一般論文

真理概念は論理結合子となりうるか
——真理理論とハーモニー——

矢田部 俊介*

Is truth a logical connective?: A truth theory and the harmony

Shunsuke YATABE

abstract

Truth theories like the Friedman-Sheard's truth theory (**FS**) have two rules, T-in rule and T-out rule, about introduction and elimination of the truth predicate. They look like the introduction rule and the elimination rule of a logical connective. From the proof theoretic semantics viewpoint, one might think that the truth predicate is a logical connective which is governed by these two rules.

From this proof theoretic semantics viewpoint, the nature of truth is like deflationist's nature of truth. Additionally one of the most important things is that the truth predicate does not disturb the traceability of the argument from the premises to a conclusion. However, a crucial problem has been known: any criteria to be a logical connective, known as a "harmony" of the introduction rule and the elimination rule, are not satisfied because of the ω-inconsistency of FS. Such ω-inconsistency is caused by the fact that the truth predicate enables us to define paradoxical formulae of seemingly infinite-length. These formulae can be regarded as coinductive objects in terms of computer science. The reason of the failure of the harmony is that these criteria are defined not for coinductively defined paradoxical formulae but for inductively defined formulae. In this paper, we examine how we can extend the criteria for harmony for coinductive formulae.

§1　はじめに

日常生活のみらなず，実際の科学研究の現場においても，真理概念は広く使われている（タルスキが言うように「意味論的観念は，科学の様々な分野に実際上含まれており，それは特に経験科学の分野についても言えることである」（タルスキ 1944））．そ

* 京都大学大学院文学研究科

して，真理概念について，形式的な分析を与えるのが真理理論である．形式的な分析においては，真理とは何かと言うよりも，真理概念はどのように使われるのかという点に注目し，形式的に正しく実質的に妥当な真理概念についての理論を与えることに主眼が置かれる．その代表例がタルスキによる真理概念の形式化「**T-図式**」(T-schemata）であろう．その無制限な形式は，任意の論理式 φ について

$$\varphi \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

で表現される（以下 $\ulcorner\varphi\urcorner$ は論理式 φ のゲーデル数を表すとする）．もちろん，無制限な形の T-図式は，ウソツキのパラドックスによって矛盾を導くため，この図式を制限することが必要ではある．しかし重要な点は，T-図式で表現される真理概念は，意味論においてなんら積極的な役割を果たしていないように見えることである．つまり，**Tr** の役割とは，$\ulcorner\varphi\urcorner$ の引用符 $\ulcorner, \urcorner$ を解除するだけのように見える．これがクワイン流の引用解除的真理観である．この立場に立つと，真理述語は，特に存在論的な含意もなく，その性格は非常に論理結合子に近いものとなる，

この論理結合子としての真理述語というアイディアを追及してみよう．例えば，古典論理上，Friedman-Sheard による有名な真理理論 **FS**（Freidman and Sheared 1987）を考えてみよう．**NEC**，**CONEC** 規則を持つ真理理論（FS など）では，真理述語を論理結合子として見なす事が可能なように見える．

$$\frac{\varphi}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

NEC 規則は真理述語（もしくは「真理結合子」）の導入規則であるように見え，**CONEC** 規則は真理述語の除去規則であるかのように見える．論理結合子の意味はその導入規則と除去規則によって定まるという素朴な証明論的意味論の立場からは，この二つの規則を持って真理述語が論理結合子といってかまわないといえるようにも思える．

しかし，クワインの引用解除的真理観は，それ自身としては時代遅れであり，特に量化子と真理述語のインタラクションに関する規則が何をしているかを上手く説明できないという問題点がある．例えば **FS** では $\forall x\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ という形の文が導出可能だが，この文は明らかに引用解除以上のことを言っている．例として「**彼が言ったことはすべて真である**」と言う文を考えてみよう．ここでは，極端な例として，彼が無限個の文 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ を発言していたとしよう．この時，再帰関数 f として，任意の n に対し，φ_n のゲーデル数 $\ulcorner\varphi_n\urcorner$ を出力できるものが存在したとする．その場合，$\forall x\mathbf{Tr}(f(x))$ は，その直感的意味を考えると $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \cdots$ という**無限連言**である．この意味で，真理理

論は，真理述語無しでは通常不可能な，量化の対象となる無限個の言明の連言を述べることを許可しているように見える．この意味で，引用符解除に加え，量化子に真理述語との可換性を許すことにより無限連言を許す立場を **デフレ主義**（deflationism）と呼ぶ.

引用符解除的真理観からデフレ主義への移行はテクニカルなものであり，両者の間に本質的な違いはないように見える．しかし，デフレ主義的立場から上記の無限連言を認めたとき，真理述語は論理結合子として説明できない現象が起こる．そもそも，素朴な証明論的意味論は，トンクのような体系を自明化してしまう論理結合子もどきを排除できない．トンクとは，素朴な証明論的意味論の立場を却下するためにプライアーが提案した結合子もどきで，以下のような導入規則と除去規則を持つ（Prior 1960）.

定義 1　トンク **tonk** は以下の導入規則と除去規則を持つ結合子らしきものであり，素朴な推論主義の立場からはトンクは論理結合子と呼べる.

$$\frac{A}{A\ \mathbf{tonk}\ B}\ \mathbf{tonk}+ \qquad\qquad \frac{A\ \mathbf{tonk}\ B}{B}\ \mathbf{tonk}-$$

実際，トンクは $\vee$ の導入規則と $\wedge$ の除去規則を組み合わせたものであり，各規則自身は特に問題があるようには見えない．しかし，トンクは以下の本質的欠陥を持つ.

例 1　最小命題論理において証明可能な命題 A と，任意の命題 B を考える．このとき以下の推論が可能である.

$$\cfrac{\cfrac{\vdots \atop A}{A\ \mathbf{tonk}\ B}\ \mathbf{tonk}+}{B}\ \mathbf{tonk}-$$

つまり，トンクの導入規則・除去規則を使用すると，任意の命題 B が証明できることになってしまう．このような事態を招く素朴な証明論的意味論の立場は受け入れがたい．トンクのような反例を排除するため，現代的な証明論的意味論の立場では，どのような導入規則と除去規則の組み合わせであっても無制限に論理結合子を定義することを認めるのではなく，導入規則と除去規則の間に適切な関係（「**ハーモニー**」）がない限り論理結合子として認めない．その立場からすると，デフレ主義的な，**FS** における真理述語を論理結合子とみなすことには抵抗がある．すなわち，真理述語は前述の論理結合子の条件「ハーモニー」を満たさないからである．ハーモニーの定義は複数が与えられているが，**FS** ではどれも成立しないことが知られている.

- **保存拡大性**（Belnap 1963）の不成立：ゲーデルの不完全性定理により **PA** では自身の無矛盾性を証明できないが，**PA** に真理述語および **FS** の規則を足すと，**PA** の無矛盾性を証明できる（つまり真理述語を足すことは保存拡大ではない）（Horsten 2011）．
- ω-矛盾性による**証明の正規化可能性**（Dummet 1993）の不成立：真理理論上では，ω-矛盾性により有限的な手法により無限的な論理式が定義可能になり，それが正規化可能性を破壊する（McGee 1985）．

本論では，後者に注目する．まず ω-矛盾性の定義を確認しよう（ただし任意の自然数 n に対し $\bar{n} = \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(\cdots(\mathbf{suc}(\bar{0}))\cdots))$ は **suc** を n 回を繰り返して構成された項であり，数項と呼ばれる）：

定義 2　体系 S が ω-矛盾であるとは，ある論理式 $\varphi(x)$ に対し，

- 任意の自然数 n に対し $\varphi(\bar{n})$ が成立する
- しかし一方で $\exists x \neg\varphi(x)$ が成立してしまう

ある算術を含む体系 S が ω-矛盾である場合，モデル論的に考えると，S のモデルはすべて**超準モデル**である．つまり，上記の $\exists x \neg\varphi(x)$ がモデルで成立するためには，ある d が存在し $\varphi(d)$ が成立する必要があるが，前提より d は標準的自然数，つまり数項のそのモデルにおける解釈ではない．つまり d は **超準的自然数** であるはずである．さて，**FS** の超準性に話を戻すと，その理由は， **NEC** および **CONEC** 規則により，真理述語のおかげで単純な「無限連言」というよりはるかに複雑な，無限的な論理式を定義可能である事である．可算無限個の論理式 $\varphi_n (n \in \omega)$ を考える．もし，自然数を入力として，それぞれの論理式のゲーデル数を計算する再帰関数 f（ただし $f(n) = \ulcorner\varphi_n\urcorner$ となるようなもの）が定義可能な場合， $\forall x \mathbf{Tr}(f(x))$ は無限積 $\bigwedge_{n\in\omega} \varphi_n$ に相当する．再帰関数はそれぞれの関数の値の計算そのものは有限ステップで終了する．しかし，本来なら有限ステップで計算が終わる再帰関数と真理述語および量化子を組み合わせることで，全体としては無限的存在（長さ無限の列＝**ストリーム**）が定義可能になる．そしてこの無限的存在が自然数の有限性概念を破壊する，つまり ω-矛盾性を起こす．その結果，例えば **FS** に ω-矛盾性を起こす **マッギーのパラドックス**（McGee 1985）においてはその直感的意味が以下のような文が定義できる．

$$\neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\cdots\urcorner)\urcorner)\urcorner)\urcorner)$$

この文は，フォーマルには以下を満たす文 γ として不動点補題を使用して定義される．

$$\gamma \equiv \neg\forall x\mathbf{Tr}(f(x, \ulcorner\gamma\urcorner))$$

ただし f は $f(x+1, \ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner$ というゲーデル数の計算を行う再帰関数である．この γ が，これ自身は再帰的に定義された論理式で，これ自身は有限的であるが，その論理式の意味を一つ一つ追っていくと上記の無限ストリームを生成する．このような，ある種潜在無限的な論理式のことを，計算機科学の用語を借用し余帰納的対象（Coquand 1993），**余帰納的論理式**と呼ぼう．**FS** における ω-矛盾性によるハーモニーの破壊は，この余帰納的論理式が **FS** で定義可能であることから明らかである．というのも，元来ハーモニー，特に証明の正規化可能性は，通常の**帰納的に定義される論理式**に実効的に働くように定義されたからである．そして，本論では，余帰納的論理式に**ハーモニー概念を拡張**した場合，余帰納的対象にも，証明論的意味論の見地で意味を与えることが可能になることを明らかにする．

以上の目的を達するため，本論では，この ω-矛盾な **FS** において何が起きているかを計算機科学の用語で分析すると共に，**FS** を構成的型理論 上でシミュレートする余帰納的なトイ言語を作成し，その上でハーモニー概念をどう余帰納的論理式に対し拡張すべきかを考察する．同時に真理述語に関する **FS** の規則の何が問題なのか，どう制限すれば真理述語を命題結合子と見なすことができるかを検討する．以下，本論の構成を述べる．第二章では，枠組みとなる形式的真理理論と，素朴な証明論的意味論の立場から見た真理述語を論理結合子として捉える考え方を紹介する．第三章では，ω-矛盾性を，計算機科学の視点から分析する．枠組みとしては，通常はベース理論として形式的な算術の超準モデルを使用するが，それは非直感的であり数学的な困難があるため，より直感的に分かりやすい構成的型理論を分析の枠組みとして採用する．その上で余帰納的データ型として **FS** のパラドキシカルな振る舞いをシミュレートできる余帰納的なトイ言語を構成する．第四章では，余帰納的なトイ言語上でハーモニー概念がどのように拡張できるかを考察すると共に，**FS** の真理概念のどこに問題があって論理結合子と考えられなかったのかを考察する．

§2　真理理論 FS と証明論的意味論

本章では，本研究の背景として，枠組みとなる形式的真理理論と，素朴な証明論的意味論の立場から見た真理述語を論理結合子として捉える考え方を述べる．2.1 節では，形式的な真理理論が何故必要となったかを，ウソツキのパラドックスとの関連で

紹介すると共に，理論 **FS** を紹介する．2.2 節では，**FS** の真理述語を論理結合子として検討するため，**NEC** 規則と **CONEC** 規則を持つトイ言語 $\mathbf{CL\forall^T}$ を構成し，真理概念を論理結合子として捉えるとはどういう含意を持つかを考察する．最後に，2.3 節では，$\mathbf{CL\forall^T}$ のような真理概念を論理結合子で表現する理論では **FS** の真理概念を捉えきれない証拠として，マッギーによる **FS** の ω-矛盾性の証明を紹介する．

2.1 ウソツキのパラドックスと公理的な真理理論

本節では，公理的な真理理論とは何であり，何故必要となったかを，説明する．まず 2.1.1 節では，ウソツキのパラドックスとの関連で公理的真理理論のモチベーションを紹介する．次に 2.1.2 節では，典型的な解決策として，古典論理上の公理的理論 **FS** を紹介する．

2.1.1 T-図式とウソツキのパラドックス

真理理論とは，真理概念を形式化した理論であり，通常は，形式的な算術をベース理論とし，それに真理述語に関する規則を付加することで得られる（ベース理論が算術であることに関しては 3.1 節で検討する）．さて，前述のように，真理概念を形式的に正しく実質的に妥当である形で形式化する際に，最も広く認められた形はタルスキによる **T-図式**（T-schemata）である（タルスキ 1944）．

定義 3　**Tr** を真理概念を表現する述語だとした場合，任意の論理式 φ について，φ に相対化された T-図式とは，**Tr** が以下を満たす必要があることを主張する．

$$\varphi \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

本来であれば，ある真理理論 T が真理概念の形式化として望ましいものであるためには，T-図式の無制限な形式，つまり任意の論理式 φ に対し，φ に相対化された T-図式を帰結できるようにする必要がある．しかし残念ながら，古典論理上において，十分表現力を持つそのような理想的な真理理論は存在しない．ウソツキのパラドックスのためである．その証明は簡単で，まず **不動点補題**が成立する．

補題 1（不動点補題）　$P(x)$ を任意の一変数述語とする．このとき，ある閉論理式 ψ が存在し，以下が成立する．

$$\psi \equiv P(\ulcorner \psi \urcorner)$$

proof まず，自由変数を一つ持つ論理式を以下のように並べよう：$\langle \varphi_i(x) : i \in \omega \rangle$．このとき，この論理式の列は，ある再帰関数 f によって，任意の自然数 n に対し

$f(\bar{n}) = \ulcorner\varphi_n(\bar{n})\urcorner$ が成立するように表現することができる．さて，このとき，$P(f(x))$ 自身も，自由変数を一つ持つ論理式だということに注意しよう．従って，ある自然数 k が存在し，$\varphi_k(x)$ が $P(f(x))$ になるはずである．このとき，$\varphi_k(\bar{k})$ は $P(f(\bar{k}))$ と等しくなる．ここで ψ として $\varphi_k(\bar{k})$ と置けば，$P(\ulcorner\psi\urcorner) \equiv \psi$ が成立する．□

この ψ のことを P の「**不動点**」と呼ぶ．さて，補題 1 における不動点の生成は，直感的には，以下のように行われている．

$$\begin{aligned}\varphi_k(\bar{k}) &= P(\ulcorner\varphi_k(\bar{k})\urcorner) = P(\ulcorner P(f(\bar{k}))\urcorner) \\ &= P(\ulcorner P(\ulcorner\varphi_k(\bar{k})\urcorner)\urcorner) = P(\ulcorner P(\ulcorner P(\ulcorner\varphi_k(\bar{k})\urcorner)\urcorner)\urcorner) \\ &= P(\ulcorner P(\ulcorner P(\ulcorner\cdots\urcorner)\urcorner)\urcorner)\end{aligned}$$

この解釈では，$\varphi_k(\bar{k})$ と $P(\ulcorner\varphi_k(\bar{k})\urcorner)$ の間の有限のループが無限の長さのストリーム $P(\ulcorner P(\ulcorner P(\ulcorner\cdots\urcorner)\urcorner)\urcorner)$ を生成すると考える事ができる．この意味で，不動点補題における不動点 ψ は，無限的な列を生成する有限の長さの文字列である．

また，この不動点補題を使うと，ウソツキのパラドックスにより以下を証明することができる．

定理 1（ウソツキのパラドックス） 古典論理上で，T-図式の無制限な形式を導出するような，無矛盾な真理概念の形式化は存在しない．

proof 不動点補題により，$\Lambda \equiv \neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\Lambda\urcorner)$ を満たす文 Λ を構成すればよい．□

2.1.2 古典的解決と FS

このウソツキのパラドックスを乗り越え，妥当な形式的真理理論を得るために，大きく分けて二種類の解決法が提案された．最初の方法は，古典論理を優先し，古典論理は維持しつつ，T-図式を制限し，ウソツキ文を定義出来なくし排除することである．もう一つの方法は，無制限な T-図式の保持の方を優先し，その代わり，古典論理をあきらめることである．つまり，古典論理の構造規則である **縮約規則**（のフルの形）を持たない非古典論理を採用する．本節では，前者の典型例である，Friedman-Sheared の真理理論 **FS**（Freidman and Sheared 1987）を紹介する．

定義 4（FS） フリードマン・シェアーの形式的真理理論 **FS** は，算術の言語に真理述語 $\mathbf{Tr}(x)$ を付加した言語上で，以下の公理からなる真理理論である．

- 形式的算術 **PA** の公理系（ただし数学的帰納法は真理述語を含む文にも可能である）
- 真理述語の論理結合子との形式的可換性に関する公理
  - 任意の原子論理式 ψ にたいし $\mathbf{Tr}(\ulcorner\psi\urcorner) \equiv \psi$,
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\neg}x) \equiv \neg\mathbf{Tr}(x)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x\dot{\wedge}y) \equiv \mathbf{Tr}(x) \wedge \mathbf{Tr}(y)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x\dot{\vee}y) \equiv \neg\mathbf{Tr}(x) \vee \mathbf{Tr}(y)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x\dot{\rightarrow}y) \equiv \neg\mathbf{Tr}(x) \rightarrow \mathbf{Tr}(y)]$,
- 真理述語の量化子との形式的可換性に関する公理
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\forall}z\, x(z)) \equiv \forall z\mathbf{Tr}(x(z))]$,
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\exists}z\, x(z)) \equiv \exists z\mathbf{Tr}(x(z))]$,
- 特別な推論規則：

$$\frac{\varphi}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

ただし **Form** を論理式のゲーデル数の集合とする.

注意として, 任意の具体的な論理式 φ, ψ 等に対し, 論理結合子との可換性（$\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ など）を証明することは **NEC**，**CONEC** のみから可能であり（補題 2 参照)，それらに対しては形式的可換性公理は必要ない．しかし，一般のゲーデル数（超準数である）に対し，可換性を証明することは不可能であり，そのために可換性公理が導入されている点をここで指摘しておく.

この体系の特徴は，まず，任意の具体的な論理式 φ に対し，T-文を証明することができる点にある．しかしウソツキ文はつくれず、そのことが無矛盾性を担保する．また，**FS** の無矛盾性に関し，**FS** の任意の有限断片は，グプタとベルナップによる「真理の改訂意味論」（Gupta and Belnap 1993）の ω までの階層がモデルを提供することが知られている．グプタ・ベルナップによる真理の改訂理論は真理述語の無限に続きうる振る舞いを扱う枠組みであるが，本定理は，改訂理論と本論における **FS** の無限的な振る舞いの分析との間の密接な関係を強く示唆するものである．なお，**FS** 全体のモデルの構成に関しては大きな困難があることが知られている.

2.2　$\mathbf{CL}\forall^{\mathbf{T}}$ の証明論的意味論

前述の **FS** は古典論理上の真理理論であり，透明な真理観を満たす理論ではない．従って，なぜ T-図式に制限を加えるのか，その制限は真理のどのような本性から正当化されるのか，説明する必要がある．しかし，**FS** の **NEC**，**CONEC** の両規則は，証明論的に非常に特徴のある形をしている．つまり，様相演算子の必然化規則と非常に似ている[1]．ここでは，この視点から，真理述語を論理結合子の一種と見なし，その正当化の方法を検討してみよう．

観察 1（Tr の証明論的意味論（素朴版）） **NEC**，**CONEC** 規則については，まるで **Tr** が論理結合子であり，**FS** の二規則はその導入規則と除去規則であるかのように見える：

$$\frac{\varphi}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

では真理述語を論理結合子と見なしてみよう．論理結合子としての真理を，述語としての真理 $\mathbf{Tr}(x)$ と区別するため，**T** と書くことにする．

定義 5
- **T** は，論理式 → 論理式 の型を持つ論理結合子であり，以下をみたすとする．

$$\frac{\varphi}{\mathbf{T}\varphi}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{T}\varphi}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

- 古典述語論理 $\mathbf{CL}\forall$ の言語に論理結合子 **T** を，また $\mathbf{CL}\forall$ の推論規則に **NEC**，**CONEC** を付加した体系を $\mathbf{CL}\forall^{\mathbf{T}}$ と書く．

さて，以下は明らかである：

補題 2　$\mathbf{CL}\forall^{\mathbf{T}}$ は以下を証明する．

- 任意の原子論理式 ψ にたいし $\mathbf{T}\psi \equiv \psi$,
- 任意の論理式 φ にたいし $\mathbf{T}\neg\varphi \equiv \neg\mathbf{T}\varphi$,

[1] 通常，正規な様相論理 **K** において，必然化規則は以下のように定義される：

$$\frac{\psi_0, \psi_1, \cdots \vdash \varphi}{\Box\psi_0, \Box\psi_1 \cdots \vdash \Box\varphi}$$

つまり，様相論理では，前提が必然的に真であるとき結論も必然的に真であるが，真理述語の場合は結論だけを考えればよいという違いがある．**CONEC** は，様相論理における規則 **T** に相当する．

- 任意の論理式 φ, ψ にたいし $\mathbf{T}(\varphi \wedge \psi) \equiv \mathbf{T}\varphi \wedge \mathbf{T}\psi$, $\mathbf{T}(\varphi \vee \psi) \equiv \mathbf{T}\varphi \vee \mathbf{T}\psi$, $\mathbf{T}(\varphi \to \psi) \equiv \mathbf{T}\varphi \to \mathbf{T}\psi$,
- 任意の論理式 φ にたいし $\mathbf{T}(\forall z\, \varphi(z)) \equiv \forall z \mathbf{T}(\varphi(z))$, $\mathbf{T}(\exists z\, \varphi(z)) \equiv \exists z \mathbf{T}(\varphi(z))$.

つまり，**FS** で重要な，論理結合子と真理述語の可換性はみな証明可能である．

ただし，素朴な証明論的意味論は，ベルナップの tonk のような体系を自明化する論理結合子の存在を許す．それらを排除し，整合的な，有意味な意味論をえるためには，その結合子の導入規則と除去規則の調和（**ハーモニー**）がとれている必要がある．

定義 6（Tr の証明論的意味論（厳密版）） 真理述語を結合子としてみなすためには，**導入規則と除去規則がハーモニーを満たすこと**が必要条件である．ハーモニーの基準は複数提案されている：

- **保存拡大性** （Belnap 1963）：任意の真理述語を使わない論理式 φ は，途中に真理述語を使って証明できる場合，真理述語を使わなくても証明できる
- **証明の正規化可能性** （Dummet 1993）：任意の証明は，遠回り（ある論理結合子について，導入規則を適用した直後に，除去規則を適用し除去する，無意味な部分のこと）のない証明に書き直せる

さて，明らかに以下の補題が成立する．

補題 3 古典論理上，**T** はハーモニーの全ての定義を満たし，論理結合子と言える．

証明は，通常の保存拡大性や正規化可能性の証明と全く同じである．もっとも簡単な例として，真理結合子 **T** の導入規則の適用の直後に除去規則の適用（indirect pair と呼ぶ）がある左の証明を考えると，右に還元できる．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{\mathbf{T}C}}{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}$$

この証明では，**T** に関する遠回り（indirect pair）が消える．□

さて， ここで，**証明論的意味論**の立場から考えれば，$\mathbf{CL}\forall^{\mathbf{T}}$ において，**T** は導入規則と除去規則を持ち，論理結合子とみなすこともできる．

さて，真理概念を，述語 $\mathbf{Tr}(x)$ ではなく，結合子 **T** としてみなすということは，真理概念の本質は，正規化による主張可能性の還元，つまり推論において結論の主張可

能性を前提の主張可能性に還元する作業（証明の正規化）を **T** は妨害しない，ということである．つまり，$\mathbf{CL\forall^T}$ における真理概念は，証明論的意味論の意味において，なんら積極的な役割（意味）をもたない．

2.3 問題：FS の ω-矛盾性とハーモニーの破れ

前章で見たように，$\mathbf{CL\forall^T}$ において，**T** が論理結合子と見なしうることは分かった．では，例えば **FS** において，**Tr** はそのまま論理結合子と見なしうるのだろうか．一見，**Tr** は，素朴な証明論的意味論における論理結合子の条件をすべて満たしているようにも見える．実際，**T** と **Tr** は **NEC**，**CONEC** 規則により，真理述語と論理結合子の可換性を始め非常に多くの共通点があり，具体的な論理式に関し両者において全く同じ結果を得ることができる．しかし，前述のように，**FS** において真理述語は，単なる論理結合子以上の役割を持ち，この点が問題を引き起こす．

定理 2 **FS** は ω-矛盾である[2]．

以下，本節の構成を示す．2.3.1 節ではマッギーのパラドックスを使用して本定理の証明を与え，同時に関連したパラドックスを紹介すると共に，その ω-無矛盾性をどう評価するべきかについての意見を紹介する．2.3.2 節では，定理 2 が **FS** の真理述語が論理結合子とはみなし得ないことを示す．

2.3.1 FS の ω-矛盾性の証明

定理 2 の証明は，以下のパラドックスにより与えられる事が知られている．

- **マッギーのパラドックス**: **FS** は ω-矛盾である（McGee 1985），
- **ヤブローのパラドックス**: 十分強い表現力を持つ古典論理上の真理理論は，直接的な自己言及文を使用することなしに，ω-矛盾となることが示せる（Yablo 1993；Leitgeb 2001）．

また，ファジー論理上の制限のない T-図式を持つ真理理論 $\mathbf{PA\L Tr_2}$ も，非常に似た議論により，ω-矛盾となることが知られている（Restall 1993；Hájek, Paris and Shepherdson 2000）．本節では，以下，マッギーのパラドックスによる定理 2 の証明を紹介する．そのために以下の補題を証明しよう．

[2] 注意として，補題 4 の前提が満たされない場合，モデルは ω-無矛盾となる可能性がある点を指摘しておく．この点は 4.3 節の議論において重要な含意を持つ．

補題 4（マッギー） 任意の形式的な真理理論 T は，**PA** と **NEC** 規則を含み，以下を証明する無矛盾な理論だと仮定する．

(1) $(\forall x, y)[x, y \in \mathbf{Form} \to (\mathbf{Tr}(x \dot{\to} y) \to (\mathbf{Tr}(x) \to \mathbf{Tr}(y)))]$,

(2) $\mathbf{Tr}(\bot) \to \bot$,

(3) $(\forall x)[x \in \mathbf{Form} \to \mathbf{Tr}(\dot{\forall} y x(y)) \to (\forall y \mathbf{Tr}(x(y)))]$

このとき T は ω-矛盾になる．

本補題は，**FS** のような，真理述語と論理結合子の間に形式的可換性が成り立つ場合，理論は ω-矛盾となることを示している．

proof 不動点補題により，以下の論理式 γ を定義することができる．

$$\gamma \equiv \neg\forall x \mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\gamma\urcorner))$$

ただし g は以下を満たす再帰関数だとする．

$$g(0, \ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner$$
$$g(x+1, \ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\varphi\urcorner))\urcorner)$$

本証明では，この γ が **FS** で証明可能であり，同時に ω-矛盾性の証拠となることを示す．

まず，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \gamma$ を示す．補題で仮定された可換性から，以下の式変形が可能である：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\gamma \quad \equiv \quad \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma \to \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\ \mathbf{NEC}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\ \text{補題 (1)}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \neg\forall x\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\ \text{補題 (3)}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x+1,\ulcorner\gamma\urcorner))}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}\ \text{結論の弱化}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \gamma}$$

ただし (3) の適用の箇所は，詳細に書くと，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi \to \bot\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\bot\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \bot \equiv \neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と，$\to$ に関する可換性を使用している．

さて，γ の定義より以下も成立する．

$$\cfrac{\cfrac{\neg\gamma \to \forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}{\neg\gamma \to \mathbf{Tr}(g(\bar{0},\ulcorner\gamma\urcorner))}}{\neg\gamma \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)}$$

以上より，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \rightarrow \gamma$ かつ $\neg\gamma \rightarrow \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ であるため，$\mathbf{FS} \vdash \gamma$ となる．これは $\mathbf{FS} \vdash \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\gamma\urcorner)$ を意味する．

一方，γ が証明可能なため，$\mathbf{Tr}(g(\bar{0}, \ulcorner\gamma\urcorner)), \mathbf{Tr}(g(\bar{1}, \ulcorner\gamma\urcorner)), \mathbf{Tr}(g(\bar{2}, \ulcorner\gamma\urcorner)), \cdots$ はみな証明可能である．すなわち，任意の自然数 n に対し $\mathbf{Tr}(g(\bar{n}, \ulcorner\gamma\urcorner))$（言い換えれば $\gamma, \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner), \mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\urcorner), \cdots$）は証明可能であるが，全体としては $\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\gamma\urcorner))$ であることになり，ω-矛盾性は証明された．□

モデルを考えた場合，$\mathbf{FS}$ の任意のモデルにおいては，任意の標準的自然数 n に対し $\mathbf{Tr}(g(n, \ulcorner\gamma\urcorner)$ が成立するにもかかわらず，超準数 d において $\neg\mathbf{Tr}(g(d, \ulcorner\gamma\urcorner)$ が成立することとなる．この超準的な文 $\neg\mathbf{Tr}(g(d, \ulcorner\gamma\urcorner)$ は，メタ理論の立場（そして直感的な立場）からは，無限の長さを持つストリームであると見なせる．上の証明はマッギーのパラドックスの例だが，他のパラドックスの場合も似たような超準的な，以下のような直感的には（無限的）意味を持つと見なせる．

マッギー　$\neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\cdots\urcorner)\urcorner)\urcorner)\urcorner)$

ヤブロー　ヤブローのパラドックスは，無限個の文の集合 $\langle S_0, S_1, S_2, \cdots\rangle$ で，それぞれの文 S_n が「**任意の $i > n$ に対し S_i は偽**」と主張していると仮定すると，ω-矛盾性を導くというものである．真理述語を使って定式化すると，以下のように書ける（$h(i)$ の構成には不動点補題を使用する）．

$$S_n \equiv (\forall i > \bar{n})\neg\mathbf{Tr}(h(i)) \qquad \text{ただし } h(i) = \ulcorner S_i\urcorner$$

その直感的意味を考えると，以下のような形に書き下せる．

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv \neg\mathbf{Tr}(S_1)\bar{\wedge}S_1 \\ &\equiv \neg\mathbf{Tr}(S_1)\bar{\wedge}(\neg\mathbf{Tr}(S_2)\bar{\wedge}(\neg\mathbf{Tr}(S_3)\bar{\wedge}\cdots)) \\ &\equiv \neg\mathbf{Tr}(\neg\mathbf{Tr}(\neg\mathbf{Tr}(\cdots) \wedge (\cdots)) \wedge (\cdots)) \wedge (\neg\mathbf{Tr}(\cdots) \wedge (\cdots)) \end{aligned}$$

ここでのポイントは，$S_i \equiv \neg\mathbf{Tr}(\ulcorner S_{i+1}\urcorner)\bar{\wedge}S_{i+2}$ が成立していることである．その結果，$\neg\mathbf{Tr}(\cdots) \wedge (\cdots)$ が生成する無限の入れ子と見なせる．

これらの元来の文は有限だが，しかしそれらは上記のような無限長の論理式を「生成」する．その意味で「潜在的に無限」な論理式であるとみなせる．これらの文が定義可能であるのは，真理述語が**論理式上の操作の定義可能性を拡大し，論理式のゲーデル数に関する再帰的関数による操作の結果を論理式で表現可能とする**からである．

また，定理 2 の帰結として，階層 ω の極限として安定的に真な文をとった通常の改訂意味論では，**FS** 全体のモデルを与える事ができないことが示される（Halbach 2012）．この証明においては，上記の γ が，まさしく反例となり、ω-矛盾性証明と本質的に全く同じ内容である．

2.3.2 FS における真理結合子のハーモニーの破壊

本節では，定理 2 が **FS** の真理述語が論理結合子とはみなし得ないことを示す．

系 1 2.2 節と同じ方法で，**FS** における真理述語 **Tr** を論理結合子 **T** と見なそうとした場合，その結合子もどきはハーモニーの条件を満たさない．

proof Tr の**保存拡大性**に関しては，**FS** の部分体系である **CT** において**反映原理**

$$\exists x\, \mathbf{provable}(\ulcorner\varphi\urcorner, x) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

が証明され，反映原理により $\mathbf{con}(\mathbf{PA})$ が証明されるため，**PA** の第二不完全性定理により保存拡大性が **CT** に満たされないことが知られている（Horsten 2011, p.76）[3]．反映原理は，$\forall x\, [x \in \mathbf{Form} \to \mathbf{Tr}(x) \vee \neg\mathbf{Tr}(x)]$（「任意の文は真であるか偽であるかどちらかだ」）のような体系全体に関するメタな主張を証明するのに欠かせない原理であり，**FS** などの公理的真理理論のアドバンテージと言われている．つまり，反映原理によって保存拡大性が壊れることは必然的であるとも言える[4]．

正規化可能性に関して論じるためには，前述の無限的な長さの論理式がどのような証明を持つかを考えなければならない．もちろん，本来の **CT** においては，証明は有限の長さの記号列である．しかし **Tr** の中は算術化され，論理式のゲーデル数を再帰関数によって操作するため，その操作を実際の論理式の操作に翻訳しようとすると，無限の長さの証明と見なしうることがある．以下の例を考えよう．A を任意の **PA** で証明可能な論理式とする．また，ゲーデル数上の再帰関数 $h(x, y)$ を以下の様に定義する

[3] **CT** において反映原理 $\exists x\, \mathbf{provable}(\ulcorner\varphi\urcorner, x) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ がすべての算術的な論理式 φ に対し成立する．従って，$\mathbf{CT} \vdash \exists x\, \mathbf{provable}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, x) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ より，**CONEC** 規則を適用し対偶をとれば $\mathbf{CT} \vdash \bar{0} \neq \bar{1} \to \neg\exists x\, \mathbf{provable}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, x)$ が証明可能であり，同時に $\mathbf{CT} \vdash 0 \neq 1$ であるので，つまり **CT**（そして **FS**）は $\mathbf{con}(\mathbf{PA})$ を証明したことになる．

[4] 注意だが，一方で，任意の算術的な論理式 φ に対し，φ が **FS** で証明可能であれば，それが自然数論の標準モデル $\mathbb{N}$ で真となることも知られている（Halbach 2012, p.173）．つまり超準性に関し，**PA** で証明できない **FS** の論理式はみな真理述語を含む（この意味で保存拡大に似た性質を持つようにも見える）．

(h は論理式 y に二重否定を x 回付け加える関数である).

$$h(0, y) = \ulcorner\neg\neg\mathbf{Tr}(y)\urcorner$$
$$h(x + 1, y) = \ulcorner\neg\neg\mathbf{Tr}(h(x, y))\urcorner$$

このとき,**FS** での可換性により $\mathbf{FS} \vdash \forall x\, \mathbf{Tr}(h(x, \ulcorner A\urcorner))$ が証明可能である.この直感的意味は $\neg\neg\neg\neg\cdots$ である[5].真理述語を結合子とみなしこの文を証明する場合,$\neg$ 導入規則を無限回適用する必要性がある.しかし,そう言う証明は当然,無限の長さの証明となり,有限の長さとはならない.従って,証明の正規化も,有限ステップで終了する可能性はない.□

§3　余帰納的対象とハーモニー

本章では,ω-矛盾な **FS** において何が起こっているのかをより詳細に分析する.まず 3.1 節において,分析の枠組みを論じる.通常,形式的な真理理論では統辞論として形式的な算術を採用することが多いが,算術の超準モデルは数学的に難しく,それでは ω-矛盾な理論の直感的な理解には結びつかない.そこで,本論では,計算機科学でよく使われる構成的型理論を採用し,その上で,ω-矛盾性の分析を行う.3.2 節では,構成的型理論上で,帰納的データ型と余帰納的データ型の基本性質を紹介し,両者を比較する.最後に 3.3 節では,**FS** のパラドキシカルな振る舞いを部分的にシミュレートできる余帰納的なトイ言語(の論理式の集合)$\mathbf{Form}^{\infty}$ を定義する.

3.1　分析の枠組み:無限的な統辞論の枠組みとしての構成的型理論

多くの場合,形式的な真理理論は形式的な算術に真理述語(とそれに関する規則)を付加したものとして表される.その理由は,

算術= **Theory of syntax**(統辞論の理論)

であるからであろう(Horsten 2011).このアプローチは由緒正しく,少なくともゲーデルの不完全性定理における算術化にまで遡ることができる.その意味で,**FS** のベース理論が **PA** であるのも,それ自身に意味がある訳ではない.

[5] もちろん,B として証明不可能な論理式を持ってくれば $\mathbf{FS} \nvdash \forall x\, \mathbf{Tr}(h(x, \ulcorner B\urcorner))$ であり,**FS** において $\neg\neg\neg\neg\cdots$ は「ボトム」A もしくは B の形によって証明可能であるか証明不可能であるかが違うことになる.これは,形式的可換性が原因であり,§5 章で検討するような **T** を論理結合子と見なす体系ではこのようなことは起こらない.

算術ベースで真理概念を研究することのデメリットは，**FS** のような ω-矛盾な真理理論の研究が難しいことである．超準的な自然数に関する計算可能性は定義が難しく，超準的な算術のモデルの研究は広く行われているもの，それらは非直感的であり，テクニカルに難しい．そして，真理概念の研究のはずが，前章において紹介したマッギーやフィールドにおいてのように，正しい自然数概念についての議論にすり変わってしまう．もちろん，統辞論の理論としての算術が ω-矛盾である事は，通常の文が標準的な自然数で表現されることから鑑みて，異常なことではある．その超準モデルにおいて，そのゲーデル数が超準数となるような論理式はどのようなものか，自然な解釈を与えなければならない．

しかし，統辞論を算術に還元することは，決して唯一のアプローチというわけではない．構成的型理論，そしてそれを計算機上に実装した証明支援系では，記号列を形式的算術で行うように自然数でコードするのではなく，有限列をそのままデータ（データ型の要素）として扱う．有限列に関する操作は，そのデータ型上の再帰関数として直接定義する．この方法の利点は，記号列に対する再帰的操作を無理なく，直接的に扱えることである．一々自然数に変換する必要がないため，操作の内容を直感的に理解することができる．

この点は，本論の文脈では，超準数の扱いとして効いてくる．そもそも自然数上の計算としての再帰関数は面倒であり，面倒さが大きく現れるのが超準数の扱いである．一方，自然数論で超準数で表現される論理式は，型理論上では，記号の無限列（**ストリーム**）として扱われる．また，ゲーデル数こそは標準数であっても，ω-矛盾性のパラドックスを引き起こすような論理式も，その記号的表現を考えると，やはりストリームとして表現される．このようなパラドキシカルな論理式は，そのストリームを生成するルールは有限的だが，その出力は無限的であり，その意味で**潜在無限的**な対象である．そして，超準数に対応するような潜在無限的な対象を，直感的に分かりやすく扱える点が記号的な型理論的扱いのアドバンテージである．

3.2　帰納法と余帰納法

前節において型理論を枠組みとして採用することのメリットを述べたが，本節では具体論，すなわち構成的な型理論においていかに潜在的に無限な対象を扱うかを述べる．マッギーの γ はある種の有限的なオートマトンであり，自分自身は有限的であるが，自己言及によって結果的に無限的な文を生成する．このような潜在的に無限的な対象を構成的型理論において扱うための方法として有名なのは「**余帰納法**」である．

これは，構成の各ステップそのものは有限的な手法により続けられるが，構成の最終ステップにたどり着く日は永遠の先延ばしにされるという構成法であり，元来は循環的に無限に動作し続けるオートマトンの動作を記述するために使われてきた．本節では，まず 3.2.1 節において帰納的な定義を振り返り，次に 3.2.2 節において余帰納的な定義を紹介する．

3.2.1　帰納法による構成

本節では，余帰納的構成法との比較のため，帰納的構成法のおさらいとして**帰納的データ型**を紹介する．マーティン・レーフの構成的型理論など，多くの構成的型理論においては，帰納的データ型はもっとも基本的なデータ型（計算機科学の用語で，その要素の構成規則が明示された集合）であり，自然数等を定義するときに使用される．まず帰納的データ型の例を紹介しよう．

定義 7（有限長のリスト）　任意の集合 A にたいし「A **のリスト**」は，$\langle A^{<\omega}, \eta : (1 + (A \times A^{<\omega})) \to A^{<\omega} \rangle$ として，以下のように構成される

- **最初のステップ：** 空列 $\langle\rangle$（1 は $\langle\rangle$ を表現）
- **後続ステップ：** 任意の $a_0 \in A$ と列 $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^{<\omega}$ に対して

$$\eta(a_0, \langle a_1, \cdots, a_n \rangle) = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^{<\omega}$$

このデータ型は，二つの**構成子**（constructor）で構成され，一つ目の構成子である $\langle\rangle$ は帰納法の最初のステップを表現し，二つめの構成子 η は列の一番前に要素を付加する関数を表す（構成の後続者ケースにあたる）．

定義 8（論理式）　帰納的に定義される論理式の集合 **Fml** は以下のように定義される．

- **最初のステップ：** a, b が項なら $a = b$ は論理式（$a = b \in \mathbf{Fml}$ と書く），また $\top, \bot$ も論理式，
- **後続ステップ：**
  - 構成子 $\eta_\wedge$： P, Q が論理式であれば，$\eta_\wedge(P, Q) = P \wedge Q$ も論理式，
  - 構成子 $\eta_\vee$： P, Q が論理式であれば，$\eta_\vee(P, Q) = P \vee Q$ も論理式，
  - 構成子 $\eta_\to$： P, Q が論理式であれば，$\eta_\to(P, Q) = P \to Q$ も論理式，

  注意： $\neg A$ は $A \to \bot$ の省略形とする

同様に，命題論理の推件（sequent）と証明の集合 **Thm** も定義される．ここでは，簡単さのため，カリー・ハワード対応を用い，直観主義命題論理の推件とその証明項（λ-項で表す）のデータ型を同時に定義する[6]．今後，大文字のギリシア文字 Γ, Δ 等は命題型のリストを表現するとする．

定義 9（直観主義命題論理の証明可能な推件と証明項） 二変数の関係 $\_ \vdash \_$ を以下のように帰納的に定義する．

- **最初のステップ：**任意の命題 A と変数 x について $\langle x : A \rangle \vdash x : A$ も証明可能な推件である．
- **後続ステップ：**スペースの都合上，$\rightarrow$ に関する導入規則と除去規則のみを紹介する[7]：
  - **$\rightarrow$-導入規則**（を表現する構成子）：$\langle \cdots, x : A \rangle \vdash \langle M : B \rangle$ が証明可能な推件のとき，$\langle \cdots \rangle \vdash \langle \lambda x.M[x] : A \rightarrow B \rangle$ も証明可能な推件である．
  - **$\rightarrow$-除去規則**（を表現する構成子）：$\Gamma \vdash \langle M : A \rightarrow B \rangle$ と $\Gamma \vdash \langle N : A \rangle$ が両方とも証明可能な推件のとき，$\Gamma \vdash \langle MN : B \rangle$ も証明可能な推件である．

この定式化では，論理結合子の導入規則と除去規則は，共に，証明可能な推件という帰納的に定義されるデータ型の構成子として表現されている．また，証明そのものは「証明項」として，λ-項として表現されている．

帰納的構成法の特徴は，帰納的データ型に属する対象が有限ステップで構成されるだけでなく，逆にある対象がその帰納的データ型に属するかどうかは，有限ステップで判定することができることである．これは，後続ステップの構成子を一つ一つ外側から剥ぎ落としていき，最終的に最初のステップの構成子にたどり着くかを見る．従って，すべての対象が帰納的データ型のメンバーとして構成されているような体系（例えば形式言語など）では，例えばある文字列が帰納的に定義された論理式であるかどうかは，有限ステップで判定できる．

[6] 本来は二変数の命題型 $\_ : \_$（$a : A$ は「論理式 A の証明項は a である」を表現する）および命題型のリスト $\langle \_ : \_, \cdots \rangle$ も帰納的に定義する必要があるが，ここでは省略する．

[7] 直感的わかりやすさを優先するため，通常の推件計算の左導入則の代わりに，右除去則を紹介する．

3.2.2　余帰納法による構成

余帰納法は元来，無限に動き続けるオートマトンの動作を記述することを目的として導入された．本節では、その定義の例として，自動販売機を紹介しよう．自動販売機は，通常，電源を入れてから次に電源を落とすまで長い時間がかかる．自動販売機に搭載されているコンピューターチップの処理速度と比べれば，事実上「無限に動いている」と見なしても近似としては差し支えない．自動販売機の動作は，循環的に動作しつつけるオートマトンを使用し以下のように記述できる：

(1) 通常モード，モニターに「いらっしゃいませ」と表示する
(2) 人がコインを投入をしたら商品選択モードへ移行，商品選択ボタンの電球をつける
(3) 人がボタンを押したら商品投下モードへ移行，缶を落とす
(4) 人が缶を取ったことがセンサーで確認されれば節電モードへ移行
(5) センサーが客を感知したら (1) へ戻る

このように，自動販売機の動作の各ステップは，簡単な有限的動作である．これを有向グラフで表現したのが下図である．

$$\begin{tikzcd}
\text{通常モード} \arrow[r, "\text{コインを投入}"] & \text{商品選択モード} \arrow[d, "\text{ボタンを押す}"] \\
\text{節電モード} \arrow[u, "\text{センサーが人を関知}"] & \text{商品投下モード} \arrow[l, "\text{缶を取る}"']
\end{tikzcd}$$

このオートマトンは，いつ電源が抜かれるか分からず，稼働時間が無際限であるため，純粋に有限的な手段ではその動作を記述できない（モデル上でオートマトンの動作を表現する値は「概念的に無限である」)．しかし，オートマトンのあるステップから次のステップにどう移行するかは，つねに有限時間内で計算できる．ここでのポイントは，上記のオートマトンはたった四つの状態間を遷移するものであり，当然そのプログラムは有限サイズで書けるということである．しかし，そのことと，自動販売機の動作ログが無限に続きうることは別物であり，ここでは無限の長さになる動作ログに焦点を合わせている．余帰納法は，このような有限サイズのプログラムが無限時間動作するオートマトンの動作ログを表現することを可能にする．

もっとも典型的な余帰納的定義は，任意の集合 A に対し，「A の無限ストリーム」$\langle A^\infty, \gamma : A^\infty \to (A \times A^\infty)\rangle$ を定義するものである．

定義 10（A の（無限）ストリーム） A の（無限）ストリーム $\langle A^\infty, \gamma : A^\infty \to (A \times A^\infty)\rangle$ は，後続者ステップにおいて，

$$\gamma(\langle a_0, a_1, \cdots\rangle) = (a_0, \langle a_1, \cdots\rangle) \in (A \times A^\infty)$$

を満たす．

A^∞ は直感的には A の元の無限ストリームであり，γ は，無限ストリーム $\langle a_0, a_1, \cdots\rangle \in A^\infty$ の最初の元 a_0 を除去する役割を持つ（もちろん a_0 を除去した後も依然として $\langle a_1, \cdots\rangle$ は無限ストリームである）．当然帰納的構成法のような構成の最初のステップは存在しない．注意として，ストリームは無限列なので，メンバーかどうかの判定は有限ステップでは不可能である．このように余帰納法は，全体としては無限であるが，各後続者ステップにおいて**無限的対象に関し先頭の元を取り出すような有限的操作が可能である**（**生産性** Productivity）という直感を表現する（Danielsson 2010）．

余帰納的構成法は，このような余帰納的定義によって定義される集合 A^∞ の存在を保証する理論である．ここでのポイントは，この理論においては A^∞ の元の構成法は与えられず，A^∞ の元を A の元と A^∞ の元に分解する方法のみが与えられているということである．つまり，A^∞ の元は A^∞ の元から構成する他はない．この点で，余帰納的に構成された対象は，非常に強い意味において循環的であると言うことができる（もちろん素朴集合論などと比べればマイルドであり，古典論理上で矛盾を導出しない程度に循環的な理論である）．

3.3　FS を部分的にシミュレートする余帰納的トイ言語

本節では，**FS** におけるパラドキシカルな論理式を表現するために，**FS** を構成的型理論上でシミュレートする余帰納的なトイ言語を構成する．なお，**FS** を正確にシミュレートするためには，もちろん真理結合子だけではなく他の論理結合子および量化子も必要である．他の結合子は帰納的に構成されるため，本当はこの $\mathbf{Form}^\infty$ は帰納的データ型と余帰納的データ型の混合型 (mixture) となるはずである．ただし，本論では，スペースの都合上，一部のみを扱う．

定義 11　$\mathbf{Form}^\infty$ は余帰納的な論理式のなすデータ型であり，以下を満たす．

- 結合子 $\to$ をもつ：ただし，次章での分析のために，定義を詳細化し，以下の二種類に細分化しておく
  - 結合子 $\to_0$: $\mathbf{Form} \to \mathbf{Form}^\infty \to \mathbf{Form}^\infty$ をもつ
  - 結合子 $\to_1$: $\mathbf{Form}^\infty \to \mathbf{Form} \to \mathbf{Form}^\infty$ をもつ

  否定 $\neg A$（ただし $A : \mathbf{Form}^\infty$）は $A \to_1 \bot$ として表現される（$\bot : \mathbf{Form}$)).
- 真理に関する結合子 $\mathbf{T} : \mathbf{Form}^\infty \to \mathbf{Form}^\infty$ をもつ
- 任意の $\mathbf{T}\varphi$ という形の余帰納的論理式を仮定する．このとき，真理結合子に関する除去規則は，構成子 $\gamma_\mathbf{T}$ を使い，以下のように表現される．

$$\gamma_\mathbf{T}(\mathbf{T}\varphi) = \varphi \in \mathbf{Form}^\infty$$

ただし $\mathbf{Form}$ は帰納的に構成された論理式のデータ型とする．

$\mathbf{T}$ は余帰納的な論理式を構成するための必須の結合子となる．

例 2

- マッギーのパラドックスの文 γ は，以下の形で表現できる．

$$\gamma = \neg\mathbf{TTT}\cdots$$

- 任意の自然数 n に対し，ヤブローのパラドックスを招く文 S_n は，以下の形で表現できる：

$$\neg\mathbf{T}(\neg\mathbf{T}(\neg\mathbf{T}(\cdots) \wedge (\cdots)) \wedge (\cdots)) \wedge (\neg\mathbf{T}(\cdots) \wedge (\cdots))$$

  注意として，S_n はみな同じ形となる（Yablo 1993）（この意味において，ヤブローのパラドックスは自己言及のパラドックスとなる）．前述のように，これらはみな $\neg\mathbf{T}(\cdots) \wedge (\cdots)$ が生成する無限の入れ子構造をなすと見なせる．

なお，生産性概念は，形式的な真理理論を余帰納的データ型を扱えるように拡張された構成的型理論によってシミュレートする際において本質的なものである．そもそも **NEC**，**CONEC** 規則は生産性，つまり構成の 1 ステップの話しかしていない．その点は，適用対象が帰納的に定義された有限的な論理式であろうが，余帰納的なストリームであろうが代わりがない．

$$\frac{\varphi}{\mathbf{T}\varphi}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{T}\varphi}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

この二つの間のハーモニーは問題なく，問題が出てくるのは，**NEC**，**CONEC** 規則と，他の論理結合子と真理述語の可換性との間である（4.3 節で検討する）．

2.2 節において，証明論的意味論は，真理概念の本質は主張可能性の還元を妨害しないということを主張すると述べた．つまり，**T** を使用しても，推論において結論の主張可能性を前提の主張可能性に還元する再帰的な操作（正規化定理においては証明木のカット・アンド・ペーストで行われる）を **T** は妨害しない，ということである．この意味において，対象となる論理式が有限長であろうが無限長であろうが，構成の各ステップで有限の答えの出る再帰的操作を行う，それが証明であると考えるのは非常に自然であると思われる．次章では，このトイ言語を使用し，**FS** における ω-矛盾性，特にパラドキシカルな論理式の証明がいかに可能になるのかをシミュレートし分析していきたい.

§4　ハーモニーの拡張

本節では，前節で紹介した余帰納的データ型に属する余帰納的論理式を持つ真理理論の体系を定義する．最初に，4.1 節と 4.2 節では，帰納法と余帰納法の意味を考える．まず 4.1 節において，通常の古典論理の体系においては，定理の証明が帰納的なプロセスである場合を考察する．最初のステップは公理であり，後続者ステップでは既に証明された定理に推論規則，論理結合子と量化子の導入規則と除去規則を適用し新しい定理を証明していく．証明論的意味論は，このような帰納的プロセスにおける構成（証明）こそ論理式に意味を与えると解釈する．一方，**FS** における γ のようなパラドキシカルな文は，前節で紹介した余帰納的な対象であると考える事ができる．これらの文を分析する場合，文自体は無限の長さとなり，証明は余帰納的対象（Coquand 1993）の構成プロセスに準じた形が必要になる．4.2 節では，帰納的に構成された定理の場合のアナロジーとして，余帰納的に構成された定理に証明論的意味論を与えるにはどう考えたらよいかを，Setzer（2012）の線で検討する.

次に 4.3 節では，前節の続きとして，余帰納的論理式によって構成される形式的真理理論で真理結合子 **T** の除去規則に相当するガードされた再帰法の詳細について説明する．同時に，マッギーのパラドックスにおける真理述語の形式的可換性の不成立が何故起こるかを，このガードされた再帰法の観点から説明する.

4.1　帰納的構成法では導入規則によって意味が与えられる

本節では，振り返りとして，帰納的に構成される定理についての証明論的意味論のケースを検討する．通常の証明論的意味論の場合，定理に意味を与えるのは **ハーモ**

ニーのとれた導入規則と除去規則である．この発想は，自然演繹を発明したゲンツェン（Gentzen 1934, p. 80）まで遡ることができるが，ゲンツェンにとっては導入規則は結合子の「**定義**」そのものであり，除去規則は導入規則の定義から定まる「**結論**」である．つまり除去規則は導入規則からある関係を満たすものとして定義された．帰納的に論理式を定義する場合，このゲンツェンの定義が一番説明しやすいため，本論ではこの方式を採用する．本節では，4.1.1 節において結合子に意味を与えるものとしての導入規則を説明し，4.1.2 節において導入規則から定まる除去規則について説明を加える．

4.1.1　構成子 η は導入規則を表現する

証明論的意味論の場合，例えば $\wedge$ の導入規則は以下のように書ける．任意の論理式 $A, B \in \mathbf{Thm}$ に対し

$$\eta(A, B) = A \wedge B \in \mathbf{Thm}$$

この考え方を一般化すると，有限列に対しても証明論的意味論のアナロジーを考える事ができる．つまり，任意の $a_0 \in A$ と列 $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^{<\omega}$ に

$$\eta(a_0, \langle a_1, \cdots, a_n \rangle) = \langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle \in A^{<\omega}$$

同じ形式で与えられる．

通常，帰納的データ型の構成要素の意味は，構成子によって定義されると見なされる（例えば自然数の意味は，構成子 $\bar{0}$ および **suc** によって規定されると考えるのは自然である）．この立場は，論理結合子の意味についてのゲンツェンの考え方と整合的である．つまり，導入規則は論理結合子の定義であり，論理結合子の意味を規定する．

4.1.2　除去規則 γ は，導入規則と対になるように定まり，再帰関数によって表現される

ゲンツェンに倣って導入規則を論理結合子の定義と見なした場合，除去規則は**定義からの帰結**である．すなわち，最終的にその結合子の導入規則と除去規則の間にハーモニー（結合子の保存拡大性や証明の正規化可能性）が成立するように，除去規則は導入規則に対応する形で定められる．

この点をより詳細に見てみよう．証明論的意味論の基本的な考え方の一つとして，「**反転原理**」と呼ばれるものがある．反転原理は，プラヴィッツ（Prawitz）によって導

入されたが，その基本アイディアは以下のようなものである：以下の例を見てみよう．

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[v:A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\to B}}{B}\ \to+ \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{array}$$

このとき反転原理は以下を主張している：B の **→-除去規則を使用した左側の証明も，先ほどと同じく，→-除去規則を使用しない右側の証明 を「既に含んでいる」**．この証明は，もとの →-導入規則・除去規則を使った左側の証明図の左側の A の証明部分を**切り取り**，もとの証明図の右上側に**貼り付け**たものである．この意味で，反転原理は，導入規則と除去規則の間に，上記のような**証明図の付け替え**，取り回しが出来る関係があればよいと主張している．実際，上記のような証明図の付け替えは，論理結合子の保存拡大性の証明や，証明の正規化可能性の証明を行う上で，中心的な役割を果たす．

ここでのポイントは，除去規則は，例えば正規化可能性の議論の場合，証明の中の情報，つまり $A \wedge B$ の証明から A の証明の情報を，再帰的手法（証明図のカット・アンド・ペースト等）により取り出すということである．定義 9 の例を思い出してみよう．この例においては，証明は λ-項として与えられた．$A \to B$ の証明項を $\lambda x.Nx$ とし，A の証明を a とすると，B の証明は Na と書ける．上記の証明 (1) を証明 (2) に書き換える作業は，まさしく λ-項の β-変換に相当する．証明をゲーデル数で記述する通常の算術化のケースでも，反転原理でやっていることは，証明のゲーデル数をデコードし，そこから (1)A の証明の部分と (2)A を仮定して B を導出する部分を取り出し，最後に両者をマージする計算をするということである．証明の正規化可能性定理は，上の計算が必ず有限ステップで停まることを保証する．つまりこの作業はゲーデル数上の再帰的関数として表現される．以上より，**除去規則はこのデータ型上の再帰関数として表現される**と考える事ができる．さきほどの論理式の例で言えば，除去規則に対応するものとして，$\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1$ という二つの再帰関数が定義され

$$A \wedge B \in \mathbf{Thm} \to \bar{\eta}_0(A \wedge B) = A \in \mathbf{Thm},\ \bar{\eta}_1(A \wedge B) = B \in \mathbf{Thm}$$

を満たす．この関数は，通常の $\wedge$ の除去規則に相当する．

このように，論理結合子に関するハーモニーは，導入規則が帰納的に定義される論理式のデータ型の構成子であり，除去規則はその上の再帰関数として扱うことができる．最終的に，導入規則を有限回適用して構成された対象の型判定（その対象がその

帰納的データ型に属するかどうかの判定)は，除去規則を有限回適用することで構成の最初のステップまで遡ることができるようになる(つまり自然数型の任意の数項は，再帰関数 $y = x \dot{-} 1$ を有限回適用すれば $\bar{0}$ にまで戻るということである).

4.2　余帰納的な構成法では除去規則によって意味が与えられる

本節では，余帰納的に構成される定理についての証明論的意味論のケースを検討する．最初に注意として，系 1 で述べたように，ハーモニーを正規化可能性として定義した場合，余帰納的論理式にハーモニーを与えるのは無理だと言うことを指摘しておく．無限長の余帰納的論理式の証明は，無限の長さのものもあるため，その証明を有限ステップで遠回りのない形に書き換える(正規化する)のは不可能である．従ってハーモニーを，前述のような，構成子とそれに対応して定義される関数(帰納的データ型の場合は再帰関数であった)のペアとして考える必要がある．本節では，その構成子と関数の対応関係が満たすべき性質として**型検査可能性**を要求し，この観点からハーモニーの定義の拡張を与える(Coquand 1993；Danielsson 2010).

型検査可能性とは，対象の構成法が有限的な図式として表現可能であり，任意の有限的な図式が与えられたとき，そのパターンがその図式に合致しているかどうかを有限的に(つまり計算機上で)判定可能であることを要求する．帰納的に定義される論理式を対象にし，証明も有限の長さであるとする通常の証明論的意味論の考え方においては，型検査可能性は，反転原理による証明図の正規化可能性と同一視できる．この意味で，既存の論理結合子のハーモニー概念は，帰納的データ型に対する型検査可能性であると言い換えることもできる.

一方、**FS** においては，マッギーの γ もヤブローのパラドックスの S_n も，その分の構成の一ステップ毎は，**NEC** 規則などの規則の適用で与えられる．無限的なのは，規則が適用される対象である(この意味で 3.2.2 節のオートマトンの動作のよい例となる)．構成の全体の形式は，各ステップの操作が有限的な規則に従った(つまり生産性を持つ)図式で与えられる．このような，有限な記号の規則に従った処理のパターン，すなわち図式は，型検査可能と呼ばれ，証明支援系等の機械でもチェック可能である.

さて，余帰納的データ型は，帰納的データ型の双対にあたるため，明示的な構成子を持つのは除去規則の方である．そのため，ハーモニーの対象として関数として定義されるのは導入規則の方となる.

4.2.1　構成子 γ は除去規則を表現する

もっとも直感的にわかりやすい余帰納的対象であるストリームの場合，$\langle a_0, a_1, \cdots \rangle \in A^\infty$　という無限列に対し，構成子 γ は以下のように適用される．

$$\gamma(\langle a_0, a_1, \cdots \rangle) = (a_0, \langle a_1, \cdots \rangle) \in (A \times A^\infty)$$

つまり，γ は無限列の先頭の元 a_0 を取り出す関数としてみることができる（がこれは余帰納的データ型の構成子である）．

4.2.2　導入規則は，除去規則と対になるように定まり，余再帰関数によって表現される

余帰納的データ型においては，構成子として表現される基本的な規則が除去規則であるため，導入規則は（帰納的データ型とは双対に）除去規則と対になるように定まるはずである．すなわち，導入規則は，余帰納的データ型上の「計算可能」な関数，すなわち**余再帰的関数**として表現される．しかし，その際，生産性，つまり各ステップごとの関数の値の計算可能性という制約条件があるために，特殊な**ガードされた余再帰法**と呼ばれる方法で定義された関数が必要になる．詳細は次節で説明する．

なお，ストリームの構造を持つ終代数を **弱終余代数**という（Setzer 2012）．従って，ハーモニーを持つ論理体系は，代数的には弱終余代数を形成する．

注意として，**FS** の真理述語と結合子の可換則は，みな導入規則として解釈可能だと言うことを指摘しておく．例えば $\mathbf{T}(\varphi \to \psi) \equiv \mathbf{T}(\varphi) \to \mathbf{T}(\psi)$ は

$$\frac{\mathbf{T}(\varphi \to \psi)}{\mathbf{T}(\varphi) \to \mathbf{T}(\psi)}$$

という形に，$\to$ の導入規則と考えることができる．

最後に，生産性の真理理論としての意味づけを考察する．**生産性**は，無限ストリームの場合が典型的だが，全体として無限であっても，操作の各 1 ステップは計算可能であることであることを要求する．もちろん，ある対象がその型に属するかどうかの判定は，除去規則を無限に適用し続けることになるため，有限ステップでは止まらない．しかし，全体として，図式としてその対象がどのように構成されているかが分かっているため，除去規則に相当する構成子が（型理論の意味で）正しく適用されているかを検査すれば，それでその対象がそのデータ型に属しているかをメタな立場から検証できる．計算機科学の用語で言えば，型検査は有限的に可能であることを必要

とする．計算機科学として当然の要求であろう．真理理論的には，この要求は，真理の意味論的役割を極力抑えるためと言える．真理述語がないところで型検査が可能ならば，真理述語を足しても可能であるべきである．これは，デフレ主義の主張の計算機科学版といえる．

4.3 導入規則としてのガードされた余再帰法

本節では，前節終盤で述べた，余帰納的データ型の導入規則に相当するガードされた余再帰法について詳細を紹介するとともに，その用語法で昔から知られた形式的な真理理論における可換性の不成立の問題を説明する．

前述のように，あるデータ型の要素となる対象の構成は導入規則の適用であり，余帰納的データ型においては生産性という文脈において導入規則は余再帰関数の適用として表現される．前述のように **NEC**，**CONEC** は生産性，つまり 1 ステップの構成の話しかしていない．特に除去規則 **CONEC** は先頭の **T** を除去するのみである．

$$\frac{\varphi}{\mathbf{T}\varphi}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{T}\varphi}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

導入規則も，それに対応し，当然，1 ステップ（もしくは有限ステップ）毎の計算可能性を表現して欲しい．これを表現するのが以下の**ガードされた余帰納法**である．

定義 12（ガードされた余帰納法） 余再帰的データ型 F 上の余再帰関数が**ガードされている**とは，F の定義中の F 自身についての再帰呼び出しは，余再帰関数の各ステップの計算の中には現れない場合をいう．

ガードされた余再帰関数は，計算機科学では遅延呼び出しの文脈で議論されてきた．

例 3 以下の余再帰関数 **map** を考える．

- **map** は，任意の再帰関数 f（入力も出力も自然数）と自然数のストリーム $s_0 = \langle a_0, a_1, \cdots \rangle$ を入力されると，ストリームの各項に f を適用した別のストリーム $s_1 = \langle f(a_0), f(a_1), \cdots \rangle$ を出力する関数である．
- 型としては **map**: $(\omega \to \omega) \to \omega^\infty \to \omega^\infty$ を持つ．定義は以下の通りである．

$$\mathbf{map}\, f\, \langle x, x_0, \cdots \rangle = \langle f(x) \rangle \frown (\sharp\, \mathbf{map}\, f \langle x_0, x_1, \cdots \rangle)$$

ここで，記号 $\sharp$ は「先頭の項 $f(x)$ を計算する際には $\sharp$ より後ろの項の中身を計算する必要はない」，$\sharp$ 以降は計算として独立していることを主張している．も

ちろん x は自然数であり，f は再帰関数だから，$\sharp$ 以降に無限個の項が残されているとはいえ，$f(x)$ の値は有限ステップで計算可能なはずである．

- ここで，関数 **map** の再帰呼び出しは $\sharp$ の内側にしか現れない．$\sharp$ 記号の内と外は，本質的にステータスが違う（様相論理の様相オペレーターの内外が違うのと同じように違う）．

前述のように，例えばハーモニーを正規化可能性と定式化した場合の，導入規則と除去規則のハーモニーは証明木の再帰的操作によって担保される．そのため，余帰納的対象に証明概念を拡張する場合も，生産性の意味で各ステップ後との操作の再帰的操作可能性は担保されるべきである．従って，Setzer（2012）等では以下が主張されている．

提言 1　真理結合子 **T** を持つ余再帰的論理式のデータ型が，**T** に関し導入規則と除去規則のハーモニーを満たすためには，導入規則はガードされた余再帰関数の形で与えられるべきだ．

例えば，**NEC** は，ガードされた余再帰関数で表現できるため，これを除去規則として要請することに何の問題もない．しかし，前述のように **FS** は **NEC** 以外にも導入規則に相当する規則（真理述語と論理結合子の形式的可換性）を持つ．これらが問題となる．

しかし，ガードされた余再帰的関数として除去規則を定義することは，どのような含意を持つのだろうか．実は，**FS** における真理述語と結合子の可換性を犠牲にしなければならないと言う結論が出る．

観察 2　マッギーの補題 4 における ω-矛盾性の導出の証明木の以下の部分に注目してみよう．

$$\frac{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma \to \forall x\neg\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\forall x\neg\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)} \quad (1)$$

- この箇所では，$(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x\dot{\to}y) \equiv \mathbf{Tr}(x) \to \mathbf{Tr}(y)]$ という真理述語と結合子の形式的な可換則を使用している．
- もちろん，任意の具体的な論理式 φ, ψ に関し，補題 2 でのように，**NEC**，**CONEC** 規則だけで $\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\psi\urcorner)$ を証明するのは簡単である．しかし，一般の論理式のゲーデル数 x, y に関しては上が成立する保証はない（x, y が超準数であり，計算結果が標準数の場合と異なるかもしれないから

である).

さて，この形式的可換性を，$\mathbf{Form}^\infty$ 上において，真理結合子の余再帰的計算という視点から再定式化してみよう．前述のように，$\mathbf{Form}^\infty$ は以下の二種類の含意結合子を持つ.

(1) 結合子 $\to_0$: $\mathbf{Form} \to \mathbf{Form}^\infty \to \mathbf{Form}^\infty$
(2) 結合子 $\to_1$: $\mathbf{Form}^\infty \to \mathbf{Form} \to \mathbf{Form}^\infty$

(1) の場合，以下の規則が対応する.

$$\frac{\mathbf{T}(\alpha \to_0 A)}{\mathbf{T}(\alpha) \to_0 \mathbf{T}(A)}$$

$\mathbf{T}(\alpha \to_0 A)$（ただし $\alpha : \mathbf{Form}$ という標準的論理式で $A : \mathbf{Form}^\infty$ という余帰納的論理式）という形の論理式である．また，$\mathbf{T}(\alpha) \to_0 \mathbf{T}(A)$ を考えると，$\mathbf{T}(\alpha)$ は通常の長さの論理式であるため，その内容の計算は有限的に終わる．一方，$\mathbf{T}(A)$ の内容の計算は，A は余帰納的論理式のため，計算の終了そのものには無限のステップが必要である．この意味で，この規則は，ガードされた余再帰法に対応した操作である.

(2) の場合，以下の規則が対応する.

$$\frac{\mathbf{T}(A \to_1 \alpha)}{\mathbf{T}(A) \to_1 \mathbf{T}(\alpha)}$$

$\mathbf{T}(A \to_1 \alpha)$（上と同様 $\alpha : \mathbf{Form}$ という標準的論理式で $A : \mathbf{Form}^\infty$ という余帰納的論理式）という形の論理式である．また，$\mathbf{T}(A) \to_1 \mathbf{T}(\alpha)$ を考えると，$\mathbf{T}(A)$ の内容の計算は，A は余帰納的論理式のため，計算の終了そのものには無限のステップが必要である．そして，その計算が終わらないと，後尾部分 $\mathbf{T}(\alpha)$ の計算にかかることはできない．従ってこの規則は，**ガードされた余再帰法には対応していない操作**と言える．従って，以下が結論できる：

定理 3　**FS** における形式的な真理述語と論理結合子の可換性の要請（定義 4）は，真理述語を論理結合子と見なすこと（導入規則と除去規則の間にハーモニーが成立すること）を妨害する.

注意として，補題 4 が示すように，ω-矛盾性も，形式的な真理述語と論理結合子の可換性の要請によって引き起こされる．そのため，真理が論理結合子と見なせる体系は同時に ω-無矛盾である可能性も高い.

§5 結びに代えて：余帰納的データ型の構成子としての真理結合子

本節では，全体のまとめとして，真理結合子が論理結合子と見なせる場合，そのことから真理の本性についてどういう結論を導くことができるのかを検討する．

本論の目的は，証明論的意味論の見地から，古典論理上 **NEC**，**CONEC** 規則を持つ真理理論（**FS** など）の分析を行うことであった．それらの体系では，以下の二つの規則のおかげで，まるで真理述語を論理結合子として見なしてもよいかのように見える．

$$\frac{\varphi}{\mathbf{Tr}(\varphi)}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{Tr}(\varphi)}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

しかし，問題もある． 真理述語は論理結合子の条件「ハーモニー」を満たさないという問題である．特に伝統的な視点から言うと，以下の二点が問題となる．

- ω-矛盾性による保存拡大性の壊れ
- 無限的論理式による証明の正規化可能性の壊れ

これらの問題が起こる理由は，**FS** などの真理理論上では，有限的な手法により無限的な論理式（**余帰納的**論理式）が定義可能になり，それが上記を破壊することであった．本論では，それらの余帰納的論理式の分析を行うため，構成的型理論上で余帰納的なトイ言語 $\mathbf{Form}^{\infty}$ を導入し，その上で余帰納的言語上にまでハーモニー概念を拡張してみせた．それは，結合子の除去規則は論理式から成る余帰納的データ型の構成子であり，導入規則は余帰納的データ型上で定義されるガードされた余再帰的関数で定義されればよかった．また，その分析結果を **FS** と比較し，**FS** の真理述語に関する規則は，拡張された余帰納的言語に対するハーモニー概念と衝突することを示した．

前章で検討したように，**FS** の真理述語は，そのままの形では論理結合子と見なすわけにはいかない．真理述語と他の結合子との形式的な可換性の要請は，除去規則をガードされた余再帰関数で表現することを妨害する．そのため，余再帰的な論理式についての真理結合子の導入規則と除去規則がハーモニーを奏でることはできない．言い換えれば，**FS** の形式的可換性の要請を排除することが，真理を論理結合子と見なすことの条件である．

では，そのような体系では，真理とはどういう本性を持つものだと考えられているのだろうか．さて， ここで， 2.2 節で検討した，**証明論的意味論**の立場を再確認して

みよう.「論理結合子の意味は，ハーモニーの取れた導入規則と除去規則によって与えられる」という立場であった. そして，真理概念を，述語 **Tr**(x) ではなく，結合子 **T** としてみなすということは，真理概念の本質は，主張可能性の還元，すなわち推論において結論の主張可能性を前提の主張可能性に還元する作業を **T** は妨害しない，ということである. 帰納的に定義される論理式との違いは，余帰納的論理式が対象の場合，還元の操作は余再帰関数によって与えられ，操作全体が終わることはないが，1 ステップ毎の操作は必ず有限時間に終わるということである. その意味において $\mathbf{CL}\forall^{\mathbf{T}}$ の場合と同じく，証明論的意味論の意味において，真理概念はなんら積極的な役割（意味）をもたない. この立場での真理結合子 **T** の最大の役割とは，身も蓋もないことであるが，**無限的な長さの余帰納的な論理式を構成することを可能にする**ことである. 関連して，余帰納的な言語において，**T** に関し除去規則が成立することは，ゲンツェンの意味で，**T** の定義といっても良い事項であるが，**T** に関する導入規則は決して自明ではない. 余帰納的論理式に関し導入規則により可換性が要請できるかどうかは決して自明ではないからである.

このような真理観は，真理に関するデフレ主義の流れに属し，余帰納的な論理式はまさしくデフレ主義者の言う「無限連言」を計算機科学の用語で一般化したものになっている. これまで，デフレ主義は ω-矛盾性の問題について態度を決めかねていたが，今後，本論の線で，言語を拡張し論理結合子として真理概念を形式化することで，さらに分析を進めることが可能になるだろうと期待される.

参考文献

Beal, J. C. 2008. *Spandrels of truth*. Oxford: Oxford University press.

Belnap, Nuel D. 1963. Tonk, plonk and plink. *Analysis*, 22: 130–134.

Coquand, Thierry. 1993. Infinite objects in type theory. *TYPES*, 62–78.

Danielsson, Nils A. 2010. Beating the productivity checker using embedded languages. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 43: 29–48. Preprinted Edition.

Dummett, Michel. [1976]1993. *The logical basis of metaphysics (The William James Lectures, 1976).* Cambridge: Harvard University Press. Reprinted Edition.

Freidman, Harvey, and Michael Sheared. 1987. An axiomatic approach to self-referential truth. *Annals of Pure and Applied Logic* 33: 1–21.

Gentzen, Gerhard. 1934. Untersuchungen über das logische Schliessen. I *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210.

Translated in: *The collected papers of Gerhard Gentzen*, ed. M. Szabo, pp. 68–131. Amsterdam: North-Holland.

Gupta, Anil, and Nuel D. Belnap. 1993. *The revision theory of truth*. Cambridge: MIT Press.

Halbach, Volker. 2012. *Axiomatic truth Theories*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hájek, Petr P., Jeff B. Paris, and John C. Shepherdson. 2000. The liar paradox and fuzzy logic. *Journal of Symbolic Logic* 65: 339–346.

Horsten, Leon. 2011. *The Tarskian turn*. Cambridge: MIT press.

Leitgeb, Hannes. 2001. Theories of truth which have no standard models. *Studia Logica* 68: 69–87.

McGee, Vann. 1985. How truthlike can a predicate be? A negative result. *Journal of Philosophical Logic* 17: 399–410.

Prior, Arther. 1960. The runabout inference ticket. *Analysis* 21: 38–39.

Restall, Greg. 1993. Arithmetic and truth in Łukasiewicz's infinitely valued logic. *Logique et Analyse* 36: 25–38.

Setzer, A. 2012. Coalgebras as types determined by their elimination rules. In *Epistemology versus ontology*, eds. P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren, and G. Sundholm, pp. 351–369, New York: Springer.

Tarski, Alfred. [1944]1987 年.「真理の意味論的観点と意味論の基礎」『現代哲学基本論文集 II』飯田隆訳. 51–120 頁, 東京：勁草書房.［原題：*The semantic conception of truth and the foundation of semantics.* (*Philosophy and Phenomenological Research 4.*, 1944.］

Yablo, Stephen. 1993. Paradox without self-reference. *Analysis* 53: 251–252.