

# 需要分布を内生化したタンデムボトルネックにおける出発時刻選択均衡

板橋 昂汰<sup>1</sup>・和田 健太郎<sup>2</sup>

<sup>1</sup>非会員 筑波大学大学院 システム情報工学研究群 社会工学学位プログラム (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)  
E-mail: s2120407@s.tsukuba.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 筑波大学准教授 システム情報系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)  
E-mail: wadaken@sk.tsukuba.ac.jp (Corresponding Author)

本研究は、ネットワークへの需要分布が上位選択（交通モード選択や住宅立地選択等）により内生化された、タンデムボトルネック・ネットワークにおける出発時刻選択問題の特性を理論的に考察する。具体的にはまず、上位選択に制約のない単純な同時選択均衡を考え、2つのボトルネックに限定した均衡状態パターン（どの地点で需要・渋滞が発生するか）が上位選択固有の費用（効用）差、隣接ボトルネックの容量比によって分類できることを示す。そして、このパターン分類が、一般的なボトルネック数の問題や上位選択に制約を加えた問題の分類にも有用であることを明らかにする。また、均衡状態と社会的最適状態との関係についても議論を行う。

**Key Words:** tandem bottleneck, departure time choice, mode choice, simultaneous equilibrium, social optimal

## 1. はじめに

Vickrey<sup>1)</sup> に始まる出発時刻選択均衡モデルは、交通渋滞の主要因である需要の時間集中のメカニズムを記述でき、また、交通需要を時間的に平滑化する TDM (Transportation Demand Management) を評価する理論基盤として、長年に渡って研究が進められてきている<sup>2),3)</sup>。これらの研究は、単一ボトルネックを対象として始まり、1つの重要な拡張の方向として、複数のボトルネックの相互作用が生じるタンデム（直列）ボトルネック・ネットワークへと拡張がなされている。

Kuwahara<sup>4)</sup> は、2つのボトルネックを持つタンデムボトルネック・ネットワークにおける出発時刻選択均衡を初めて分析し、上流のボトルネックを通過するか否かで下流ボトルネックにおけるサービス優先度が異なることを明らかにしている。Arnott et al.<sup>5)</sup> は、同様のケースを分析し、上流ボトルネックの容量増強により、ネットワーク全体の総交通費用が増加する「容量増強パラドクス」が生じうることを示している。吉年・赤松<sup>6)</sup> は、ボトルネック通行権取引制度によるパレート改善の可能性を分析している。また、Akamatsu et al.<sup>7)</sup> は、2つのボトルネックに限定されていた上記のモデルを、一般的な数のボトルネックに拡張し、均衡解の存在や唯一性といったモデルの数理特性について明らかにしている。近年では、その解析解や社会的最適状態との関係についても知見が得られている (Fu et al.<sup>8)</sup>)。

しかし、以上の研究は、いずれも空間的な需要分布

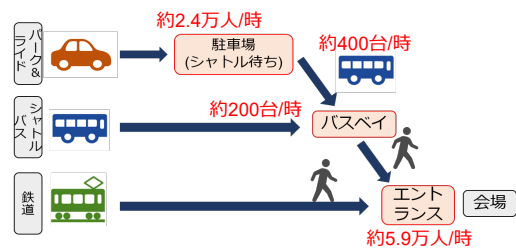


図-1 大阪・関西万博におけるネットワーク (文献<sup>11)</sup> に基づき著者が作成)

(どのくらいの需要がどの地点のボトルネックから合流してくるか) は外生的に与えられている。これに対して、高山・赤松<sup>9)</sup> は、需要分布が住宅立地選択で内生的に記述されるとする、住宅立地・出発時刻の同時選択均衡問題を分析している。下位選択（出発時刻選択）均衡については理論的な結果が得られているものの、同時均衡状態に関しては数値的に分析するに留まっている。また、Osawa et al.<sup>10)</sup> では、需要分布を決定する上位選択が、住宅立地・職業選択の同時選択による状況を考え、社会的最適状態を分析している。この研究では、社会的に最適な出発時刻選択状態のみならず、全ての選択を考慮した最適状態についても様々な理論特性を明らかにしている。

以上のように、需要分布を内生化したタンデムボトルネック問題は、出発時刻選択とその他の上位選択との相互作用を分析する枠組みとして有用である。しかし、現時点では、出発時刻選択と需要分布を決定する上位選択との同時“均衡状態”の特性については、十分

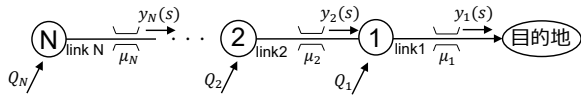


図-2 対象ネットワーク

には明らかになっていない。なお、上位選択は立地選択に限定されるものではなく、大規模イベントにおける交通モード選択としても解釈できると考えられる。具体的には、大規模イベントでは、様々な交通モードで膨大な来場者が到着し、それらが会場周辺でエントランスに向けて合流していき、また、それぞれの合流地点は、交通容量上のボトルネックになりうる。その一例が、2025年に大阪・夢洲で開催予定の2025日本国際博覧会（大阪・関西万博）における会場周辺の交通状況（図-1）である。モードとしては、①自動車+バス（パーク&ライド）②主要駅・空港からシャトルバス③鉄道の主に3つのモードがあり、それぞれの需要が合流する地点では、様々なボトルネックが発生すると予想される。

本研究は、需要分布が内生化されたタンデムボトルネックにおける出発時刻選択問題の均衡状態の特性を理論的に考察する。具体的には、まず、上位選択に制約のない単純な同時選択均衡を考え、2つのボトルネックに限定した均衡状態パターン（どの地点で需要・渋滞が発生するか）が上位選択固有の費用（効用）差、隣接ボトルネックの容量比によって分類できることを理論的に示す。そして、この均衡状態パターン分類が、一般的なボトルネック数の問題や上位選択に制約を加えた問題の分類にも利用可能であることを明らかにする。また、均衡状態と社会的最適状態との関係についても議論を行う。

## 2. モデル

### (1) 状況設定

本研究では、図-2に示すような $N$ 個のノードを持つネットワークを考える。このネットワーク上のノード $i$ は、モード $i$ の利用者の合流地点（あるいは、需要の湧き出し点）を表す。リンク $i$ の終端には、それぞれ容量 $\mu_i$ を持つボトルネック $i$ が存在する。いずれのボトルネックも、First-In-First-Out (FIFO)原則を満たし、発生した待ち行列はpoint queueモデルで表現できると仮定する。また、各ノード間を移動する自由旅行時間は、一般性を失うことなく0とする。

利用者は、いずれかのモードを利用して（i.e., いずれかのノードを経由して）このネットワークに流入し、ラッシュ時間帯に唯一の目的地に到着する。利用者は

同質かつその総数は $Q$ であり、各利用者は自身の移動コストが最小となるようなモード $i$ と目的地到着時刻 $s$ を選択するとする。利用者の移動コスト $C_i(s)$ は、ボトルネックにおける渋滞遅れ $w_i(s)$ 、（全員共通の）希望到着時刻 $t_w$ と実際の到着時刻の乖離に応じて生じるスケジュール費用 $d(s)$ 、モード固有のコスト $f_i$ から構成される。つまり、利用者の移動コスト最小化問題は、

$$\min_{i,s} C_i(s) = \alpha \sum_{j \leq i} w_j(s) + d(s) + f_i \quad (1)$$

ここで、 $\alpha$ は時間を金銭的費用に換算するための係数である。スケジュール費用関数 $d(s)$ は、スケジュールとの乖離の凸関数であり、区分的に微分可能、乖離がゼロのとき最小値0をとるとする。モード固有コストはモード利用者数に依存しないと仮定する（i.e., 定数）。つまり、モード固有のコストは料金等を表しており、そのコスト（や目的地付近でのボトルネック渋滞）に比べるとモード利用者数に依存した（例えば）混雑の影響は小さいと想定している（以降では、モード料金と呼ぶ）。

### (2) 均衡条件

均衡状態とは、どの利用者也自分だけが目的地到着時刻およびモードを変更しても、自らの移動コストを改善ができない（i.e., 選択変更のインセンティブが働かない）状態である。以上の設定の下、均衡条件は次の5つの条件で定式化できる。

第1の条件は、目的地到着時刻選択条件であり、次のように与えられる。

$$\begin{cases} \rho_i = \alpha \sum_{j \leq i} w_j(s) + d(s) & \text{if } q_i(s) > 0 \\ \rho_i \leq \alpha \sum_{j \leq i} w_j(s) + d(s) & \text{if } q_i(s) = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (2)$$

ここで、 $\rho_i$ はモード $i$ 利用者がネットワーク内で費やす最小（均衡）移動コスト、 $q_i(s)$ は時刻 $s$ に目的地に到着するモード $i$ 利用者の需要レート（以降、OD交通量と呼ぶ）である。

第2の条件は、OD交通量の保存則であり、モード $i$ の利用者総数を $Q_i$ とすれば、次のように与えられる。

$$Q_i = \int_s q_i(s) ds \quad \forall i \quad (3)$$

第3の条件は、待ち行列に関する条件である。いま、ボトルネック $i$ を通過し、目的地に時刻 $s$ に到着するフローを $y_i(s) = \sum_{j \geq i} q_j(s)$ とすると、point queueモデルに基づく渋滞遅れ時間の条件は、以下となる（導出はAkamatsu et al.<sup>7)</sup>を参照）。

$$\begin{cases} y_i(s) = \mu_i \Delta \tau_{i-1}(s) & \text{if } w_i(s) > 0 \\ y_i(s) \leq \mu_i \Delta \tau_{i-1}(s) & \text{if } w_i(s) = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (4)$$

ここで、 $\tau_i(s) = s - \sum_{j \leq i} w_j(s)$ は目的地到着時刻 $s$ の利用者がボトルネック $i$ に到着する時刻、 $\Delta$ は時刻 $s$ につ

いての微分を表す。また、 $\tau_0(s) = s$ ,  $\Delta\tau_0(s) = 1$  である。

残りの2つの条件は、モード選択に関わる条件である。つまり、モード選択条件は、

$$\begin{cases} z = \rho_i + f_i & \text{if } Q_i > 0 \\ z \leq \rho_i + f_i & \text{if } Q_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $z$  は最小（均衡）移動コストである。また、総利用者数の保存則は、次のように与えられる。

$$\sum_i Q_i = Q \quad (6)$$

### (3) 均衡条件の簡略化

以上の均衡条件は、より簡単な条件へと帰着させることができる。具体的には、まず、 $q_i(s) > 0$  であれば、必ず  $Q_i > 0$  となるため、2種類の選択条件は、次の1つの選択条件へと集約することができる。

$$\begin{cases} z = C_i(s) & \text{if } q_i(s) > 0 \\ z \leq C_i(s) & \text{if } q_i(s) = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (7)$$

このとき、中間変数である  $Q_i$  (および  $\rho_i$ ) を明示的に考える必要はないため、式(3)を式(6)に代入すれば、

$$Q = \sum_i \int_s q_i(s) ds \quad \forall i \quad (8)$$

が得られる。つまり、最終的に均衡条件は、式(4)、(7)、(8)の3つの条件となる。次章で示すように、このような条件の集約化により、均衡状態を解析的に分類・解くことが可能となる。なお、これは、上位・下位選択問題を分解して解く高山・赤松<sup>9)</sup>とは異なるアプローチであるが、より複雑な上位問題（立地選択）を考えた際にもこのアプローチが有効であるか否かは自明ではない。

## 3. 均衡状態の分析

本章では、本稿のモデルの本質的な特性を把握するために、 $N = 2$  の状況を考える。まず、(1)節では、いくつかのモデルの基本特性について示す。それに基づき、(2)節では、均衡状態を解析的に分類する。この分類ができれば、均衡状態を解析的に求めることは容易である。本章最後の(3)節では、モード選択を考慮した本稿のモデルでは、Arnott et al.<sup>5)</sup> が示したような容量増強のパラドクスが生じないことを示す。なお、 $N \geq 3$  以上の場合については、次章で議論する。

### (1) 基本特性

本稿のモデルの大きな特徴は、同時刻  $s$  に目的地に到着する異なるモード利用者  $i, j$  ( $i < j$ ) のコスト差が、渋滞遅れ時間差、 $\alpha \sum_{k=i+1}^j w_k(s)$ 、とモード料金差、 $f_{ij} \equiv f_i - f_j$ 、で表せることである。つまり、 $N = 2$  のとき、

$$C_2(s) - C_1(s) = \alpha w_2(s) - f_{12} \quad (9)$$

である。この事実を用いると、以下に示すような均衡状態において成立するいくつかの基本特性が導かれる。

**補題 1.**  $f_{12} \leq 0$  のとき、全ての時刻  $s$  について  $w_2(s) = 0$  である。

**証明.** 証明は付録に示す（以降も同様である）。

つまり、この場合、 $C_2(s) \geq C_1(s)$  が常に成立しており、実質的に、下流ボトルネックのみを考慮した単一ボトルネック問題とみなせる。従って、このケースは、 $q_2(s) = 0, \forall s$  であるとして<sup>1)</sup>、以降の分類では用いる。

続いて、 $f_{12} > 0$  のときを考える。このとき、下記のような2つのケースが生じる<sup>2)</sup>。

$$\begin{cases} C_2(s) - C_1(s) < 0 & \Leftrightarrow \alpha w_2(s) < f_{12} (> 0) \\ C_2(s) - C_1(s) = 0 & \Leftrightarrow \alpha w_2(s) = f_{12} (> 0) \end{cases} \quad (10)$$

以降では、1つ目と2つ目のケースがどのような状況で生じるかを、均衡状態における時間の流れとともに見ていく。まず、目的地へ最初の利用者が到着するラッシュ時間帯の開始を  $s_1$  ( $< t_w$ ) とすると、それ以前  $s \leq s_1$  では渋滞は生じておらず、ケース1が成立している。 $s = s_1$  においてもケース1であるので、 $q_2(s) > 0, q_1(s) = 0$  の状態が生じる。このとき、 $z = C_2(s)$  を  $s$  について微分すると、

$$\Delta d(s) + \Delta(w_1(s) + w_2(s)) = 0 \quad (11)$$

である。これは、両方のボトルネックの渋滞遅れの和がスケジュール費用を相殺するように変化していくことを意味している。より具体的には、 $s \leq t_w$  [ $s > t_w$ ] のとき、スケジュール費用の変化率は負 [正] となるので、渋滞は増加 [減少] していく。

$q_2(s) > 0, q_1(s) = 0$  のとき、どのボトルネックで渋滞が生じるかは、両ボトルネック容量に依存する。 $y_1(s) = y_2(s) = q_2(s)$  であることと、渋滞遅れの条件(4)を用いると、

$$q_2(s) = \begin{cases} \mu_1 \leq \mu_2 \Delta\tau_1(s) & \text{if } w_1(s) > 0, w_2(s) = 0 \\ \mu_2 \Delta\tau_1(s) \leq \mu_1 & \text{if } w_1(s) = 0, w_2(s) > 0 \\ \mu_1 = \mu_2 \Delta\tau_1(s) & \text{if } w_1(s), w_2(s) > 0 \end{cases} \quad (12)$$

が得られる。まず、 $\Delta\tau_1(s) = 1 - \Delta w_1(s)$  であることを踏まえると、1行目が矛盾なく生じるためには、 $q_2(s) = \mu_1 \leq \mu_2 \{1 + \Delta d(s)\}$  である必要がある。これは、上流容量に比べて下流容量が極めて小さく、上流で渋滞が生じない ( $w_2(s) = 0$ ) ことを意味する。この状況がラッシュ開始直後に生じると、上下流の移動コスト差が縮

<sup>1)</sup>  $f_{12} = 0$  (従って、 $w_2(s) = 0$ ) のとき、 $C_2(s) = C_1(s)$  が常に成り立つので、上流で渋滞を起こさない範囲で、 $q_2(s) > 0$  とすることは可能である。

<sup>2)</sup>  $C_2(s) - C_1(s) > 0 \Leftrightarrow w_2(s) > 0$  も考えられる。しかし、条件(7)より  $q_2 = 0$  となるが、これは  $w_2(s) > 0 \Leftrightarrow q_2(s) > 0$  (条件(4)) であることと矛盾する。

まらない。さらに、スケジュール費用関数の凸性により、 $\Delta d(s)$  は非減少関数であるため、一旦この状況に陥るとその状態が継続することになり、ラッシュ時間を通してモード 1 の利用も生じないことになる（以下で示す、補題 2）。次に、2 行目に矛盾が生じない条件は、 $q_2(s) = \mu_2 \leq \mu_1$  である。この状況は  $w_2(s)$  の増加 [減少] とともに、上下流の移動コスト差が縮まって [広がって] いくことを意味する。最後に、3 行目に矛盾が生じない条件は、 $\Delta w_1(s) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}$  である。つまり、 $\mu_1 \leq \mu_2$  のとき、 $\Delta w_1(s) \geq 0$  を表し、 $\mu_1 > \mu_2$  のとき、 $\Delta w_1(s) < 0$  を表す。

ケース 2 は、ケース 1 を経て上下流の移動コスト差がなくなった (i.e.,  $\alpha w_2(s) = f_{12}$ ) 段階で生じる。このとき、渋滞遅れの条件 (4) より、

$$y_2(s) = q_2(s) = \mu_2 \Delta \tau_1(s) \quad (13)$$

であり、また、 $z = C_1(s)$  を時刻  $s$  について微分すると、

$$\Delta d(s) + \Delta w_1(s) = 0 \Leftrightarrow \Delta \tau_1(s) = 1 + \Delta d(s). \quad (14)$$

これは、 $w_1(s) > 0$  を意味する。従って、条件 (4) より、

$$y_1(s) = \mu_2(1 + \Delta d(s)) + q_1(s) = \mu_1$$

$$\Leftrightarrow q_1(s) = \mu_1 - \mu_2(1 + \Delta d(s)) \geq 0 \quad (15)$$

が得られる。つまり、移動コストが等しいとき、上流での渋滞遅れは一定値  $f_{12}$  になり、下流ではスケジュール費用を相殺するように渋滞遅れが生じる。また、このとき下流からの流入 (i.e., モード 1 の利用) があるためには、 $\mu_1 - \mu_2(1 + \Delta d(s)) \geq 0$  が満たされる必要がある。先にも述べたとおり、 $\Delta d(s)$  は非減少関数であり、また、 $s = t_w$  で符号が負から正へと反転する。これは、早着  $s \leq t_w$  でモード 1 が利用されていても、遅着  $s > t_w$  ではモード 1 が利用されなくなる可能性があることを示唆している。なお、このケースが満たされなくなると、ケース 1 に戻る (なぜなら、渋滞遅れ  $w_2(s) = f_{12}/\alpha$  は一瞬では 0 にはならないためである)。

以上をまとめると、両方のモードが利用される場合には、ケース 1 → ケース 2 → ケース 1 の遷移が生じ、上流のモード 2 のみが利用される場合は、ケース 1 のみが生じることになる。後者について、次の 3 つの補題が成立する。

**補題 2.**  $\mu_1/\mu_2 < 1 + \Delta d(s_1)$  のとき、全ての時刻  $s$  において、 $q_1(s) = 0, w_2(s) = 0$  である。

これは、先にも述べた、容量差の関係で  $w_2(s)$  に渋滞が生じず (作れず)、上下流の移動コスト差が縮まらないケースを表している。一方、以下の 2 つは、上下流の移動コストの差は縮まるが (i.e.,  $\mu_1/\mu_2 \geq 1 + \Delta d(s_1)$ )、料金差  $f_{12}$  が大きすぎるために、需要  $Q$  ではその差を埋められない状況についてのものである。

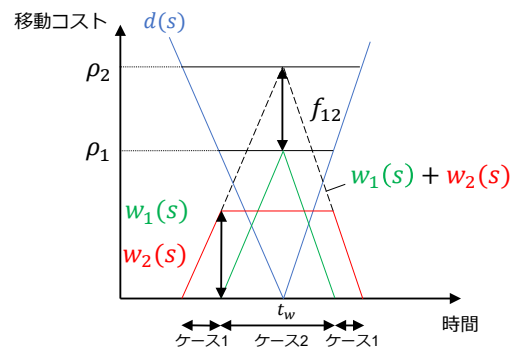


図-3 パターン 2(a) の費用関数

**補題 3.**  $\mu_1/\mu_2 \geq 1$  かつ  $f_{12} > g(Q/\mu_2)$  のとき、全ての時刻  $s$  において、 $q_1(s) = 0, w_1(s) = 0$  である。ただし、 $g(T)$  は  $d(s) = d(s + T)$  となる、スケジュール費用を表す関数である。

また、ここで、スケジュール費用関数として、次の区分線形関数を仮定する。

$$d(s) = \begin{cases} \beta(t_w - s) & \text{if } t_w - s \geq 0 \\ \gamma(s - t_w) & \text{if } t_w - s < 0 \end{cases} \quad (16)$$

ここで、 $\beta, \gamma$  は、それぞれ、早着・遅着に対する時間価値パラメータである。このとき、以下が成り立つ。

**補題 4.**  $\mu_1/\mu_2 < 1$  かつ

$$f_{12} > g(Q/\mu_1) - Q(\gamma/(\beta + \gamma))(1/\mu_1 - 1/\mu_2) \quad (17)$$

のとき、全ての時刻  $s$  において、 $q_1(s) = 0$  となる。また、ある時刻において  $w_1(s) > 0, w_2(s) > 0$  である。

## (2) 均衡状態の分類

### a) 解析的な結果

前節で見えてきた、均衡状態の基本特性を用いると、均衡状態は次の 6 パターンに解析的に分類することができる (ここでも、スケジュール費用関数は区分線形関数を仮定する)。

**パターン 1:**  $Q_2 = 0, w_2(s) = 0, \forall s$  (補題 1)

**パターン 2:**  $Q_1, Q_2 > 0$

(a)  $q_1(s) > 0, \exists s \geq t_w$

(b)  $q_1(s) = 0, \forall s \geq t_w$

**パターン 3:**  $Q_1 = 0$

(a)  $w_1(s) = 0, \forall s$  (補題 3)

(b)  $w_2(s) = 0, \forall s$  (補題 2)

(c)  $w_1(s), w_2(s) > 0, \exists s$  (補題 4)

パターンの大分類は、モードの利用パターンによる分類である。詳細な分類は、出発時刻選択に関わる条件による分類となっている。

より具体的には、パターン 2 は、早着・遅着ともにモード 1・2 の利用者が存在する、最も典型的なケース

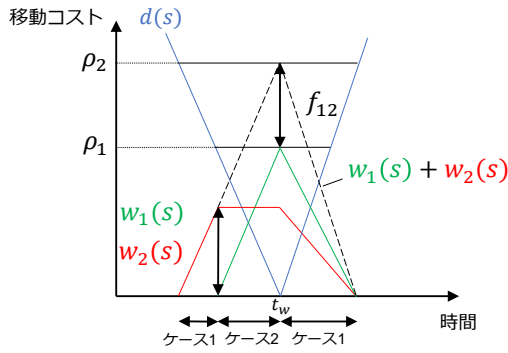


図-4-a  $\mu_1 > \mu_2$  の場合

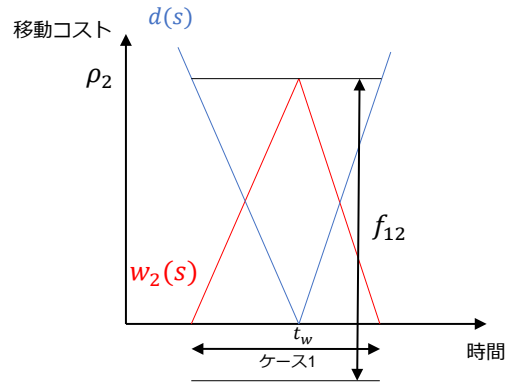


図-5 パターン 3(a) の費用関数

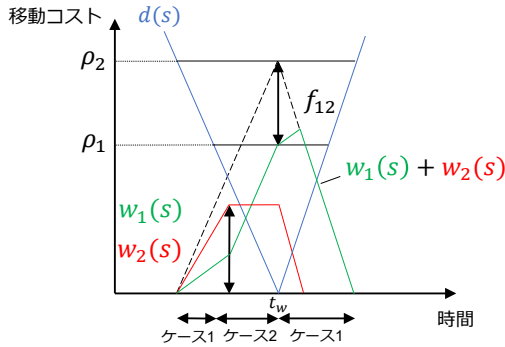


図-4-b  $\mu_1 \leq \mu_2$  の場合

図-4 パターン 2(b) の費用関数

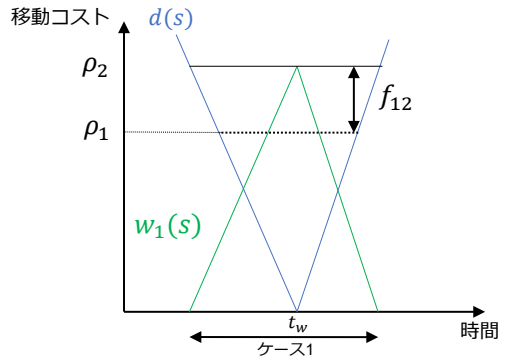


図-6 パターン 3(b) の費用関数

である。パターン 2(a) のときの均衡状態を図-3 の費用関数を用いて時系列に沿って説明すると、まず、ボトルネック 2 から渋滞が始まりスケジュール費用を相殺するように渋滞が増加していく（ケース 1，式 (12) の 2 行目）。次に、ある時点で上下流の移動コスト差がなくなり（i.e.,  $\alpha w_2(s) = f_{12}$ ），今度は、ボトルネック 1 の渋滞がスケジュール費用を相殺するように生じる（ケース 2）。また、この時間帯が  $\mu_1/\mu_2 \geq 1 + \Delta d(s)$  のとき、早着・遅着に渡って存在する。最後に、 $w_1(s) = 0$  となると、ボトルネック 2 の渋滞がスケジュール費用を相殺するように減少していく。この間、 $\alpha w_2(s) < f_{12}$  であり、 $q_1(s) = 0$  となる。一方、パターン 2(b) は、先に述べた、遅着の領域でモード 1 が利用されなくなるケースであり、容量比について、

$$1 - \beta \leq \mu_1/\mu_2 < 1 + \gamma \quad (18)$$

が成立している。このとき、図-4 の費用関数の  $s > t_w$  の範囲で、 $\alpha w_2(s) < f_{12}$  となる（ケース 1，式 (12) の 3 行目）。

以上の典型パターンとならず、 $Q_1 = 0$  の単一ボトルネック問題に帰着するのが、パターン 3 であり、補題 2-4 に対応する（ $Q_2 = 0$  の単一ボトルネック問題に帰着するパターン 1 は、先に述べた通り、補題 1 の場合

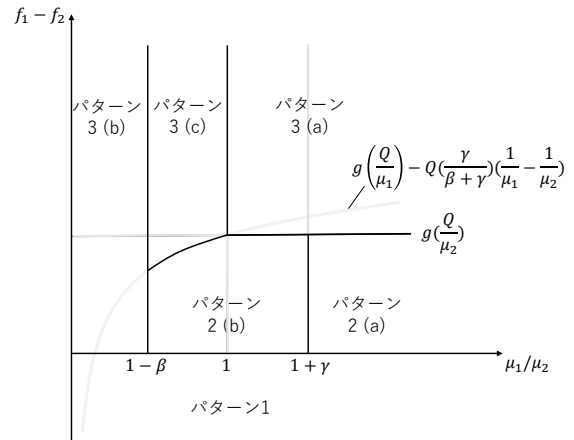


図-7 均衡状態パターン成立条件の領域

である）。図-5<sup>3</sup>、図-6 に示す費用関数は一見同じに見えるが、上下流のどこで渋滞が生じるかが異なる。また、なぜモード 1 が利用されないかの理由が、容量比に起因するのか（パターン 3(b)），モード料金差に起因するのか（パターン 3(a), (c)），も異なる。

図-7 は、横軸をボトルネック容量比  $\mu_1/\mu_2$ ，縦軸をモード料金差  $f_{12}$  として、各パターンの成立条件の領域を示したものである。黒線で区切られた部分が各パ

<sup>3</sup> パターン 3(c) の費用関数は、図-5 の  $w_2(s)$  を  $w_1(s) + w_2(s)$  と読み替えるだけである。



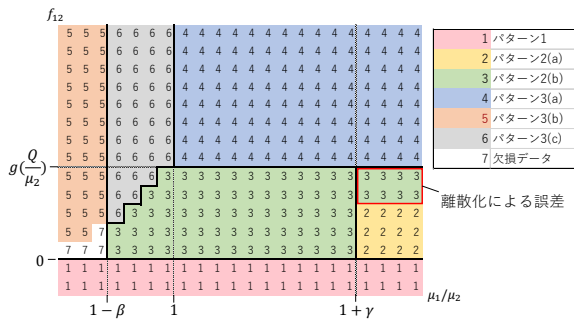


図-8 数値計算結果

ターンの領域に対応する。この図より、おおよそまず、モード料金差（縦軸方向）で大分類が決まり、容量比によって最終的な詳細なパターンが決まるという構造が見てとれる。

### b) 数値計算による確認

図-7の均衡状態の分類を、数値計算によって確認する。ここでは、2次錐相補性問題（SOCCP）を解くために開発された ReSNA (Regularized Smoothing Newton Algorithm)<sup>12)</sup> を用いて、前章で定式化した問題（の時間を離散化し、相補性問題に帰着させたもの）を数値的に解いた（その方法は、Akamatsu et al.<sup>7)</sup> とほぼ同様であるので、詳細は省略する）。

ボトルネック容量比  $\mu_1/\mu_2$  およびモード別費用差  $f_{12}$  を変化させて得られた結果を図-8に示す。この図は、左から右に向かって容量比  $\mu_1/\mu_2$  が大きくなり、下から上に向かって  $f_{12}$  が大きくなっている。この図より、前節の解析的な結果（図-7）が（ほぼ）成立していることがわかる。

ただし、理論的にはパターン 2(a) となるべきところが、パターン 2(b) となっている領域がある。これは、次のような（時間の）離散化の誤差により生じたものである。つまり、パターン 2(a) では、モード料金差が大きくなればなるほど、そのコスト差を埋めるためにボトルネック 2 で大きな渋滞を生じさせる必要がある（i.e., 図-3 の  $w_2(s)$  の山が大きくなる）。これは、 $Q_1$  が減少していくことも同時に意味し（i.e., 図-3 の  $w_1(s)$  の山が小さくなる）、パターン 3(a) との境界付近では  $Q_1$  は極めて小さくなる。さらに、今回の数値計算では、（一般的に用いられる） $\beta < \gamma$  の設定で計算しているため、遅着側のモード 1 利用者数の減少速度が速い。そのため、遅着側のモード 1 利用者数が一定数より小さくなると、時間の離散化の誤差の方が大きくなり、パターン 2(b) と区別がつかなくなるのである。

また、欠損している領域については、アルゴリズムが収束しなかった。この要因としては、様々なパターンの境界であり数値誤差の影響を大きく受けること、また、Akamatsu et al.<sup>7)</sup> が指摘しているように、そもそも

問題自体がアルゴリズムの収束性を保証する条件を満たしていないことが挙げられる。

### (3) 容量増強パラドクスに関する分析

Arnott et al.<sup>5)</sup> では、上流のボトルネックの容量を拡大することで下流の混雑に影響し、結果的に、総移動コストが増加する「容量増強パラドクス」が起こり得ることを示している。ここでは、モード選択を考慮した場合でも、この容量増強パラドクスが起こるか否かについて考察する。結論を先に述べれば、今回の状況では、そのようなパラドクスは起こらないことを示すことができる。以下では、Arnott et al.<sup>5)</sup> と同様に、容量増強前後で（前節で分類した）均衡状態のパターンが変わらないことを仮定して、このことを見ていく。

パターン 2(a), または、パターン 2(b) かつ  $\mu_1 > \mu_2$  のとき、総利用者数は次のように表すことができる。

$$Q = \mu_2 T_2 + (\mu_1 - \mu_2) T_1 \quad (19)$$

ここで、 $T_i$  はモード  $i$  の到着時刻ベースの利用時間帯幅である。具体的には、パターン 2(a) のとき、 $T_i$  は図-3において  $d(s) \leq \rho_i$  となる時間帯となる。一方、パターン 2(b) (かつ  $\mu_1 > \mu_2$ ) のとき、 $T_2$  は図-4-aにおいて  $d(s) \leq \rho_2$  となる時間帯、 $T_1$  は  $d(s) \leq \rho_1$  の時間帯のうち  $s \leq t_w$  を満たす部分である。つまり、式 (19) の第一項はモード 2 の利用者総数  $Q_2$ 、第二項はモード 1 の利用者総数  $Q_1$  を表す。ボトルネック 2 の容量を  $\delta\mu_2$  増強した後も  $\mu_1 > \mu_2 + \delta\mu_2$  の場合、上記と同様に、総利用者数は次のように表される。

$$Q = (\mu_2 + \delta\mu_2) \hat{T}_2 + (\mu_1 - \mu_2 - \delta\mu_2) \hat{T}_1 \quad (20)$$

ここで、ハットは容量増強後の値を表す。式 (19) から式 (20) を引くと、以下の式が成り立つ。

$$\mu_2(T_2 - \hat{T}_2) + (\mu_1 - \mu_2)(T_1 - \hat{T}_1) = \delta\mu_2(\hat{T}_2 - \hat{T}_1) \quad (21)$$

ここで、 $z < \hat{z}$  と仮定する。このとき、 $\rho_i < \hat{\rho}_i$  であり<sup>4</sup>（また、パターンは不変のため）、図-3、図-4-a から  $T_i < \hat{T}_i$  となることがわかる。つまり、左辺は負になる。一方で、本稿のモデルでは  $\hat{T}_2 > \hat{T}_1$  であるので、右辺は正であり、矛盾。つまり、 $z \geq \hat{z}$  となり、容量増強パラドクスは起こらない。

次にパターン 2(b) かつ  $\mu_1 \leq \mu_2$  のときを考えると、総利用者数は、

$$Q = \mu_1 T_2 \quad (22)$$

で表される。なぜなら、ラッシュ時間帯（i.e.,  $T_2$ ）を通して、より容量の小さい最下流ボトルネックで渋滞が発生する（i.e.,  $w_1(s) > 0$ ）ためである（図-4-b）。同様に、容量増強後も  $Q = \mu_1 \hat{T}_2$  であり、 $T_2 = \hat{T}_2$  が得られる。すなわち、 $z = \hat{z}$  であり、パラドクスは生じな

<sup>4</sup> モード別の均衡移動コスト  $\rho_i$  は  $z$  からモード料金  $f_1, f_2$ （定数）を差し引いたものであり、 $z$  と  $\rho_i$  の変化は同じである。

い。なお、容量増強前後でパターン 2(b) は維持されるが、 $\mu_1 > \mu_2$  から  $\mu_1 \leq \mu_2 + \delta\mu_2$  と変化する状況も考えられる。このとき、

$$Q = \mu_2 T_2 + (\mu_1 - \mu_2) T_1 = \mu_1 \hat{T}_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{(T_2 - T_1)}{(\hat{T}_2 - T_1)} \quad (23)$$

であり、 $T_2 > \hat{T}_2$  となることがわかる。従って、このときも  $z > \hat{z}$  であり、パラドクスは起こらない。

一方、パターン 1、パターン 3 は、単一ボトルネック問題に帰着しており、この場合に容量増強パラドクスは起こらないことは明らかである。

## 4. 応用

本章では、前章で示した理論のいくつかの応用を示す。具体的には、(1) では、モード数  $N \geq 3$  の状況について議論する。(2) では、モード利用者総数に制約がある状況を扱う。最後の (3) では、社会的最適状態と均衡状態との関係について議論する。

### (1) $N \geq 3$ の場合

モード数  $N \geq 3$  の場合は、 $N = 2$  の結果を組み合わせることで、前章と同様の均衡状態パターンの分類・予測が可能であると期待される。具体的には、まず、隣り合うモードについて料金や容量を比較し、 $N = 2$  のいずれのパターンが生じるかを判断する（ここで、上流/下流から“順に”比較する必要はない）。このとき、パターン 1 やパターン 3 が生じると判断されれば、2 つのモードのいずれかは利用されなくなると予想されるので、そのモードはないものとして考える。また同様に、各ボトルネックの渋滞の有無についても判断することができる。ただし、ここで渋滞が発生しないと判断されたボトルネックでも、上流により容量の大きいボトルネックが存在すると渋滞が発生しうる。従って、全ての上流ボトルネックの容量が小さい場合のみ、このボトルネックを削除して考える。

そして、モードが除かれた状況で再び上記の判断を行う。これらを繰り返し最終的に残ったモードでは、利用者が必ず発生することになる。この残ったモード数が 1 であれば、単一ボトルネック問題に帰着していることを意味する。残ったモード数が 2 以上の場合、そのパターンは、(どのモードの利用者も発生する) パターン 2 と基本的には同じであるため、具体的な均衡状態を求めることは難しくない。

以上の考察を、 $N = 3$  の数値計算例を通して確認してみよう(表-1)。この表は、その左側部分に  $f_i$  と  $\mu_i$  の設定、右側部分に数値計算の結果得られた、均衡状態での各モードの需要比率、最大渋滞コスト（どこで

渋滞が発生したかを判断する指標)を示している。また、この数値計算例では、 $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 1.1$  としている。

表-1 の 1 行目を見ると、まず、モード 1, 2 の料金差  $f_{12}$  が負になっているため(パターン 1)、モード 2 の需要は 0 になり、また、上流ボトルネックより容量の大きいボトルネック 2 では渋滞が生じないと判断できる。一方、モード 2, 3 の料金差  $f_{23}$  は正であるため、パターン 1 ではない。さらに、パターン 3 の条件も満たさないため、モード 1, 3 が残ることになる。次に、残ったモード 1, 3 の料金を比較すると、 $f_{13} > 0$  となっており、パターン 2 か 3 が生じる。さらにここでも、パターン 3 の条件は満たされないため、最終的にパターン 2 が生じると判断できる((a) か (b) かの判断はここでは省略する)。

2 行目は、まず、 $f_{ij} \leq 0$  ( $i < j$ ) を満たすようなモードはないため、いずれのモードにおいても需要が発生しうる。ただし、ボトルネック容量比を見ると、モード 2, 3 において、 $\mu_2/\mu_3 < 1 + \Delta d(s) = (1 - \beta)$ ,  $\forall s$  が満たされる。そのため、パターン 3(b) であり、モード 2 の需要は 0、また、ボトルネック 3 では渋滞が発生しないと判断できる。最後に、モード 1, 3 で比較を行うと、パターン 3 の条件を満たさないため、ここでも最終的にパターン 2 が生じる。1 行目とはモード需要の発生パターンは同じであるにも関わらず、渋滞が発生する地点が異なるのは、パターン 1, 3 のどちらが生じるか、また、それがどこで生じるかが異なるためである。

最後に 3 行目を見ていこう。まず、モード 1, 2 の料金を比較するとパターン 1 であり、モード 2 の需要は 0、上流ボトルネックより容量の大きいボトルネック 2 では渋滞が発生しないと判断できる。次に残ったモード・ボトルネック 1, 3 を比較すると、容量比が  $\mu_1/\mu_3 < 1$  かつモード料金差が  $f_{13} > g(Q/\mu_1) - Q(\gamma/(\beta + \gamma))(1/\mu_1 - 1/\mu_3)$  を満たすため、パターン 3(c) であると判断できる。従って、モード 1 の需要は発生しない、しかし、残った両方のボトルネックで渋滞が発生するという結果が得られる。

以上より、本節冒頭で述べたルールはいずれの例でも有効であり、一般的に成立するものと予想される。しかし、その厳密な証明については今後の課題である。

### (2) 上位選択に容量制約がある場合

ここまでは、上位のモード選択は特に制約なく選択ができるとしてきた。しかし、選択者総数に関する容量制約がある状況が、より現実的である。例えば、駐車スペースの制約やモード利用チケットの上限などが考えられる。また、上位問題を立地選択問題であると考ええると、各立地地点の土地面積の制約がそれにあたる。

上位選択で容量制約を考えた場合、モード  $i$  の下位選

表-1 N = 3 の例

モード別料金			ボトルネック容量			需要 (%)			最大渋滞コスト		
$f_1$	$f_2$	$f_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$\max .w_1(s)$	$\max .w_2(s)$	$\max .w_3(s)$
7.33	11.00	5.50	30	20	10	61.10	0.00	38.90	6.16	0.00	1.84
11.00	7.33	5.50	30	10	30	49.00	0.00	51.00	5.00	5.50	0.00
11.00	11.00	4.40	10	30	15	0.00	0.00	100.00	12.99	0.00	5.72

択に関わる移動コストが他のモードよりも小さくても、全ての利用者がそのモードを利用できるとは限らない。そのため、上位の選択を均衡させるための追加的なコストを考える必要がある。いま、そのコストを  $f_i$  (ここまでの固定料金との関係は後で示す)、容量を  $M_i$  と書くと、容量制約を考えた上位選択問題は、式 (5), (6) および、

$$\begin{cases} Q_i = M_i & \text{if } f_i > 0 \\ Q_i \leq M_i & \text{if } f_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \quad (24)$$

と表現することができる。式 (24) のように、 $f_i$  は、容量制約が効く場合にのみ正、そうでない場合には 0 となるコストである。例えば、立地選択問題であれば、この条件は土地市場における市場清算条件を表しており、 $f_i$  は地代を意味する。モード選択の場合にも、市場があればそこでの価格、市場がない場合には、(出発時刻に依存しない) 平均的な待ち時間コストと解釈できる。

コスト  $f_i$  を固定値としてみなしていたこれまでの分析との関係は以下の通りである。これまでの分析では、任意の (外生的な) 固定コストに対して、モード需要分布を自由に (内生的に) 変えることで、上位選択の均衡条件が満たされていた。一方で、(外生的な) 容量制約のある場合には、上述のように、均衡条件を満たすためにコストを調整 (内生化する) しなければならない<sup>5</sup>。

上位選択のコストが内生化した、以上のより現実的な状況でも前章の理論は有用である。具体的には、まず、均衡状態において実現するコスト  $f_i$  が仮に与件だとすれば、容量制約あり/なしの均衡状態は一致する。なぜなら、与えられた  $f_i$  は当然式 (24) を満たしており、その他の条件は全く同じであるためである。従って、容量制約ありの問題で生じた結果を解釈する、言い換えれば、結果の発現メカニズムを理解するのに前章 (あるいは前節) の均衡状態のパターン分類を利用することができる。また逆に、均衡状態において実現する需要分布  $Q_i$  が仮に与えられた際に、ネットワーク内でどのような渋滞パターンが生じるか、さらには、内生的なコスト  $f_i$  の取りうる範囲や (少なくとも  $N=2$  の場合では) 値も導くことができるだろう。ただし、前節までとは異なり、外生パラメータからどのような均衡

状態が生じるかを予測できるわけではないことには注意が必要である。

### (3) 社会的最適状態との関係

最後に、均衡状態と社会的最適状態との関係を考察する。ここでの社会的最適状態とは、すべてのボトルネックにおいて、渋滞が発生しないことを前提に、ネットワーク全体の総交通費用が最小化されている状態である。つまり、この状態を求める問題 (ただし、ここでは、上位の容量制約は考えない) は次のようになる。

$$\min_{q_i^{so}(s) \geq 0, Q_i^{so}} \cdot \sum_i \int_s \{d(s) + f_i\} \cdot q_i^{so}(s) ds \quad (25)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_s q_i^{so}(s) ds = Q_i^{so} \quad \forall i \quad (26)$$

$$y_i^{so}(s) \leq \mu_i \quad \forall i, s \quad (27)$$

$$\sum_i Q_i^{so} = Q \quad (28)$$

この線形計画問題の最適性条件 (Kuhn-Tucker 条件) は、式 (26)、式 (28) および以下の式になる。

$$\begin{cases} \rho_i^{so} = d(s) + f_i + \sum_i p_i(s) & \text{if } q_i^{so}(s) > 0 \\ \rho_i^{so} \leq d(s) + f_i + \sum_i p_i(s) & \text{if } q_i^{so}(s) = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (29)$$

$$\begin{cases} y_i^{so}(s) = \mu_i & \text{if } p_i(s) > 0 \\ y_i^{so}(s) \leq \mu_i & \text{if } p_i(s) = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (30)$$

$$\begin{cases} z^{so}(s) = \rho_i^{so} & \text{if } Q_i^{so} > 0 \\ z^{so} \leq \rho_i^{so} & \text{if } Q_i^{so} = 0 \end{cases} \quad \forall i, s \quad (31)$$

ここで、 $\rho^{so}$ 、 $\mathbf{p}$ 、 $z^{so}$  は、それぞれ、式 (26)、式 (27)、式 (28) の Lagrange 乗数である。 $\mathbf{p}$  をボトルネック通行権取引制度<sup>13,14)</sup> (や動的混雑課金) における価格とするならば、 $\rho^{so}$  をモード別均衡移動コスト、 $z^{so}$  を均衡移動費用とみなした、利用者均衡状態と解釈することができる。

近年、出発時刻選択のみを考えた Fu et al.<sup>8)</sup> でも同様の議論がされているように、 $w_i(s) = p_i(s)$  が常に成立すれば、均衡状態と社会的最適状態のフローパターンが一致する： $q_i(s) = q_i^{so}(s)$ 。なぜなら、均衡状態と上記の最適性条件の唯一の違いは、 $w_i(s), p_i(s)$  を決める渋滞遅れ条件 (4) と条件 (30) であり、その他の条件は数学的に同型であるためである。

<sup>5</sup> またこの場合には、一般性を失うことなく、固定コストは 0 と考えることができる。



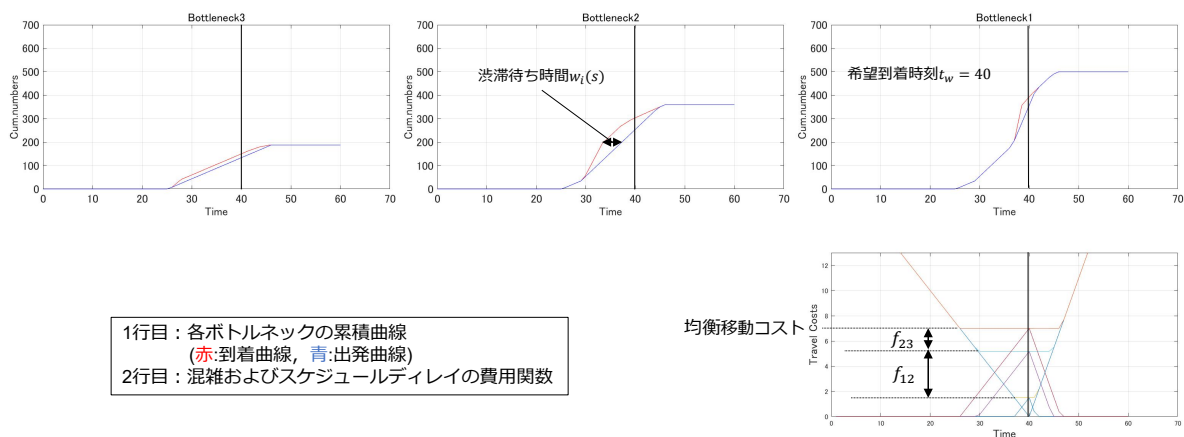


図-9 均衡状態におけるフロー・コストパターン

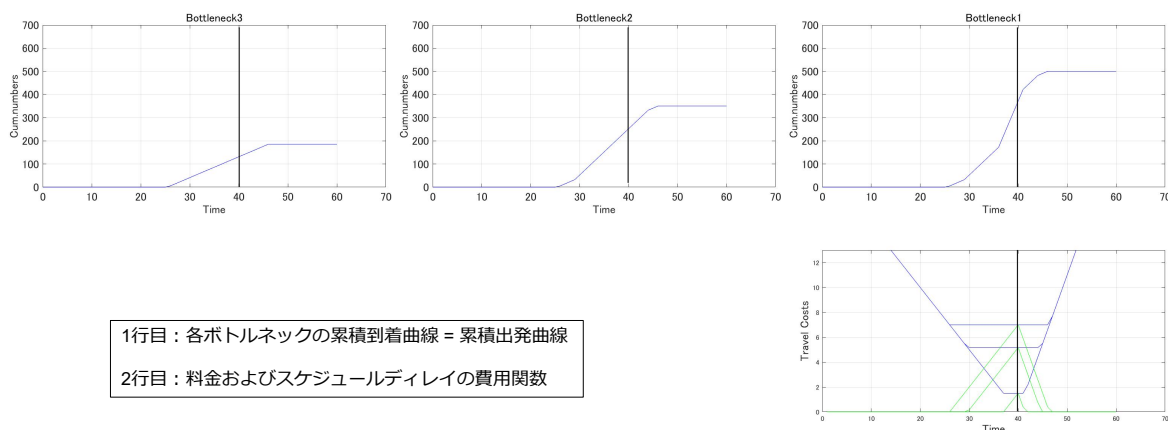


図-10 社会的最適状態におけるフロー・コストパターン

$N = 2$  の場合をより具体的に考えてみると、まず、本稿の問題では、パターン 1, 3 の状況は単一ボトルネック問題に帰着しているため、従来から知られているように  $w_i(s) = p_i(s)$  が一致する<sup>2)</sup>。一方、パターン 2 の場合は、均衡状態のモード需要分布  $Q_i > 0$  が仮に与えられているとすれば、出発時刻選択のみを考えた Fu et al.<sup>8)</sup> と同様の状況だとみなせる。Fu et al.<sup>8)</sup> によれば、パターン 2(a) のとき両者は一致するが、パターン 2(b) では両者が乖離することを示している。以上から、パターン 2(b) を除き、均衡状態と社会的状態のフローパターンは一致すると結論づけることができる。

なお、本研究においてパターン 2(b) が生じない条件は以下の式で表される。

$$\mu_1 - \mu_2(1 + \Delta d(s)) \geq 0 \quad (32)$$

これは、Fu et al.<sup>8)</sup> で示された  $w_i(s) = p_i(s)$  となる条件  $(\mu_i - \mu_{i+1}(1 + \Delta d(s)) \geq 0)$  と同型である。つまり、 $N \geq 3$  でも、パターン 2(b) のような状況が起こらなければ、 $N = 2$  と同様の議論が成立すると考えられる。このことを確認するために、 $N = 3$  の状況における数値計算例を図-9 と図-10 に示す。これらは、それぞれ、同

じ条件下における均衡状態 (パターン 2(a)) および社会的最適状態のフローとコストを表している。各図の 1 行目は各ボトルネックの累積図、2 行目は費用関数を表す。これらの図から、まず、累積出発曲線 (フローパターン) が一致していることがわかる。ただし、均衡状態では渋滞が発生している (i.e., 累積到着/出発曲線が乖離している) ため、両者の累積到着曲線は一致しない。一方、コスト (均衡移動コストおよび渋滞遅れ/通行権価格) に関しても等しくなっていることがわかる。

均衡状態と社会的最適状態のコストが多くのパターンで一致するという結果は、これらの状況では、通行権取引制度や動的混雑課金などの制度を導入しても、利用者の負担するコストは変わらないことを意味する。これは、金銭移転を伴う TDM 施策の受容性の点で重要であると言える。

## 5. おわりに

本研究では、需要分布が内生化したタンデムボトルネックにおける出発時刻選択問題の均衡状態の特性を理論的に分析した。その結果、2つのボトルネックに

限定した問題において、外生的に与えた上位選択固有の費用差や隣接ボトルネックの容量比によって、均衡状態パターンが分類できることが理論的に明らかになった。また、上位選択を含む本モデルでは、需要が固定された場合に起こるとされていた容量増強パラドクスが起こらないことも示した。

以上の理論の応用として、一般的なボトルネック数を持つ問題や、上位選択に容量制約があるより現実的な問題、そして、社会的最適状態との比較を行った。そして、以下の知見を得た。

- 一般的なボトルネック数を持つ問題においても、上記の理論的分類を踏まえた少数のルールによって、均衡状態のパターンが予測可能である。
- 上位選択の容量制約を考えた問題では、上位選択固有の費用が内生的に決まるが、その場合でも本質的な均衡状態パターンは変わらない。
- 均衡状態と社会的最適状態のコストや需要分布は、多くの均衡状態パターンで一致する。

先にも言及したように、この1番目の項目は、数値計算例により確認したものであり、その理論的な証明は今後の課題である。また、本稿では均衡状態パターンの分類に主眼を置いたが、この結果を踏まえたより現実的な出発時刻・上位選択同時均衡を分析すること、また、交通管理・制御および上位選択に関わる施策に関する示唆を得ることも今後の重要な課題である。

謝辞： 本稿の修正にあたっては匿名の査読者からの有益なコメントを参考とした。ここに記し、感謝の意を表します。

## 付録 I 各補題の証明

### (1) 補題 1 の証明

ある時刻  $s$  について  $w_2(s) > 0$  と仮定する。このとき、均衡条件 (4) より、 $y_2(s) > 0$  となる (なぜなら、 $\Delta\tau_1(s) > 0$  は常に満たされるため)。従って、 $q_2(s) = y_2(s) > 0$  であり、均衡条件より以下の式が成り立つ： $C_2(s) \leq C_1(s)$ 。一方で、 $f_{12} \leq 0$  のとき、式 (9) より、 $C_2(s) > C_1(s)$  であり、矛盾。すなわち、 $f_{12} \leq 0$  のとき、すべての時刻  $s$  において  $w_2(s) = 0$  となる。

### (2) 補題 2 の証明

ある時刻  $s \geq s_1$  について  $q_1(s) > 0$  と仮定する。ケース 2 の議論より、 $\mu_1/\mu_2 < 1 + \Delta d(s_1) \leq 1 + \Delta d(s)$  のとき、明らかに  $q_1(s) < 0$  であり矛盾。すなわち、すべての時刻  $s$  において、 $q_1(s) = 0$  が成り立つ。

続いて、 $s \geq s_1$  において  $w_2(s) > 0$  と仮定する。ケース 1 の議論より、 $\Delta d(s) + \Delta w_1(s) + \Delta w_2(s) = 0$  であり、

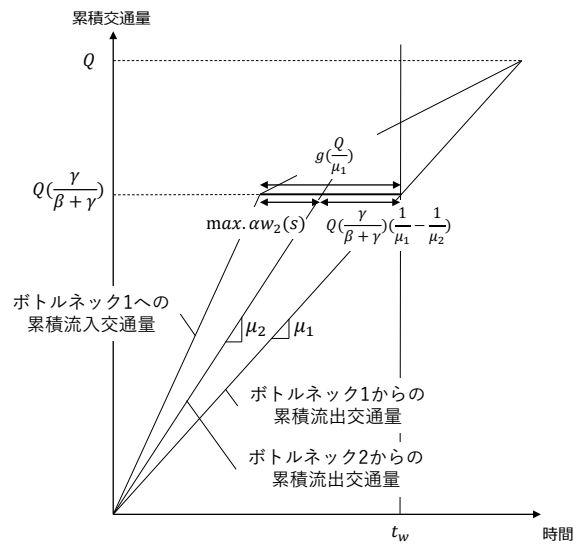


図-11  $\mu_1/\mu_2 \leq 1$  の時の累積図

また、 $w_1(s), w_2(s) > 0$  なので<sup>6</sup>、 $\Delta w_1(s) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}$ 。これらの条件を合わせると、

$$\Delta d(s) + 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} + \Delta w_2(s) = 0 \Rightarrow \Delta w_2(s) < 0 \quad (I.1)$$

である。これは、 $s \geq s_1$  において  $w_2(s)$  がゼロから増加しないことを示しており、矛盾。よって、すべての時刻  $s$  において、 $q_1(s) = 0$  かつ  $w_2(s) = 0$  が成り立つ。

### (3) 補題 3 の証明

まず、全ての時刻において、 $q_1(s) = 0$  (ケース 1) であるとする。 $\mu_1/\mu_2 \geq 1$  のとき (i.e., 下流容量が大きいとき)、下流で渋滞は起きず、 $w_1(s) = 0$  は明らかである。つまり、状況は単一ボトルネックの出発時刻選択問題に帰着する。このとき、よく知られているように、 $\max\{\alpha w_2(s)\} = g(Q/\mu_2)$  であり (例えば、桑原<sup>3</sup>) を参照)、移動コスト差は、

$$C_2(s) - C_1(s) = \alpha w_2(s) - f_{12} \quad (I.2)$$

$$\leq \max\{\alpha w_2(s)\} - f_{12} \quad (I.3)$$

$$= g(Q/\mu_2) - f_{12} < 0 \quad (I.4)$$

最後の不等式は、 $C_2(s) - C_1(s) < 0$  (ケース 1) による。

一方、ある時刻  $s$  について  $q_1(s) > 0$  と仮定すると、均衡条件より  $C_1(s) \leq C_2(s)$  である。また、 $f_{12} > g(Q/\mu_2)$  のとき、移動コスト差は、

$$C_2(s) - C_1(s) < \alpha w_2(s) - g(Q/\mu_2) \leq 0 \quad (I.5)$$

最後の不等式は、 $\mu_1/\mu_2 \geq 1$  のとき、利用者が目的地に到着するラッシュ時間幅の上限 (i.e.,  $q_1(s) = 0, \forall s$ ) が  $Q/\mu_2$  であることによる。つまり、 $C_2(s) < C_1(s)$  であり、矛盾。すなわち、全ての時刻において、 $q_1(s) = 0$  が成り立つ。

<sup>6</sup>  $\mu_1 < \mu_2$  であるので、 $w_1(s) = 0, w_2(s) > 0$  の状況は生じ得ない。

以上より,  $f_{12} > g(Q/\mu_2)$  は,  $q_1(s) = 0, \forall s$  であるための必要十分条件であることが示された.

#### (4) 補題 4 の証明

証明の手順は前節と全く同じであるので, 概略および異なる点のみを示す. まず, 全ての時刻において,  $q_1(s) = 0$  (ケース 1) であるとする.  $\mu_1/\mu_2 < 1$  のとき, 図-11 に示すような累積図が均衡状態で生じる. つまり,  $\max\{\alpha w_2(s)\}$  は, 式 (17) の右辺で表される. このとき, 前節と全く同様の議論で, 式 (17) が成立することを示すことができる.

一方, ある時刻  $s$  について  $q_1(s) > 0$  と仮定すると, 均衡条件より  $C_1(s) \leq C_2(s)$  である. また, 式 (17) が成立するとき, 前節と全く同様の手順で,  $C_2(s) < C_1(s)$  を導くことができる. すなわち, 全ての時刻において,  $q_1(s) = 0$  が成り立つ.

以上より, 式 (17) は,  $q_1(s) = 0, \forall s$  であるための必要十分条件であることが示された. なお, 累積図より,  $w_1(s), w_2(s) > 0$  の時間帯があることは明らかである.

#### 参考文献

- 1) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, *American Economic Review*, Vol.59, pp.251–260, 1969.
- 2) Arnott, R., de Palma, A. and Lindsey, R.: A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand, *American Economic Review*, Vol.83, pp.161–179, 1993.
- 3) 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集, No.604/IV-41, pp.73–84, 1998.
- 4) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing patterns at a two tan-

dem bottleneck during the morning peak, *Transportation Science*, Vol.24, pp.217–229, 1990.

- 5) Arnott, R., de Palma, A. and Lindsey, R.: Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering, *Transportation Science*, Vol.27, pp.161–179, 1993.
- 6) 吉年正伸, 赤松隆: タンデムボトルネックにおける通行権取引制度の効率性, 土木計画学・論文集, Vol.25, No.4, pp.897–907, 2008.
- 7) Akamatsu, T., Wada, K. and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B*, Vol.81, pp.808–829, 2015.
- 8) Fu, H., Akamatsu, T., Satsukawa, T. and Wada, K.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum versus Equilibrium, arXiv:2102.01899, 2021.
- 9) 高山雄貴, 赤松隆: ボトルネック渋滞を考慮した住居立地均衡モデル-時間軸の縮約可能性について-, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.1, pp.39–52, 2009.
- 10) Osawa, M., Fu, H. and Akamatsu, T.: First-best dynamic assignment of commuters with endogenous heterogeneities in a corridor network, *Transportation Research Part B*, Vol.23, pp.303–321, 2018.
- 11) 大阪市: 万博開催時の新たな交通アクセスルートの検討について, [https://www.city.osaka.lg.jp/kensetsu/cmsfiles/contents/0000506/506669/200904\\_10\\_sankousiryoku.pdf](https://www.city.osaka.lg.jp/kensetsu/cmsfiles/contents/0000506/506669/200904_10_sankousiryoku.pdf) (2021年11月26日閲覧)
- 12) 林俊介: ReSNA の手引き, オペレーションズ・リサーチ, Vol.59, pp.716–724, 2014.
- 13) 赤松隆, 佐藤慎太郎, Nguyen, X. L.: 時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究, 土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.605–620, 2006.
- 14) Akamatsu, T. and Wada, K.: Tradable network permits: A new scheme for the most efficient use of network capacity, *Transportation Research Part C*, Vol.79, pp.178–195, 2017.

(Received June 18, 2021)

(Accepted December 28, 2021)

## DEPARTURE TIME CHOICE EQUILIBRIUM IN A TANDEM BOTTLENECK NETWORK WITH ENDOGENOUS DEMAND DISTRIBUTION

Kota ITABASHI and Kentaro WADA

This paper examines the theoretical properties of a departure time choice equilibrium in a tandem bottleneck network with endogenous demand distributions that are determined through an upper-level choice (e.g., mode choice and location choice). We first show that, for two-bottleneck networks, we can analytically classify equilibrium flow patterns based on the cost difference in the upper-level and the capacity ratio of the adjacency bottlenecks. We also show that this classification is useful for more general problems such as networks with an arbitrary number of bottlenecks, and capacitated upper-level choices. We finally discuss the relationship to a socially optimal state.