complementarity Problem) および変分不等式 (VI: Variational Inequality) 問題としての DUE 配分問題の表現を示す⁴⁾。

[LCP-DUE] Find \mathbf{x}^* such that

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0, \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad (12)$$

[VI-DUE] Find $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_+^{2|\mathcal{L}|+|\mathcal{M}|-1}$ such that

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{2|\mathcal{L}|+|\mathcal{M}|-1} \quad (13)$$

where $\mathbf{x} \equiv [\mathbf{c}(s) - \mathbf{c}^0, \boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{y}(s)]^T$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_+^T & -ds \cdot \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(s) - \mathbf{c}^0 \\ \boldsymbol{\tau}(s) \\ \mathbf{y}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}^0 + \boldsymbol{\eta} \\ -\mathbf{q}(s) \\ \mathbf{c}^0 \end{bmatrix}$$

相補性問題/変分不等式を解く一般的なアルゴリズムについては Facchinei and Pang⁵⁵⁾ が詳しい。また、(定式化はやや違うが) Akamatsu¹⁷⁾ は大域収束的 Newton 法をベース、かつ、問題構造を活かした効率的な解法を提案している。近年では、相補性問題を含む広いクラスの問題 (二次錐相補性問題) を解くための理論的収束性

能のよいアルゴリズム (Regularized Smoothing Newton Algorithm)⁵⁶⁾ を実装したソルバー “ReSNA” (MATLAB) も公開されており⁵⁷⁾、気軽に解くことも可能である。

解法の均衡解への収束を保証するためには、問題の写像 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ が単調性¹⁰⁾ (やそれよりもやや弱い条件) といったよい性質を満たすことが一般的に要求される。現在分かっている、写像の単調性を満たすネットワークのクラスは、一経路に一つのボトルネックが存在するネットワークである⁵⁹⁾ (ただし、point queue モデルを仮定、OD ペアは任意)。これは、point queue モデルに基づく旅行時間関数が、単一リンクに限定すれば単調性を満たすためである⁶⁰⁾。逆に言えば、二つ以上のボトルネックを通過する場合には、先にも述べた経路旅行時間関数のネスト構造のため単調性が失われ、(単一起点問題であっても) 写像 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ が解法の収束を保証するための性質を満たすか否かは明らかになっていない (実際上は、多くのケースで均衡解への収束が報告されている¹⁷⁾)。

最後に、粒子モデルとの関係を見たい。リンク旅行時間の相補性条件 (8) を離散化したものは、次のような max 関数としても表現可能である。

$$c_{ij}(y_{ij}(s), \tau_i(s)) = \max\{y_{ij}(s)ds/\mu_{ij} - \tau_i(s) + \eta_{ij}, c_{ij}^0\}$$

この式より、リンク旅行時間関数が $(y_{ij}(s), \tau_i(s))$ の関数となっていることが分かる。そのため、上述のような $(\mathbf{y}(s), \boldsymbol{\tau}(s))$ (あるいは、 $\mathbf{c}(s)$ も加えたもの) についての収束計算が必要となる。一方、粒子モデルで配分するのは分割不可能な最早未配分車両 1 台であるので旅行時間評価の際に $y_{ij}(s)ds = 1$ としてよく、リンク旅行時間は $\tau(s)$ だけの関数となる。そのため、解くべき問題¹¹⁾ は以下の時間依存最短経路問題 (問題 (3) の別表現) に帰着する。

$$\begin{cases} \tau_i(s_p) + c_{ij}(\tau_i(s_p)) = \tau_j(s_p) & \text{if } \tilde{y}_{ij}(s_p) > 0 \\ \tau_i(s_p) + c_{ij}(\tau_i(s_p)) \geq \tau_j(s_p) & \text{if } \tilde{y}_{ij}(s_p) = 0 \end{cases} \quad (14a)$$

$$\sum_i \tilde{y}_{ik}(s_p) - \sum_j \tilde{y}_{kj}(s_p) - \delta_{k,d_p} = 0 \quad (14b)$$

ここで、 δ_{k,d_p} は $k = d_p$ のとき 1、それ以外は 0 をとるクロネッカーのデルタ、 $\tilde{y}_{ik}(s_p) = y_{ij}(s)ds \in \{0, 1\}$ である。

なお、流体モデルの DUE 配分でも physical queue モデルを扱うことは可能であるが、収束保証等の理論解析を行うためには上記で示したように旅行時間、フロー変数、最早ノード到着時刻の変数間関係を陽に書き下す必要があるため、より取り扱いが複雑になる。この

¹⁰⁾ 別の言い方をすれば、経路交通量の増加とともに経路旅行時間が伸びるという性質である⁵⁸⁾。直感的には成立しそうなこのような条件が一般に成立しないのが動学的な問題である。

¹¹⁾ ただし、出発時刻 s でなく、総累積交通量 $n = Q(s) = \sum_d Q_{od}(s)$ の逆関数 $Q^{-1}(n)$ を幅 $dn = 1$ で適当に離散化する (i.e., OD 別交通流率に応じて 1 つの OD ペアに割り当てる) 必要がある。また、 η_{ij} は車両 p 以前に配分され、かつ、直前に当該リンクを利用した車両の流出時刻と読み替える必要がある。

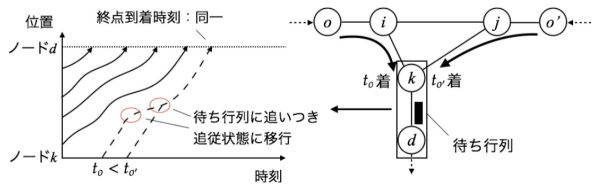


図-3 終点到着時刻に基づく最早未配分車両決定の反例²⁵⁾

点も粒子モデルと大きく異なる。

3. 単一終点ネットワーク問題

本章では、単一終点ネットワークを扱う。このネットワークでは唯一の終点で全ての車両やフローの順序が比較可能であるので、これまでの議論から考えると、直感的には、終点到着時刻によって適切な車両配分順序が決まりそうである。これは、半分正解であり、半分間違いである。次節では、粒子モデルにおいて、この直感が当てはまらないことを示す。ここでは、渋滞した道路においては下流における車両流出パターンから上流での到着パターンを復元できない、という“流れの向き”と“需要情報”に関わることで問題が発生する。続く節では流体モデルを扱う。流体モデルでは上記の直感は当てはまるが、それでも粒子モデルと同様の原因から、均衡解の不定性という問題が生じる。

(1) 粒子モデル

a) 弱い FIFO と情報の喪失

粒子モデルにおける適切な車両配分順序の存在は、最早未配分車両の存在と一対一対応するのであった。そこで、図-3 の状況を例に、終点到着順序に基づく最早未配分車両の決定が可能かどうかを考えてみよう。この例のネットワークは終点が d 、起点が $\{o, o'\}$ であり、起点 o から出発する最も早い出発時刻を持つ未配分車両がより早くノード k に到着できるものとする (i.e., 起点 o' の最も早い出発時刻を持つ未配分車両は最早未配分車両ではない)。また、リンク (k, d) 上には、十分な長さの待ち行列が存在し、どちらの車両の起点出発時刻も待ち行列に追いつけるものとする。このとき、リンク (k, d) に流入した未配分車両の走行パターンは、図-3 の時空間図の点線で示される¹²⁾。この図からわかるように、いずれの未配分車両を配分しても同一時刻に終点に到着できてしまう。つまり、終点到着時刻に基づき車両配分順序を決めようとする¹³⁾、起点 o' の未配分車両が最早未配分車両として選ばれる可能性がある²⁵⁾。この

¹²⁾ ある未配分車両を追加配分したときの走行パターンと、その未配分車両を配分せず、もう一台の未配分車両を追加配分したときの走行パターンを重ねて示している。

¹³⁾ 例えば、同一時刻に到着可能であれば任意の一台をランダムに最早未配分車両にする、というルールが考えられる。

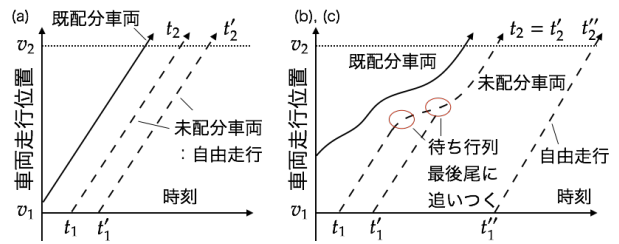


図-4 二台の未配分車両の走行パターン²⁵⁾

ような状況が生じるのは、未配分車両同士の比較においては（実際に配分された車両が受ける物理的な制約である）通常の FIFO 原則を利用できないためである。

一般に、あるリンクに異なる時刻に流入した二台の未配分車両の走行パターンは図-4 に示す三つである：(a) 両車両が自由走行；(b) 両車両が追従走行；(c) 先に流入する車両が追従走行、後に流入する車両が自由走行。これらパターンから、 $t_1 < t_1'$ にリンクに流入した車両のリンク流出時刻 t_2, t_2' について次の関係が成り立つ。

$$t_1 < t_1' \Rightarrow t_2 = t_1 + c_{ij}(t_1) \leq t_2' = t_1' + c_{ij}(t_1') \quad (15)$$

これを本稿では、弱い FIFO と呼ぶ（通常の FIFO 原則では、右辺が狭義の不等式で成り立つ）。弱い FIFO をリンク旅行時間の変化率で表現すると以下となる。

$$\frac{c_{ij}(t_1') - c_{ij}(t_1)}{t_1' - t_1} \geq -1. \quad (16)$$

この等号が成り立つとき、リンク上流での到着パターンの情報がリンク下流側で失われることになる。

b) ノードポテンシャル関数と単一方向ネットワーク

では、単一終点ネットワークでは、最早未配分車両は常に存在するのであるだろうか？ それを証明する上で、有用なのが、Iryo and Smith²⁷⁾ によって導入されたノードポテンシャル関数という概念である。ポテンシャル関数は様々な分野で様々な意味で用いられるが、ここでは、次のように定義される。

定義 4 (ノードポテンシャル関数). ネットワークの任意の起点を基準点として選び、それを o_{REF} とする。各リンクの旅行時間関数 $c_{ij}(t)$ を全リンク・全時間帯分束ねたベクトル \mathbf{c} を所与としたとき、ノードポテンシャル関数 $\tau_i^p(t; \mathbf{c})$ とは次の関係を満たす関数である。

$$\tau_i^p(t; \mathbf{c}) = \tau_i(o, \tau_o^p(t; \mathbf{c}); \mathbf{c}), \quad \forall i \in \mathcal{N}^*(o, \tau_o^p(t; \mathbf{c}); \mathbf{c}), \quad \forall o \in \mathcal{N}_0 \quad (17)$$

$$\text{where } \tau_{o_{REF}}^p(t; \mathbf{c}) = t.$$

ここで、 $\mathcal{N}^*(o, \tau_o^p(t; \mathbf{c}); \mathbf{c})$ は、旅行時間関数ベクトルを所与として、時刻 $\tau_o^p(t; \mathbf{c})$ に起点 o を出発して任意の終点に向かう最短経路で構成されるネットワーク（最短経路ネットワークと呼ぶ）に含まれるノードの集合、

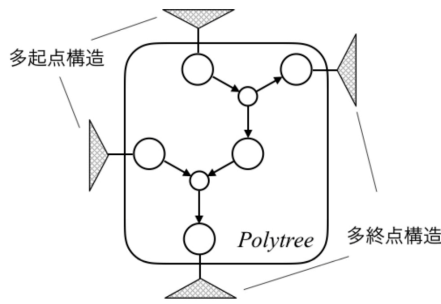


図-5 単一方向ネットワークの例 (Polytree 構造)

$\tau_i(o, \tau_o^p(t; \mathbf{c}); \mathbf{c})$ はその集合に含まれるノード i への最早到着時刻である。基準点における時刻は基準時刻と呼ぶ。

ノードポテンシャル関数は、各リンクが取りうる“仮想的な”旅行時間関数の組み¹⁴に対して定義されるものである。従って、粒子/流体モデルのどちらでも使うことができる。ある経路選択プロファイル (あるいは、フロー配分パターン) \mathbf{r} の下で、実際に実現する旅行時間 $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ を考えると、ここまでで定義してきたノード最早到着時刻とほぼ同等のものになる。

より具体的には、あるネットワーク、起終点ノード、旅行時間ベクトル \mathbf{c} が与えられたときに、ノードポテンシャル関数が存在するということは、任意の起点 o を時刻 $\tau_o^p(t; \mathbf{c})$ に出発する任意の最短経路 r^* で共有されるノードについて、一意的な最早到着時刻が定められることができるということである。すなわち、最短経路ネットワークでは、全てのリンクに対して、

$$\tau_j^p(t; \mathbf{c}) = \tau_i^p(t; \mathbf{c}) + c_{ij}(\tau_i^p(t; \mathbf{c}))$$

が成立する。従って、このような関数が常に存在するには、任意の \mathbf{c} に対して全ての最短経路が“同じ方向” (i.e., ポテンシャル関数値が増加する方向) にノードを辿っていくような、ネットワークと起終点ノードの配置が必要である。Iryo and Smith²⁷⁾ では、こうしたノードポテンシャル関数が常に存在するネットワーク・クラスとして、単一方向ネットワーク (unidirectional network) を提案している。

単一方向ネットワークは、前章で扱った単一起点ネットワークや本章のテーマである単一終点ネットワークを特殊ケースとして含む。例えば、図-5 に示す Polytree 構造を持つネットワークは単一方向ネットワークである²⁷⁾。Polytree とは、有向非巡回グラフの特殊例であり、仮に全ての有向リンクを無向リンクに変換しても、閉路を持たないネットワークである。また、polytree の“上流側”の各ノードに多起点構造、“下流側”の各ノードに多終点構造のネットワークを接続したのも単一方

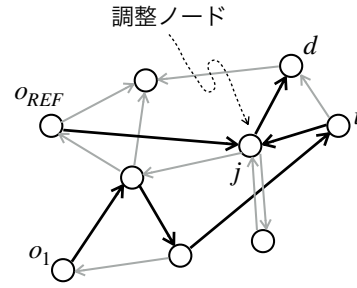


図-6 元ネットワークと最短経路ネットワーク

向ネットワークである。この図からも、全ての交通が“同じ方向”に流れる様子がわかるであろう。

単一終点ネットワークにおけるノードポテンシャル関数について図-6により具体的に考えてみよう。このネットワークは二つの起点と一つの終点を持ち、灰色の薄い矢印で書かれているのがオリジナルのネットワークのリンク、黒の矢印で書かれているのがそのうち基準時刻 $[t, t']$ の最短経路において利用されるものである。まず、基準点 o_{REF} からの最短経路ネットワークを考える。オリジナルネットワークには様々な閉路も存在するが、最短経路ネットワークは2つのリンクと起終点を含む3つのノードで構成される (もちろん木構造である)。基準時刻 $\tau_{o_{REF}}^p(t; \mathbf{c}) = t$ から、この最短経路に沿って各ノードのポテンシャル関数値が一意に決まることは明らかである。例えば、調整ノード j のポテンシャル関数値は、 $\tau_j^p(t; \mathbf{c}) = t + c_{o_{REF}j}(t)$ である。

一方、基準点でない起点から時刻 $\tau_{o_1}^p(t; \mathbf{c})$ (この時点では値は定まっていない) に出発する場合の最短経路ネットワークが図のように、5本のリンクと6つのノードで構成されるとしよう。単一終点ネットワークでは、異なる起点の最短経路ネットワークは一度交わると (ここでは調整ノード) 以降は共通である。従って、起点 o_1 から最短経路に沿って走行したときに時刻 $\tau_j^p(t; \mathbf{c})$ に調整ノード j に到着するように、その上流側ノードのポテンシャル関数値を定めることになる。通常の FIFO 原則が成り立つ旅行時間関数ベクトル \mathbf{c} を前提とすれば、各リンクの流入・流出時刻は一対一対応するので、これらのポテンシャルは一意に決めることができる²⁷⁾。しかし、粒子モデルのように弱い FIFO しか成り立たない式 (16) の旅行時間関数ベクトル \mathbf{c} を前提とすると、ポテンシャル関数の定め方は一意ではない。例えば、リンク (i, j) に十分な待ち行列が存在しており、このリンクへの異なる流入時間帯 $[t_1, t'_1]$ に対して式 (16) が等式で成り立っていたとすると、

$$t_1 + c_{ij}(t_1) = t'_1 + c_{ij}(t'_1) = \tau_j^p(t; \mathbf{c})$$

という状況が生じうる。つまり、 $\tau_j^p(t; \mathbf{c}) \in [t_1, t'_1]$ であり、一意に定めることはできない。

¹⁴ 極論を言えば、この組みを実現する起終点需要パターンや経路配分パターンは存在しなくてもよい。

それにも関わらず、異なる基準時刻 $t < t'$ に対応するポテンシャル関数値 $\tau_i^p(t; \mathbf{c}), \tau_i^p(t'; \mathbf{c})$ の大小関係は一意的に決めることができる。具体的にはまず、調整ノード j のポテンシャル関数値は、弱い FIFO から $\tau_j^p(t; \mathbf{c}) \leq \tau_j^p(t'; \mathbf{c})$ である。ここで、この不等式が狭義に成り立つとき、通常の FIFO 原則より、 $\tau_i^p(t; \mathbf{c})$ の定め方によらず $\tau_i^p(t; \mathbf{c}) < \tau_i^p(t'; \mathbf{c})$ が成り立つ。一方、等式 $\tau_i^p(t; \mathbf{c}) = \tau_i^p(t'; \mathbf{c})$ が成立するとき、先の議論から、 $\tau_i^p(t; \mathbf{c}), \tau_i^p(t'; \mathbf{c}) \in [t_1, t_1']$ となるが、このポテンシャル関数値の大小関係を規定する物理的な制約はないため、一般性を失うことなく $\tau_i^p(t; \mathbf{c}) \leq \tau_i^p(t'; \mathbf{c})$ と設定することができる。

以上は、単一終点ネットワークに限らず、単一方向ネットワークで一般に成立する。つまり、単一方向ネットワークにおける最短経路ネットワークに含まれる任意のポテンシャル関数と基準時刻の間には次のような単調性が成り立つことが示されている²⁶⁾。

$$t < t' \Rightarrow \tau_i^p(t; \mathbf{c}) \leq \tau_i^p(t'; \mathbf{c}) \quad (18)$$

c) 最早未配分車両の存在

以上で述べたノードポテンシャル関数を用いると、複数の未配分車両間の（最短）経路で共有されるノードへの各車両の最早到着時刻を、基準時刻を用いて比較することができる。具体的には、単一方向ネットワークにおける最早未配分車両の存在は次のように証明することができる。

いま、時刻 s_q に起点 o_q を出発する未配分車両 $q \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ の持つ基準時刻を t_q と書こう、i.e., $\tau_{o_q}^p(t_q; \mathbf{c}(\mathbf{r})) = s_q$ 。このとき、未配分車両の中で最小の基準時刻を持つ未配分車両 p は次の不等式を満たす最短経路 \bar{r}_p を持つ。

$$\begin{aligned} \tau_i(o_p, s_p; \mathbf{r}_{-p}) &= \tau_i^p(t_p; \mathbf{c}(\bar{r}_p, \mathbf{r}_{-p})) \leq \tau_i^p(t_q; \mathbf{c}(\bar{r}_q, \mathbf{r}_{-q})) \\ &\leq \tau_i(o_q, s_q; \mathbf{r}_{-q}), \quad \forall i \in \mathcal{N}(\bar{r}_p) \cap \mathcal{N}_q, \forall q \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \{p\} \end{aligned} \quad (19)$$

最初の等式は、ポテンシャル関数の定義から成り立つ。二番目の不等式は、式 (18) による。最後の不等式は、車両 q が最短経路を含むいかなる経路を用いてノード i に到達しても、その最早到着時刻が最短経路を用いた場合（つまり、ノードポテンシャル関数の値）に比べて早くならないことを表している。結局、不等式 (19) は、車両 p が最短経路 \bar{r}_p 上の全てのノードに、そのほかの未配分車両 q よりも遅くつくことはないことを示している。従って、車両 p は最早未配分車両である。

以上をまとめると次のようになる。粒子モデルにおいては、終点到着時刻で適切な車両配分順序を決めることはできない。しかし、単一終点ネットワークを含む単一方向ネットワークに対しては適切な車両配分順序（最早未配分車両）は存在する。従って、単一方向ネットワークを対象とした粒子モデルでは、順序配分アルゴリズムを利用してヒューリスティックな計算なしに、Nash 均衡解を求めることができる。なお、単一

起点ネットワークのように起点出発時刻で最早未配分車両が特定できない場合は、順序配分アルゴリズムのステップ 2 では、各起点の最も早い出発時刻を持つ車両を比べて最早未配分車両を選ぶ必要がある¹⁵⁾。

(2) 流体モデル

a) 定式化

本節は、単一終点ネットワークにおける流体モデルの DUE 配分を扱う。粒子モデルの DUE 配分では弱い FIFO 条件が適切な車両配分順序を定める上で障壁となったが、このような状況は流体モデルでは生じない。これは、次のように説明することができる。交通流モデルの FIFO 条件は累積交通量を用いて、

$$A_{ij}(t) = D_{ij}(t + c_{ij}(t))$$

と表され、両辺を時間で微分すると、

$$\lambda_{ij}(t) = \kappa(t + c_{ij}(t))(1 + dc_{ij}(t)/dt)$$

である。流体モデルの DUE 配分状態で利用される最短経路上のリンクには必ずフローが存在するので (i.e., $\lambda_{ij}(t), \kappa(t + c_{ij}(t)) > 0$)、旅行時間関数は必ず、

$$\frac{dc_{ij}(t)}{dt} > -1 \quad (20)$$

を満たす。この式は、式 (16) の極限をとったものであるが、弱い FIFO を引き起こす等式条件は含まれない。

つまり、単一終点ネットワークにおける DUE 配分問題では、全ての起点からのフローの順序が比較可能な終点での到着時刻 u によって適切な車両配分順序を決めることができる。その定式化は単一起点問題とほぼ同様であるので、以下では結果のみ示す⁴⁾。いま、終点到着時刻 u のフローのノード i への最早到着時刻を $\tau_i(u)$ 、終点到着時刻 u でラベル付けされたフローに沿って定義されるラグランジュ座標系における新たなフロー変数 $y_{ij}(u)$ を以下のように定義する：

$$y_{ij}(u) \equiv \lambda_{ij}(\tau_i(u)) \cdot \tau_i(u). \quad (21)$$

このとき、DUE 配分問題は以下のように定式化される。

$$\begin{cases} \hat{c}_{ij}(u) = y_{ij}(u)/\mu_{ij} - \tau_i(u) & \text{if } c_{ij}(u) > c_{ij}^0 \\ \hat{c}_{ij}(u) \geq y_{ij}(u)/\mu_{ij} - \tau_i(u) & \text{if } c_{ij}(u) = c_{ij}^0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\sum_i y_{ik}(u) - \sum_j y_{kj}(u) + \dot{Q}_{kd}(u) = 0 \quad \forall k \neq d \quad (23)$$

$$\begin{cases} \tau_i(u) + c_{ij}(u) = \tau_j(u) & \text{if } y_{ij}(u) > 0 \\ \tau_i(u) + c_{ij}(u) \geq \tau_j(u) & \text{if } y_{ij}(u) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

唯一の違いは、各ノードのフロー保存則である。単一起点ネットワークでは、出発時刻 s に対応するフロー

¹⁵⁾ ポテンシャル関数を使って最早未配分車両を特定できると思われるかもしれないが、この関数はあくまで理論的な性質を証明するための概念であり、計算できるとしても Nash 均衡を求めるのと同様かそれ以上の計算を要するであろう。

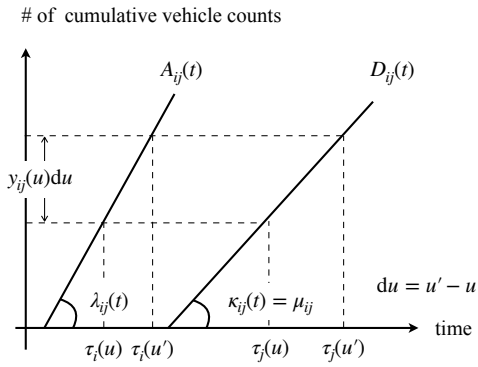


図-7 オイラー/ラグランジュ座標系のフロー変数の関係

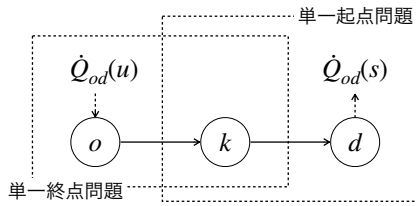


図-8 テストネットワーク

の起点“発生”交通流率 $\dot{Q}_{od}(s)$ を用いて（冗長である）“起点”以外のノードでフロー保存則が定式化された。一方、単一終点ネットワークでは、終点到着時刻 u までの終点“集中”交通流 $\dot{Q}_{od}(u)$ を用いて“終点”以外のノードでフロー保存則が定式化される。

b) 流れの向きと情報の喪失

ここでは、赤松・高松¹³⁾、Akamatsu¹⁴⁾によって指摘された、単一終点問題のDUE均衡解の不定性について考察する。そのために、DUE配分の均衡解を解析的に分析する。まず、DUE配分状態でフローが存在しかつ待ち行列が存在しているリンクを考える。このとき、旅行時間の条件(22)と経路選択条件(24)の等式条件を連立することで、以下の関係が得られる。

$$y_{ij}(u) = \mu_{ij} \dot{\tau}_j(u) (= \lambda_{ij}(\tau_i(u)) \dot{\tau}_i(u)) \quad (25)$$

この関係を図示したものが、図-7である。

いま、図-8のテストネットワークを考え、このネットワークの二本のリンクで上記の関係(25)が成立しているとしよう。このとき、DUE配分問題の変数 $(\mathbf{y}(u), \boldsymbol{\tau}(u))$ を求めるために残っている条件は、フロー保存則のみである。単一終点問題の定式化では、ノード o とノード k での二つのフロー保存則と式(25)を連立すると、以下が得られる：

$$\begin{aligned} \mu_{ok} \dot{\tau}_k(u) - \mu_{kd} \dot{\tau}_d(u) &= 0 \\ -\mu_{ok} \dot{\tau}_k(u) + \dot{Q}_{od}(u) &= 0 \end{aligned}$$

まず、定義より $\dot{\tau}_d(u) = 1$ である。また、この二本の式から、それぞれ独立に、 $\dot{\tau}_k(u) = \mu_{kd} / \mu_{ok} = \dot{Q}_{od}(u) / \mu_{ok}$ が求まる。しかし、起点 $\dot{\tau}_o(u)$ は求まらない。これが単一

終点問題、より正確には、終点到着時刻別に定式化したDUE配分の不定性（ランク落ち）問題である。

比較のために、出発時刻別の定式化による解も求めてみよう。ノード k とノード d での二つのフロー保存則と式(25)の u を s で置き換えた条件を連立することで、以下が得られる：

$$\begin{aligned} \mu_{kd} \dot{\tau}_d(s) - \dot{Q}_{od}(s) &= 0 \\ \mu_{ok} \dot{\tau}_k(s) - \mu_{kd} \dot{\tau}_d(s) &= 0 \end{aligned}$$

第一の式から、まず、 $\dot{\tau}_d(s) = \dot{Q}_{od}(s) / \mu_{kd}$ が求まり、第二の式から $\dot{\tau}_k(s) = \mu_{kd} \dot{\tau}_d(s) / \mu_{ok}$ が求まる。ここで、 $\dot{\tau}_o(s) = 1$ であるので、全てのノードにおける変数が求まる。

以上では、単純な例で不定性の問題を見たが、一般に、流入リンクがない、かつ、下流側で渋滞が生じている起点ノード（純湧き出しノード）では、必ずこの問題が生じる。これもいわば、渋滞によって上流の需要情報が喪失する問題である。つまり、ある時間幅 du の間にどのくらいの量のフローが起点を出発するかは下流側の容量の情報から求められるが（i.e., 図-7の $y_{ij}(u)du$ ）、どれくらいの交通流率で出発するか（i.e., 図-7の $\lambda_{ij}(t)$ ）を下流の情報からは一意に決めることができない（i.e., 図-7の $\tau_i(u), \tau_i(u')$ が不定）、という問題である。

こうした問題が起こる根本的な原因は、リンク旅行時間関数が上流ノード到着時刻の関数で表される、という点にある。この表現に明確に交通の流れの向き（i.e., 渋滞の上流と下流の区別）が現れる結果として、（単一起点/単一終点に関わらず）ラグランジュ座標系の定式化では式(25)のようなリンク下流側で測ったフロー変数の表現が現れる。そして、この表現形式のフロー変数を保存則と連立させると、（これも単一起点/単一終点に関わらず）リンクの上流ノードにしかかなり得ない純湧き出しノードの変数 $\dot{\tau}_o(\cdot)$ が抜け落ちることになる¹⁶⁾。単一起点問題、正確には、起点出発時刻別に定式化したDUE配分でこれが問題にならないのは、純湧き出しノードの変数 $\dot{\tau}_o(\cdot)$ が“未知”変数でないためである（i.e., 定義より $\dot{\tau}_o(s) = 1$ ）。

4. DUE配分の理論特性

DUE配分の理論特性としては、解の存在、解の一意性、解の大域的収束性/安定性、そして、解法の収束保証が代表的なものである³⁶⁾。これらの特性が現時点でどこまで明らかになっているかについて、多起点多終点のネットワークタイプ（1経路1ボトルネック、単一方向、一般ネットワーク）別にまとめたのが表-1である。

まず、括弧の左側の流体モデルについてみる。解の

¹⁶⁾ 上記の問題の解決策としては、純湧き出しノードに限って、起点発生交通流率 $dQ_{od}(u)/d\tau_o(u)$ を与えるという提案がなされている^{13), 14)}。

表-1 多起点多終点ネットワークに対する DUE 配分の理論特性 (括弧の左側：流体モデル, 括弧の右側：粒子モデル)

	存在	コストの一意性	大域的収束性/安定性	保証付き解法
1 経路 1BN ネットワーク	(○, ?)	(○ ⁵⁹ , ?)	(○ ⁵⁹ , ?)	(○ ⁵⁹ , ?)
単一方向ネットワーク	(○, ○ ²⁰)	(○ ²⁷ , × ²⁶)	(?, ○ ²⁶)	(?, ○ ²⁶)
一般ネットワーク	(○ ^{61,62} , × ²⁰)	(× ⁶³ , ×)	(?, ?)	(?, ?)

存在については動的配分研究の黎明期に Smith and Wisten⁶¹⁾により一般ネットワークにおける証明が与えられている(後に Mounce⁶²⁾はこの証明に必要な経路コストの連続性を証明している). その他の特性については, 単調性条件が満たされる 1 経路 1 ボトルネックネットワークについては, 全て肯定的に解決されている. 単調性を満たさないクラスのネットワークについては, 単一方向ネットワークにおいて均衡旅行時間が一意に決まることが Iryo and Smith²⁷⁾により示されている. ただし, 一般的なネットワークにおいては複数均衡が生じる(○⁶³, ○⁶⁴). また, 後でも触れるが, 大域的収束性や安定性, 保証付き解法といった (day-to-day の意味での) 動学的特性については明らかになっていない. なお, 上記の結果は, point queue モデルを前提とした解析に基づくものであることを付記しておく.

次に, 括弧の右側の粒子モデルについてみる. 解の存在については, Iryo²⁰⁾において, 単一方向ネットワークでは解が存在すること, また, 一般ネットワークでは解が存在しない例があることが示されている. また, 単一方向ネットワークでは, 順序配分アルゴリズムにより解を厳密に求められることはここまで述べた通りである. さらに, 単一方向ネットワークでは, 均衡解への大域的収束性や安定性についても近年特性が明らかになってきている²⁶⁾(以降で詳述する). なお, 1 経路 1 ボトルネックネットワークについては現時点で粒子モデルにより研究した事例はないが, 流体モデルがよい性質を満たすことを鑑みると, 粒子モデルにおいても肯定的に解決されることが期待できる.

以降では, ラグランジュ座標系における解析が可能な, 現時点での最も広いネットワーククラスである単一方向ネットワークを対象に, 上記で述べたいくつかの結果についてより具体的に解説する. 具体的には, まず, 粒子モデルを用いた均衡解の安定性解析について述べる. また, 流体モデルについては, 均衡解の一意性について概説する.

(1) 粒子モデル

a) 安定性解析の従来研究

均衡状態の安定性は, 均衡解をベンチマークとした解析の価値を決める重要な要素である. もし解が不安

定だとすれば, 均衡フローパターンは単に稀にしか実現しない極端な状態ということなる⁶⁵⁾. ここまでで示した均衡条件も, 利用者が自分の選択行動を変更するインセンティブをもたない安定状態を記述しているともみれる. しかし, この条件はあくまで, DUE 配分状態が安定状態となるための必要条件を与えているに過ぎない. そのため, 均衡状態が起りうることを保証するには, 均衡状態が摂動を受けた際に均衡状態に戻るか否か(漸近安定性)や, 任意の初期状態からいずれかの均衡状態に到達するか否か(大域的な収束性)を調べる必要がある.

均衡状態の安定性解析では, 不均衡状態から均衡へ至る日々の交通状態の調整過程を記述し, その特性を解析することになる. この調整過程は, 個々の利用者の現在や過去の経験に基づく日々の経路選択行動ルールにより導かれる.

交通ネットワーク均衡分野の従来研究(静的なものも含む)では, 微分方程式として表現される調整過程に対して, Lyapunov 関数を構成することで大域的な収束性を証明してきている⁶⁶⁾. このアプローチの成功の鍵となるのが, 経路旅行時間関数の単調性である. 実際, 1 経路 1 ボトルネックネットワークでは, (Smith ダイナミクス⁶⁷⁾に対する) Lyapunov 関数が示されている⁵⁹⁾. しかし, より広いクラスのネットワークに対しては単調性は期待できないため, 新たなアプローチが必要とされていた. このような状況の中, 粒子モデルを前提に Satsukawa et al.²⁶⁾によって提案されたのが, 次節で述べる Weakly Acyclic Game アプローチである.

b) Weakly Acyclic Game アプローチ

ここでは, 日々の交通状態の調整過程を表現するために, 一日内の時間軸とは別の時間軸(例えば, 日) $z = 1, 2, \dots$ を導入する. 各車両が z で採用している経路を r_p^z , 終点到着時刻(利得)を $g_p(r_p^z, r_{-p}^z)$ と表す.

Weakly Acyclic Game (WAG) とは, 任意の(不均衡)状態から Nash 均衡に到達する, プレイヤーの better response の連鎖 “better response path” が存在する戦略型ゲームのクラスである^{68), 69)}. Better response path とは, 各 z で一台の車両が自らの終点到着時刻を早める経路変更 (i.e., $g_p(r_p^{z+1}, r_{-p}^{z+1}) < g_p(r_p^z, r_{-p}^z)$) を行う経路選択プ

ロファイルの連鎖 r^1, r^2, \dots のことである¹⁷.

Satsukawa et al.²⁶⁾ は DUE ゲームが WAG であることを証明し、WAG の知見を活かして均衡状態への大域的収束性や確率的安定性を分析している。DUE ゲームが WAG であることの証明の概要は、単一方向ネットワークの DUE ゲームにおいて適切な車両配分順序があるという性質から、簡単に理解することができる。すなわち、車両配分順序が早い順に車両を選択し、(初期状態¹⁸では最短とは限らない)現在の経路から最短経路へ better response させる、というものである。そうすれば、順序の遅い車両の経路選択変更はより順序の早い車両の最短経路には影響を与えないので、車両の経路を最短経路へと順序通りに確定させていくことができる。そして、最も順序の遅い車両が最短経路に better response した時点で、経路選択プロファイルの連鎖は全ての車両が最短経路を選択する Nash 均衡状態に到達する。

厳密には、任意の初期状態では、DP 原理を満たさない最適応答経路 (i.e., 式 (3a) を満たすが式 (3b) を満たさない) を選択している車両も存在し、better response により経路選択変更できないケースも発生するが (なぜなら、終点到着時刻は改善されないため)、基本的な発想は順序配分アルゴリズムと同じである。

c) 大域的収束性

続いて、DUE ゲームの Nash 均衡状態への大域的収束性について述べる。ここからは、各 z において、一台の車両が“ランダム”に選ばれ、選ばれた車両が (全車両共通の) 何らかの行動変更ルールに従って、経路選択変更を行える状況を考える。行動変更ルールとしては、近視眼的な¹⁹代表的な 2 つのルールである better response と最適応答 (best response) を対象とする。

まず、前者の行動変更ルールから導かれる better response ダイナミクスの結果について説明しよう。前節でも述べたように、better response は、選ばれた車両が現在の経路と比べて厳密に終点到着時刻が改善する経路があるとき、そのうちの一つに何らかのルールで経路を変更するものである。もしそのような経路が存在しなければ、現在の経路を使い続ける。ここでは、(証明には必要ないため)これ以上のルールの特定化はしないが、その特定化の仕方により様々な行動を表現可能と言う意味で、比較的広いクラスのダイナミクスである。このダイナミクスの停留点は、明らかに Nash 均衡である。また、DUE ゲームは WAG であるので、Nash 均衡に到達する better response path が存在し、 $z \rightarrow \infty$ とすれば、そのような path をとる確率は 1 である。従って、

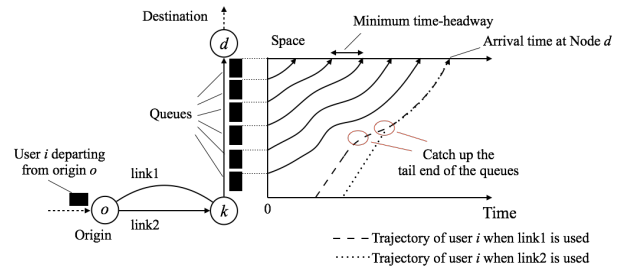


図-9 DP 原理を満たさない最適応答経路の例²⁶⁾

単一方向ネットワークにおいては、better response ダイナミクスによって生成される経路選択プロファイル r^z の連鎖が、任意の初期値から (複数ある場合にはいずれかの) Nash 均衡にほとんど確実に (almost surely) 収束する、と言える。

最適応答ダイナミクス⁷⁰⁾では、各 z で選ばれた車両は (現在の経路との比較なしに) 終点到着時刻を最小とする経路の一つをランダムに選択する。このダイナミクスの停留点は、狭義 Nash 均衡である⁷¹⁾ (定義については 2. の粒子モデルのパートを参照)。狭義でない Nash 均衡が停留点にならない理由は次の通りである: 狭義でない Nash 均衡では、終点到着時刻を最小とする複数の最適応答経路 (最短経路も含む) を持つ車両が存在し、その車両がその経路間の変更を行うことで現在の Nash 均衡から逸脱することができる。Nash 均衡におけるそうした最適応答経路間の経路変更は、他の車両の終点到着時刻に影響を与え、その車両を現在の経路を最適応答ではない状態に変えうる、という点でも問題である。実際にそうした状況が実現し経路変更があると、それに続く車両も影響を受け経路変更を行い、経路選択プロファイルを雪崩的に元の Nash 均衡から遠ざける可能性がある。

DUE ゲームにおいて狭義 Nash 均衡の存在は一般には保証できない。なぜなら、これまで度々言及してきたように、待ち行列が存在するネットワークでは、最短経路の他に DP 原理を満たさない最適応答経路が存在しうるためである。例えば、図-9 のような状況を考えてみよう。これは、Nash 均衡 r_p に対して、車両 p がリンク 1 と 2 のどちらを通る経路を利用しても、リンク 3 の待ち行列の末尾に追いつく状況を表す。ここで、リンク 1 を通る経路を使った場合にノード k へは早く到着でき、また、どちらの経路を使っても出発時刻の遅い車両の影響は受けないとする。このうち、リンク 1 を通る経路は、DP 原理が成立するので最短経路である。一方で、リンク 2 を通過する経路も最短経路と同じ時刻に終点に到着するので、Nash 均衡で必要となる他車両に対しての最適応答 (i.e., $g_p(r_p^*, r_p) \leq g_p(r_p, r_p)$) の条件を満たす。すると、Nash 均衡において、複数の最適応答経路が存在することになる。これは、弱い FIFO し

¹⁷ この定義において、車両がどのような行動ルールに従って経路選択変更を行ったかを特定する必要はない。

¹⁸ 順序配分アルゴリズムと異なり、全ての車両は選択肢 ϕ 以外の何らかの経路を選択しているとする。

¹⁹ 過去の経験は考慮せず、現在の状況のみに反応するものである。

か成立しない粒子モデルに特有の性質であり²⁰、この性質により Nash 均衡の狭義性は容易に失われうる。従って、最適応答ダイナミクスでは、DUE ゲームの Nash 均衡解への収束は一般に保証されない。

以上の二つのダイナミクスの比較から、DUE ゲームにおける Nash 均衡状態への大域的な収束のためには“現在状況から利得を厳密に改善する”という現状に対する一種の慣性力をもたらす行動ルール/ダイナミクスが必要であることがわかる。さらに、この二つの違いは、次節の確率的安定性の結果にも影響を及ぼす。

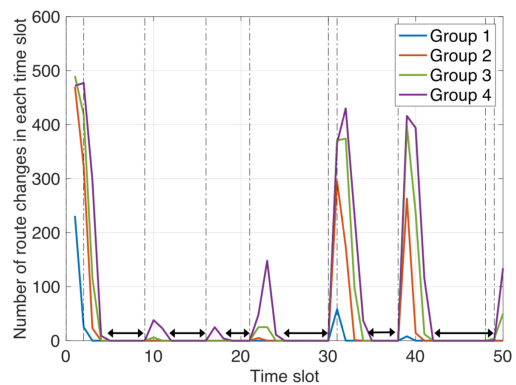
d) 確率的安定性

前節の大域的収束性は、Nash 均衡の集合への収束を保証するものであり、複数ある場合にいずれかの Nash 均衡が安定して実現することを保証するものではない。本節で扱う確率的安定性とは、調整ダイナミクスに揺らぎ (i.e., 利用者がときとして誤って利得の悪化する経路を選ぶ) の効果を導入し、Nash 均衡状態の漸近的な安定性を調べるための概念である⁶⁸。より具体的には、揺らぎのある調整過程をマルコフ連鎖として表現し、その定常分布を考える。そして、揺らぎの効果をゼロとした極限の定常分布において正の確率を持つ状態を確率的に安定的な状態と呼ぶ。

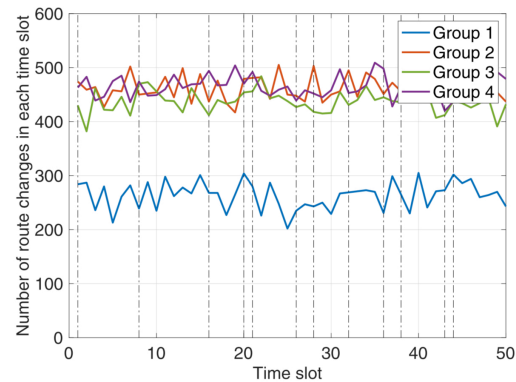
ここでは、前節で想定した二つのダイナミクスに揺らぎを加えた perturbed better response ダイナミクスと perturbed 最適応答ダイナミクスを考える。Perturbed 最適応答ダイナミクスは、交通分野では馴染みの深い logit 型のものも特殊ケースとして含む。

確率的安定性分析の分野で有名な Young の定理⁶⁸によれば、揺らぎのあるダイナミクスの確率的安定状態は、揺らぎの効果をゼロとしたダイナミクスの停留点に含まれる。このことと前節の結果を合わせると、perturbed better response ダイナミクスの確率的安定状態は、better response ダイナミクスの停留点に含まれる。また、DUE ゲーム (より一般的には WAG) ではこの停留点が Nash 均衡に対応するため、次の結論が得られる：単一方向ネットワークの DUE ゲームにおいて perturbed better response ダイナミクスを考えたとき、確率的に安定な Nash 均衡が必ず存在する。一方、WAG では、perturbed 最適応答ダイナミクスの確率的安定状態は、最適応答ダイナミクスの停留点に含まれる⁷¹。DUE ゲームではこの停留点である狭義 Nash 均衡の存在を一般に保証できないため、確率的に安定な Nash 均衡が存在することも保証できない。

図-10 は、perturbed better response ダイナミクスと logit response ダイナミクスの数値計算例である (詳細な計算条件は Satsukawa et al.²⁶ を参照)。この図は、一



(a) Perturbed better response dynamics



(b) Logit response dynamics

図-10 調整ダイナミクスの数値計算例²⁶⁾

定期間毎に経路変更が行われた回数を集計し、その推移を車両配分順序が早い順に 4 つに分けた車両グループ毎に表したものである。どのグループも経路選択の変更がない (矢印で示された) 部分が、Nash 均衡状態が達成されている期間であり、縦の点線は利用者が誤った選択 (ミス) を行なったタイミングを示す。

この図には、DUE 状態に至る調整ダイナミクスの様々な特徴が見られる。まずは、上図の perturbed better response ダイナミクスの結果を見ていこう。この図からは、Nash 均衡状態でないミスのない期間では、車両順序の早いグループから経路変更回数がゼロへと収束していく様子が見てとれる。これは、以下のように説明できる。渋滞したネットワークでは、因果律と FIFO から、ある車両の経路変更はより配分順序の遅い車両の経路旅行時間に影響を及ぼす。この時間的に非対称な相互作用のため、配分順序の早い車両が事後的な最適応答経路を早い段階で選択しやすい。さらに、こうした利用者が一度最適応答経路を選択すると、better response ではミスのない限り経路変更を行うことはない。そのため、ほとんど単調に Nash 均衡へとダイナミクスが収束していく。ミスによる攪乱の影響の度合いは様々である。例えば、すぐに Nash 均衡に戻るケースは、他の車両への影響力の小さい車両順序の遅い車両がミスを

²⁰ 流体モデルのように DUE 配分状態で必ず通常の FIFO 原則が成り立つとき、利用される全ての経路で DP 原理が成立する⁴⁷⁾。

したと推察することができる。逆に、影響度が大きいケースでは、車両順序の早い車両がミスが、順序のより遅い多数の車両の雪崩的な経路変更につながったと考えられる。

次に、下図の logit response ダイナミクスの結果を見てみよう。この図でも、最も早い順序を持つグループが経路変更の回数が相対的に少ない。これは、上述した時間的に非対称な相互作用のためである。しかし、上記と異なり、ミスのない期間でも、経路変更回数が減っていく様子は見られない。その理由は、複数の最適応答経路間の経路変更が許されている logit response では、その変更があたかもミスと同じような攪乱として働き、かつ、雪崩的な経路変更を誘発したためである。

以上の数値計算結果は、理論から考察した“現在状況から利得を厳密に改善する”という行動変更ルールの重要性を改めて示唆するものである。適切な車両配分順序の存在するネットワークでさえ、一度のミスで Nash 均衡から大きく乖離してしまうという結果は、動的な交通流の持つ時間的に非対称な相互作用 (i.e., 外部性の非対称性⁷²⁾) の調整過程への影響の大きさを物語っている。従って、こうした動的なネットワーク交通流をより安定化させるためには、better response 以上に現状に対する慣性力を働かせる強力な行動ルールが必要であると言えるであろう。

e) DSO 配分の確率的安定性

以上のような、粒子モデルによる調整過程の収束性や確率的安定性の解析は、DSO 配分問題に対しても有効である。佐津川・和田・Watling^{73,74)}では、多起点多終点の一般ネットワークにおける DSO 配分を限界費用課金下における DUE ゲーム (DSO ゲームと呼ぶ) として定式化し、その確率安定性解析を行っている。ここでは、DSO ゲームがポテンシャル・ゲーム⁷⁵⁾であることを利用し²¹⁾、logit response ダイナミクスの下では、総交通費用を最小化する状態 (狭義の DSO 配分状態) が確率安定状態であることを示している。DUE 配分の安定性との対比で興味深いのは、DSO 配分では better response ダイナミクスよりも最適応答ダイナミクス、あるいは、それに揺らぎを導入した logit response ダイナミクスの方が望ましい結果が得られるという点である。これは、DSO 配分問題においては、一旦均衡に到達してもそこから逸脱しようという性質が、極小点 (広義の DSO 配分状態) から抜け出せるという意味でプラスに働いているためであると考えられる。

(2) 流体モデル

a) DUE 配分の一意性

Iryo and Smith²⁷⁾による均衡解の一意性の証明は、おおそ、次のような二つのステップに分けられる。第一のステップは、フローが流れているリンクや渋滞しているリンクの空間パターン (以降、渋滞パターンと呼ぶ) を与件として、均衡フローや均衡旅行時間が一意であるかを調べるものである。第二のステップは、渋滞パターンの遷移が一意であるかを調べるものである。第二のステップはかなり煩雑であるため、以降では第一ステップの概要を説明する。

渋滞パターンを与件とした DUE 配分モデルの均衡解の解析は、(Iryo and Smith とはやや方法は異なるが) 赤松ら^{13),14),15),16)}による一連の研究まで遡ることができる。これらの研究は、渋滞パターンを与件とすることにより、相補性問題や変分不等式問題として定式化される DUE 配分モデルが (線形) 方程式系に帰着し、解析解が求まることに着目している。ここでは、その例を単一起点ネットワークの DUE 配分モデルにより見てみよう。

まずは、全てのリンクでフローおよび待ち行列が存在する状況を考える。3. の流体モデルのパートでも見たように、このとき、旅行時間関数と経路選択に関する相補性条件が等式条件となる。そして、それらを連立すると、

$$y_{ij}(s) = \mu_{ij}\tau_j(s) \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}(s) = -(\mathbf{MA}^T)\dot{\tau}(s) \quad (26)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{A}_- \equiv \mathbf{A} - \mathbf{A}_+$ である。この式をフロー保存則 (11b) に代入すると、

$$(\mathbf{AMA}^T)\dot{\tau}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s) \quad (27)$$

が得られる。行列 \mathbf{AMA}^T のランクは、冗長となる起点でのフロー保存則を除いた定式化においては、フルランクであることが示されている¹³⁾。従って、行列 \mathbf{AMA}^T は逆行列を持ち、均衡解が唯一に定まる。

$$\dot{\tau}(s) = (\mathbf{AMA}^T)^{-1}\dot{\mathbf{Q}}(s) \quad (28)$$

$$\mathbf{y}(s) = -(\mathbf{MA}^T)(\mathbf{AMA}^T)^{-1}\dot{\mathbf{Q}}(s) \quad (29)$$

より正確に言えば、均衡旅行時間および均衡フローともに唯一である。

以上の流れを非渋滞リンクも含む渋滞パターンに適用するための適切なネットワークの縮約方法も整備されている¹⁶⁾。具体的には、図-11のように、フローが存在する非渋滞リンクの起点と終点を一つのノードとしてまとめることにより、縮約ネットワークを構築する。この縮約ネットワークもまた渋滞リンクのみのネットワークであるため、この縮約ネットワーク上で新たに定式化された DUE 配分モデルは上記とほぼ同じ要領で

²¹⁾ 先のノードポテンシャルとは意味が異なることに注意。

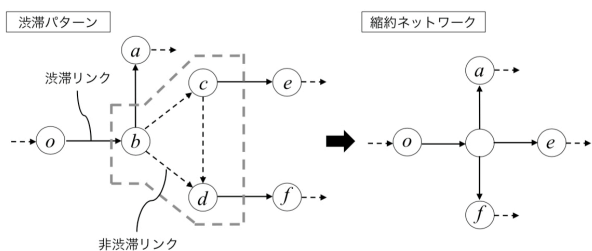


図-11 縮約ネットワークの構築例³⁰⁾

均衡解を解析的に求めることができる。非渋滞リンクを縮約をする理由は、非渋滞リンクの交通流率が渋滞リンクの交通流率の従属変数となり、ランク落ちが発生してしまうためである。この場合には、均衡旅行時間および渋滞リンクの均衡フローは唯一であるが、非渋滞リンクのフローの一意性は保証されない¹⁶⁾。

以上は、単一起点ネットワークのみに限った解析であるが、Iryo and Smith²⁷⁾では、ノードポテンシャル関数を使うことで、より一般的な単一方向ネットワークを扱っている。ただしここでも、類似のネットワークの縮約法を用いて、DUE 配分モデルを線形方程式系に帰着させるというアプローチが取られている。そして、均衡旅行時間および渋滞リンクのフローが唯一に決まる、という結論を導いている。

b) 渋滞パターンとネットワーク性能

以上のような渋滞パターンを与件とした DUE 配分の解析を、道路ネットワークのスループット解析に応用したのが本稿執筆のきっかけとなった和田・佐津川³⁰⁾である。この研究では、ネットワーク性能を捉える指標として近年定着しつつある MFD²⁹⁾の形状と渋滞パターンには一定の関係があるとの実証的知見^{76),77),78)}に注目し、その関係の背後にあるメカニズムを理論的に考察している。

より具体的には、MFD は、あるエリアのネットワークのスループットをエリア車両存在台数の関数として表すものである。車両台数一定（周期境界条件）下の DUE 配分を考える。さらに、観測により渋滞パターンが与えられているとして、ネットワークを流れうるスループット（OD 交通流率 or 終点の流出交通流率）を求めるとするのがここでのアイデアである。これは、DUE 配分の一種の逆解析に相当する。

一定の仮定のもとでは、周期境界条件は $\tau_d = 1, \forall d$ と表現でき、式 (27) と連立すれば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-}^T & \mathbf{A}_{d-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau}_i(s) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。ここでは、行列・ベクトルを、終点とそれ以外のノードを区別したブロック行列で式を表現している。また、この問題では未知変数となる OD 交通流率

$\hat{\mathbf{Q}}(s)$ はスループットの意味で \mathbf{F} としている。さらに、 (\mathbf{A}, \mathbf{M}) は、オリジナルのネットワークではなく、渋滞パターンに基づき縮約されたネットワークの構造を表す。この方程式を解くことで、終点別のスループットが下記のように求まる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T - (\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T) (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T)^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T) \quad (31)$$

この式のより、ネットワークにおけるスループットは、ボトルネック同士の相互依存関係を抽出した縮約ネットワーク構造により特徴づけられることがわかる。また、この解析式の感度分析から、スループットの低下メカニズム、ネットワーク全体の性能を改善する容量調整手法等についても考察が行われている³¹⁾。

5. おわりに

本稿では、粒子・流体という車両の取り扱いが異なる二種類の動的利用者均衡配分モデルのラグランジュ座標系に基づく定式化、解析、性質について議論した。**1.**では、DUE 配分モデルの解析アプローチを、前提とする座標系の違いで分類し、その特徴について議論を行った。**2.**においては、通常均衡配分で要求されるフローの経路配分と旅行時間の相互作用を粒子モデルにおいては分解することができ、均衡解の計算という観点で優位性があることを明らかにした。**3.**では、単一終点ネットワークを対象として、交通の流れの向きとは逆に遡って定式化・解析する際に障壁として現れる動的な交通流の特性を示した。**4.**では、ラグランジュ座標系で解析可能な現時点での最も広いクラスである、単一方向ネットワークで明らかにされている均衡解の数理特性について解説を行った。

本稿を通じて見たように、粒子・流体モデルは各々得意とする場面がある。組合せ論的/アルゴリズム的なアプローチとも言える粒子モデルは、計算という側面で利点があるだけでなく、同様の側面を持つゲーム理論との親和性も高いと考えられる。より複雑な情報構造や学習メカニズムの導入⁷⁹⁾、ゲーム論的な分散制御^{80),81)}などの方向でのさらなる発展が見込まれる。

一方、解析的なアプローチである流体モデルは、元来、数理計画分野と親和性が高く、その方面での発展と並行して DUE 配分モデルの新たな数理構造の理解につながる可能性がある。その一つの例として、著者も含めたグループでは、最適輸送理論の動的配分への応用を進めている^{82),46)}。また、交通制御・管理への応用も流体モデルの得意とするところであろう^{30),31),83)}。Mobility-as-a-Service (MaaS) や自動運転といった交通分野の革新的技術を、交通ネットワークひいては交通システム性能の飛躍的な向上に繋げるための研究も求められる。

謝辞: 本招待論文を執筆する機会を与えていただいた土木計画学研究委員会に心から感謝いたします。

論文奨励賞の受賞論文「動的配分理論による道路ネットワークの交通性能解析」は、東北大学 佐津川功季 助教との共同研究の一部です。本稿で紹介した研究の多くが、佐津川氏との数えきれない議論の中から生まれたものであり、この場を借りて感謝の意を表します。東北大学 赤松隆教授には、著者の博士課程在籍時に、受賞対象研究の着想に関わる示唆をいただくとともに、これまでの共同研究を通じて数多くのご教示をいただきました。また、東北大学 桑原雅夫教授、井料隆雅教授、東京大学 大口敬教授、岐阜大学 宮城俊彦特任教授、東北大学 長江剛志准教授、金沢大学 高山雄貴准教授、京都大学 大澤実 助教をはじめ、多くの方々から本稿に関わる研究について貴重な意見・助言をいただきました。ここに記して感謝を申し上げます。

参考文献

- Heydecker, B. G. and Addison, J. D.: An exact expression of dynamic traffic equilibrium, *Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by J. B. Lesort), pp. 359–384, Pergamon-Elsevier, Lyon, 1996.
- Daganzo, C. F.: Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.4, pp.277–286, 1995.
- Wardrop, J. G.: Some theoretical aspects of road traffic research, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol.1, No.3, pp.325–362, 1952.
- 松井寛: 交通ネットワーク均衡分析—最新の理論と解法—, 土木学会, 1998.
- 赤松隆, 和田健太郎: 動的な交通ネットワーク流問題, 第26回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 31–46, 2014.
- 和田健太郎, 瀬尾亨, 中西航, 佐津川功季, 柳原正実: Kinematic wave 理論の近年の発展: 変分理論とネットワーク拡張, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.5, pp.L1139–L1158, 2017.
- Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Flow Theory* (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Elsevier, Berkeley, California, 1993.
- 赤松隆, 桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 OD ペアの場合—, 土木学会論文集, No.488/IV-23, pp.21–30, 1994.
- 赤松隆: 交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論, 土木計画学研究・論文集, Vol. 13, pp. 23–48, 1996.
- 桑原雅夫: ネットワーク交通流の動的な解析—待ち行列モデルの応用, 土木計画学研究・論文集, Vol.16, pp.1–17, 1999.
- 桑原雅夫: 交通流理論—流れの時空間変化をひも解く, 交通工学研究会, 2020.
- 桑原雅夫, 赤松隆: 動的ネットワーク解析—これまでの知見とこれからの展望—, 土木学会論文集, No.653/IV-48, pp.3–16, 2000.
- 赤松隆, 高松望: 動的な交通ネットワーク・フローと OD 構造の関係に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.618/IV-43, pp.39–51, 1999.
- Akamatsu, T.: A dynamic traffic equilibrium assignment paradox, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.34, No.6, pp.515–531, 2000.
- Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks, *Transportation Science*, Vol.37, No.2, pp.123–138, 2003.
- Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes: Analysis of non-saturated networks, Working Paper, Tohoku University, 2003.
- Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
- Akamatsu, T. and Kuwahara, M.: A capacity increasing paradox for a dynamic traffic assignment with departure time choice, *Proceedings of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by A. Ceder), pp. 301–324, Pergamon, Jerusalem, 1999.
- 井料隆雅: 利用者均衡配分問題へのゲーム理論的アプローチと動的均衡配分問題への応用, 土木計画学研究・論文集, Vol.26, pp.469–473, 2009.
- Iryo, T.: On the existence of pure Nash equilibrium in dynamic traffic assignments, *New Developments in Transport Planning: Advances in Dynamic Transport Assignment* (Ed. by C. M. Tampere, F. Viti, and L. H. B. Immers), pp. 73–87, Edward Elgar, 2010.
- Daganzo, C. F.: On the variational theory of traffic flow: well-posedness, duality and applications, *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.1, No.4, pp.601–619, 2006.
- Laval, J. A. and Leclercq, L.: The Hamilton–Jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.52, pp.17–30, 2013.
- Waller, S. T. and Ziliaskopoulos, A. K.: A combinatorial user optimal dynamic traffic assignment algorithm, *Annals of Operations Research*, Vol.144, No.1, pp.249–261, 2006.
- 井料隆雅: 車両を離散化した動的な交通量配分問題の Nash 均衡解の解法, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
- 佐津川功季, 和田健太郎: 単一終点ネットワークにおける動的な交通量配分問題の Nash 均衡解の解法について, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.1, pp.103–108, 2017.
- Satsukawa, K., Wada, K. and Iryo, T.: Stochastic stability of dynamic user equilibrium in unidirectional networks: Weakly acyclic game approach, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.125, pp.229–247, 2019.
- Iryo, T. and Smith, M. J.: On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.757–773, 2018.
- 長江剛志, 赤松隆, 清水廉, 符皓然: 経路・出発時刻同時選択型の動的利用者均衡配分の求解法: 二次計画問題アプローチ, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.76, No.3, pp.264–281, 2020.
- Daganzo, C. F.: Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.41, No.1, pp.49–62, 2007.
- 和田健太郎, 佐津川功季: 動的配分理論による道路ネットワークの交通性能解析, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.1, pp.56–72, 2017.
- Wada, K., Satsukawa, K., Smith, M. and Akamatsu, T.: Network throughput under dynamic user equilibrium: Queue spillback, paradox and traffic control, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.126, pp.391–413, 2019.

- 32) Pang, J.-S. and Stewart, D. E.: Differential variational inequalities, *Mathematical Programming*, Vol.113, No.2, pp.345–424, 2008.
- 33) Friesz, T. L. and Han, K.: The mathematical foundations of dynamic user equilibrium, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.126, pp.309–328, 2019.
- 34) Han, K., Eve, G. and Friesz, T. L.: Computing dynamic user equilibria on large-scale networks with software implementation, *Networks and Spatial Economics*, pp. 1–34, 2019.
- 35) Han, K., Friesz, T. L., Szeto, W. and Liu, H.: Elastic demand dynamic network user equilibrium: Formulation, existence and computation, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, pp.183–209, 2015.
- 36) Iryo, T.: Properties of dynamic user equilibrium solution: existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology, *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, Vol.1, No.1, pp.52–67, 2013.
- 37) Szeto, W. Y. and Wong, S. C.: Dynamic traffic assignment: model classifications and recent advances in travel choice principles, *Central European Journal of Engineering*, Vol.2, No.1, pp.1–18, 2011.
- 38) Wang, Y., Szeto, W., Han, K. and Friesz, T. L.: Dynamic traffic assignment: A review of the methodological advances for environmentally sustainable road transportation applications, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.111, pp.370–394, 2018.
- 39) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, *American Economic Review*, Vol.59, No.2, pp.251–260, 1969.
- 40) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model, *Transportation Science*, Vol.15, No.1, pp.62–77, 1981.
- 41) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak, *Transportation Science*, Vol.24, No.3, pp.217–229, 1990.
- 42) 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫: 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的解析, 土木学会論文集, No.779/IV-66, pp.105–118, 2005.
- 43) Iryo, T. and Yoshii, T.: Equivalent optimization problem for finding equilibrium in the bottleneck model with departure time choices, *Selected Proceedings of the 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport* (Ed. by B. Heydecker), pp. 231–244, Emerald, London, 2007.
- 44) Akamatsu, T., Wada, K. and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, pp.808–829, 2015.
- 45) Fu, H., Satsukawa, K., Akamatsu, T. and Wada, K.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum versus equilibrium, *Working Paper*, 2020.
- 46) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T. and Hayashi, S.: A new look at departure time choice equilibrium models with heterogeneous users, *arXiv:2009.11037*, 2020.
- 47) Dean, B. C.: Shortest paths in FIFO time-dependent networks: Theory and algorithms, Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- 48) Lighthill, M. J. and Whitham, G. B.: On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol.229, No.1178, pp.317–345, 1955.
- 49) Richards, P. I.: Shock waves on the highway, *Operations Research*, Vol.4, No.1, pp.42–51, 1956.
- 50) Newell, G. F.: A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I: General theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.27, No.4, pp.281–287, 1993.
- 51) Newell, G. F.: A simplified car-following theory: a lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.
- 52) Wada, K., Martínez, I. and Jin, W.-L.: Continuum car-following model of capacity drop at sag and tunnel bottlenecks, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.113, pp.260–276, 2020.
- 53) Smits, E.-S., Bliemer, M. C., Pel, A. J. and van Arem, B.: A family of macroscopic node models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.74, pp.20–39, 2015.
- 54) Ban, X. J., Pang, J.-S., Liu, H. X. and Ma, R.: Continuous-time point-queue models in dynamic network loading, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.3, pp.360–380, 2012.
- 55) Facchinei, F. and Pang, J.: *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, 2003.
- 56) Hayashi, S., Yamashita, N. and Fukushima, M.: A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.15, No.2, pp.593–615, 2005.
- 57) 林俊介: ReSNAの手引き, オペレーションズ・リサーチ, Vol.59, No.12, pp.716–724, 2014.
- 58) 桑原雅夫: 渋滞したネットワークにおける動的均衡配分に関する考察, 土木学会論文集, No.419/IV-13, pp.123–126, 1990.
- 59) Mounce, R.: Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.9, pp.779–791, 2006.
- 60) Smith, M. and Ghali, M.: Dynamic traffic assignment and dynamic traffic control, *Proceedings of the Eleventh International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by M. Koshi), pp. 273–290, Elsevier, New York, 1990.
- 61) Smith, M. J. and Wisten, M. B.: A continuous day-to-day traffic assignment model and the existence of a continuous dynamic user equilibrium, *Annals of Operations Research*, Vol.60, No.1, pp.59–79, 1995.
- 62) Mounce, R.: Existence of equilibrium in a continuous dynamic queueing model for traffic networks, *Mathematics in Transport: Selected Proceedings of the 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport* (Ed. by B. G. Heydecker), pp. 219–229, Elsevier, 2007.
- 63) Iryo, T.: Multiple equilibria in a dynamic traffic network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.6, pp.867–879, 2011.
- 64) Iryo, T.: Investigating factors for existence of multiple equilibria in dynamic traffic network, *Networks and Spatial Economics*, Vol.15, No.3, pp.599–616, 2015.
- 65) Beckmann, M., McGuire, C. B. and Winsten, C. B.: *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, 1956.
- 66) 和田健太郎: 交通ネットワーク流の安定性と制御, 計測と制御, Vol.55, No.4, pp.368–375, 2016.
- 67) Smith, M. J.: The stability of a dynamic model of traffic assignment—An application of a method of Lyapunov, *Transportation Science*, Vol.18, No.3, pp.245–252, 1984.
- 68) Young, H. P.: The evolution of conventions, *Econometrica*, Vol.61, No.1, pp.57–84, 1993.
- 69) Marden, J. R., Young, H. P., Arslan, G. and Shamma, J. S.: Payoff-based dynamics for multiplayer weakly acyclic games, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol.48, No.1, pp.373–396, 2009.
- 70) Blume, L. E.: The statistical mechanics of strategic interaction, *Games and Economic Behavior*, Vol.5, No.3, pp.387–424, 1993.

- 71) Alós-Ferrer, C. and Netzer, N.: On the convergence of logit-response to (strict) Nash equilibria, *Economic Theory Bulletin*, Vol.5, No.1, pp.1–8, 2017.
- 72) Kuwahara, M.: A theory and implications on dynamic marginal cost, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol.41, No.7, pp.627–643, 2007.
- 73) 佐津川功季, 和田健太郎: ポテンシャル・ゲームに基づく動的システム最適配分の確率安定性解析, 土木計画学研究・講演集, Vol.62, 46-10 (CD-ROM), 2020.
- 74) Satsukawa, K., Wada, K. and Watling, D.: Dynamic system optimal traffic assignment with atomic users: Convergence and stability, *arXiv:2101.00116*, 2021.
- 75) Monderer, D. and Shapley, L. S.: Potential games, *Games and Economic Behavior*, Vol.14, No.1, pp.124–143, 1996.
- 76) Geroliminis, N. and Sun, J.: Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.3, pp.605–617, 2011.
- 77) 王鵬飛, 和田健太郎, 赤松隆, 杉田正俊, 名古屋利一, 鷺見浩: 長期間観測データを用いた Macroscopic Fundamental Diagram の特徴づけ: 仙台市および京都市におけるケース・スタディ, 交通工学論文集, Vol.2, No.5, pp.11–20, 2016.
- 78) 酒井高良, 赤松隆: 首都圏高速道路網における渋滞パターンと Macroscopic Fundamental Diagram の安定性, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.75, No.2, pp.97–108, 2019.
- 79) Miyagi, T., Peque, G. and Fukumoto, J.: Adaptive learning algorithms for traffic games with naive users, *Proceedings of the 20th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (Ed. by S. P. Hoogendoorn, V. L. Knoop, and H. van Lint), pp. 806–817, Elsevier B.V., 2013.
- 80) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: An auction mechanism with day-to-day capacity control, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol.60, pp.94–112, 2013.
- 81) Marden, J. R. and Shamma, J. S.: Game Theory and Distributed Control, *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Vol. 4, pp. 861–899, Elsevier B.V., 2015.
- 82) Osawa, M., Fu, H. and Akamatsu, T.: First-best dynamic assignment of commuters with endogenous heterogeneities in a corridor network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.811–831, 2018.
- 83) Akamatsu, T. and Wada, K.: Tradable network permits: A new scheme for the most efficient use of network capacity, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.79, pp.178–195, 2017.

(Received December 18, 2020)

(Accepted December 18, 2020)

RECENT ADVANCES IN THEORY OF DYNAMIC TRAFFIC EQUILIBRIUM ASSIGNMENTS

Kentaro WADA

This paper reviews the recent advances in the theory of dynamic traffic equilibrium assignment problems. We mainly discuss a Lagrange coordinate system approach enabling us to analyze the complex network traffic flows transparently. Two types of description of traffic within the approach—traditional fluid approximation models and emergent atomic/particle models—are explained in comparison. Based on the features and relationships of each model and the results on the mathematical properties of equilibrium solutions, the direction of future developments utilizing the superiority of both models is briefly discussed.