数学研究科修士論文

多変数局所関数等式の b-関数による具体的表示

筑波大学大学院 数学研究科

天野 勝利

2001 年 1 月

指導教官: 木村達雄

謝辞

修士論文の作成にあたり, 指導教官の木村達雄先生には今回の研究テーマを提案していただき, さらにその後, 忙しい中にあっても, 幾度となく貴重な助言を頂きました.

また, 数学系の山崎隆雄先生には二年間セミナーをみていただき, 全面的な御指導をしていただきました. さらに山崎先生は執筆中の本論文にもほとんど目を通してくださり, 数学的な間違いをいくつか指摘してくださったほか, 文章をより良いものとするための多くの御意見を賜わりました. 筆者はそれらを十分に本論文に反映することはできませんでしたが, もし文章の中に良い部分があるならばそれは山崎先生のおかげです.

それから城西大学の小木曽岳義先生, 大学院の先輩の杉山和成さんは, 御厚意で毎回のセミナーにお付き合いくださり, 概均質ベクトル空間に関する筆者の初歩的な質問にも忍耐強く答えてくださいました. また両氏にはセミナー以外でも日常的にさまざまな相談にのって頂き, 多くの励ましを頂きました.

本論文を完成させることができたのはこれらの方々の多くの助けがあったおかげであり, 深く感謝を捧げたいと思います.

また最後に共同研究者の藤上雅樹君にもお礼を述べたいと思います. 今回藤上君とはたくさんの意見を交換し, そして多くの刺激を受けました. それはとても貴重な経験であったと思います.

天野 勝利

目 次

1 Introduction **2**

2 概均質ベクトル空間とその相対不変式 **5**

3 多変数 b-関数 (群が reductive な場合) **8**

3.1 群が reductive な場合の概均質ベクトル空間 8

3.2 b-関数の存在とその次数について 10

3.3 Cocycle condition を満たす多項式たち 13

3.3.1 Group cohomology からの準備 14

3.3.2 Free Abel 群から有理関数体の乗法群への cocycle 15

3.3.3 一次式の積にかけることと, その係数についての議論 18

3.4 b-関数についてのまとめ 20

4 複素数体上の局所ゼータ関数 (standard case) **21**

4.1 Γ-関数 21

4.2 $z_{\mathbb{C}}(s)$ の計算 21

5 実数体上の局所ゼータ関数 (standard case) **26**

5.1 実数体上の基本相対不変式 26

5.2 $z_{\mathbb{R}}(s)$ の計算 28

6 多変数局所関数等式の具体的表示 **33**

6.1 複素数体上の局所関数等式 33

6.2 実数体上の局所関数等式 36

7 例 **39**

7.1 $(GL_1^{m+1} \times SL_m, \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1)$ 39

7.2 $(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$ 40

7.3 $(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*)$ 42

8 Appendix **43**

8.1 $Y_{\mathbb{R}}$ に群が推移的に作用しない場合について 43

8.2 局所ゼータ関数の b-関数への応用 44

1 Introduction

K を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$, $V=\mathbb{C}^n$, $GL_n(\mathbb{C})\supset G$ を K 上定義された連結かつ reductive な線形代数群とする.

このとき (G,V) が概均質ベクトル空間であるとは, ある $v_0\in V$ があって, Gv_0 が V の Zariski 開集合になっていることをいう. このとき $Y=Gv_0$ を (G,V) の open orbit, $S=V-Y$ を singular set と呼ぶ. 特に S が超曲面のとき, (G,V) は正則概均質ベクトル空間であるという.

また, V 上の恒等的に 0 でない有理関数 $f(x)$ について, 任意の $g\in G$ に対し $f(gx)$ が $f(x)$ の定数倍となるとき, $f(x)$ を (G,V) の相対不変式という. 特に (G,V) が概均質ベクトル空間ならば, ある K 上既約な相対不変多項式の組 $P_1,\cdots,P_r$ が存在して, 任意の K 係数相対不変式は定数倍を除き $P_1,\cdots,P_r$ の巾積と一致することが知られている. この $P_1,\cdots,P_r$ を K 上の基本相対不変式という.

以下, (G,V) は正則概均質ベクトル空間であるとする. このとき, ある相対不変式 $f_0(x)$ があって $f_0(gx)=(\det g)^2 f_0(x)$ となる ([Kt1, 系 2.17]) ので, 半整数 $\kappa_1,\cdots,\kappa_r$ を $f_0(x)=P_1(x)^{2\kappa_1}\cdots P_r(x)^{2\kappa_r}$ となるようにとる. また, V_K, Y_K, G_K を V, Y, G の K 有理点全体とし, Y_K に G_K が推移的に作用していると仮定する.

さて, $\mathcal{S}(V_K)$ を V_K 上の Schwartz 空間とする. そして $s=(s_1,\cdots,s_r)\in\mathbb{C}^r$, $\mathrm{Re}(s_1)>\kappa_1,\cdots,\mathrm{Re}(s_r)>\kappa_r$ に対して, tempered distribution Z_K を

$$Z_K(s,\Phi)=\int_{Y_K}|P_1(x)|_K^{s_1-\kappa_1}\cdots|P_r(x)|_K^{s_r-\kappa_r}\Phi(x)dx \quad (\Phi\in\mathcal{S}(V_K))$$

により定めると, $Z_K(s,\Phi)$ は各 Φ に対して $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される. この $Z_K(s,\Phi)$ は局所ゼータ関数と呼ばれる.

さらに, $\hat{\Phi}$ を Φ の Fourier 変換とするとき, 局所関数等式:

$$Z_K(s,\hat{\Phi})=c(s)Z_K(\kappa-s,\Phi)$$

が成り立つ ([Sm1], [Sf]). $c(s)$ は Φ によらない有理型関数である.

本論文の目的は, この $c(s)$ を具体的に決定することである. 例えば $K=\mathbb{C}$ のときには次のような定理が証明できる:

定理

$b_1,\cdots,b_r$ を, $\bar{P}_i(\partial_x)[P_1(x)^{s_1}\cdots P_i(x)^{s_i+1}\cdots P_r(x)^{s_r}]=b_i(s)P_1(x)^{s_1}\cdots P_r(x)^{s_r}$ $(i=1,\cdots,r)$ なる b-関数とする. これに対し $\gamma_{\mathbb{C}}(s_1,\cdots,s_i+1,\cdots,s_r)=h_i^{-1}b_i(x)\gamma_{\mathbb{C}}(s)$ $(h_i\in\mathbb{R}_{>0},\ i=1,\cdots,r)$ となる Γ 関数の積 $\gamma_{\mathbb{C}}(s)$ があって,

$$c(s)=\prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{2s_i-\kappa_i}\frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa)}{\gamma_{\mathbb{C}}(-s)} \quad (d_i=\deg P_i,\ \kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_r)).$$

また, $K=\mathbb{R}$ のときには, 基本相対不変式がすべて multiplicity free ($x=(x_1,\cdots,x_n)$ とするとき各変数 x_j については一次式) であるという条件のもと, 上記定理と同様の結果が成り立つ. そのときは b-関数がとても良い形をしているため, 各 $i=1,\cdots,r$ について $\gamma_{\mathbb{R}}(s_1,\cdots,s_i+2,\cdots,s_r) = 2^{-d_i}h_i^{-1}b_i(x)\gamma_{\mathbb{R}}(s)$ となる $\gamma_{\mathbb{R}}(s)$ をとることができ, $c(s)$ は

$$c(s)=\prod_{i=1}^{r}(\pi^{-d_i}h_i)^{s_i-\frac{\kappa_i}{2}}\frac{\gamma_{\mathbb{R}}(s-\kappa)}{\gamma_{\mathbb{R}}(-s)}$$

と計算される.

ここで考えられている局所関数等式の係数 $c(s)$ は佐藤幹夫 ([Sm1]) により既に符号を除いて決定されており, また, $r=1$ の場合に井草準一 ([I1, 2, 3]) によって符号をこめて計算されている. 他にも, 群が simple で, かつ普遍推移性をもつ正則概均質ベクトル空間においては, 細川尋史 ([H]) による井草局所ゼータ関数 (p 進体上の局所ゼータ関数) の計算を通じて $c(s)$ が explicit に決定できるとされていた. 本論文において新しいのは, 一般の $r\geq 1$ について, 井草局所ゼータ関数の計算を経なくとも, b-関数さえわかれば $c(s)$ は符号をこめて具体的に決定される, ということを示した点にある.

さて, 定理の結果は, 次のような標準的な局所ゼータ関数の計算を行うことによって得られる:

$\Phi(x)$ として standard function $\phi(x) = e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}$ ($K=\mathbb{C}$ のとき), $\phi(x)=e^{-\pi\,{}^t xx}$ ($K=\mathbb{R}$ のとき) をとる. すると $\hat{\phi}=\phi$ となる. そして, K 上の基本相対不変式 $P_1(x),\cdots,P_r(x)$ に対し,

$$z_K(s)=\int_{V_K}|P_1(x)|_K^{s_1}\cdots|P_r(x)|_K^{s_r}\phi(x)dx$$

とすれば, $z_K(s)$ は $\mathbb{C}^r$ の有理形関数として解析接続される.

このとき, $z_K(s)$ は

$$z_{\mathbb{C}}(s)=\prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{s_i}\frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(0)}$$

$$z_{\mathbb{R}}(s)=\prod_{i=1}^{r}(\pi^{-d_i}h_i)^{\frac{s_i}{2}}\frac{\gamma_{\mathbb{R}}(s)}{\gamma_{\mathbb{R}}(0)}.$$

と具体的に計算される (定理 4.2, 定理 5.4). ただし, $K=\mathbb{R}$ のときは基本相対不変式の multiplicity free の条件がついた上での計算となる. なお, $r=1$ の場合には [I1] に $z_K(s)$ がこのように計算されることが書かれており, その証明は [I2, Chapter 6] に詳しい. 従って上はその多変数化となっている.

$c(s)$ は Φ によらないのであったから, このことにより直ちに定理の結果を得ることができるわけである.

以下, 上で定めた $z_K(s)$ を単に standard case と呼ぶことがある. 本論文ではこの standard case の計算が中心的な話題となるわけであるが, それは大まかにいうと次のようになる:

まず, Γ 関数の積 $\gamma_{\mathbb{C}}(s)$, $\gamma_{\mathbb{R}}(s)$ は b-関数の一次式への分解のされ方に応じて定められることを説明しよう.

基本相対不変式を $P_1, \cdots, P_r$ とするとき, r 個の非負整数の組 $m = (m_1, \cdots, m_r)$ に対して

$$\bar{P}_1(\partial_x)^{m_1} \cdots \bar{P}_r(\partial_x)^{m_r}[P_1(x)^{s_1+m_1} \cdots P_r(x)^{s_r+m_r}] = b_m(s)P_1(x)^{s_1} \cdots P_r(x)^{s_r}$$

となる b-関数 $b_m(s)$ をとる. このとき, $b_m(s)$ が, ある特別な形をした一次式の積として分解されるという重要な事実がある. すなわち, ある一次形式 $e_1, \cdots, e_l$, $e_k(s) = e_{k1}s_1 + \cdots + e_{kr}s_r$ $(e_{k1}, \cdots, e_{kr} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k = 1, \cdots, l)$ および $p_1, \cdots, p_l \in \mathbb{C}$, $h : X_1 \to \mathbb{C}^{\times}$ があって

$$b_m(s) = h(m) \prod_{\substack{k=1 \\ e_k(m) \neq 0}}^{l} \prod_{j=0}^{e_k(m)-1} (e_k(s) + p_k + j)^{\mu_k} \quad (\text{ただし}, \ \mu_k = \pm 1)$$

となることが知られている (また, 実は $h(m)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ の元としてとることができる).

すると例えば $K = \mathbb{C}$ のとき, 定理の $\gamma_{\mathbb{C}}(s)$ は, 上記の分解により

$$\gamma_{\mathbb{C}}(s) = \prod_{k=1}^{l} \Gamma(e_k(s) + p_k)^{\mu_k}$$

として得られ, $K = \mathbb{R}$ のときは, 各基本相対不変式が multiplicity free であれば $e_{ki} = 0, 1$ となる (補題 5.3) ことがいえるので, $\gamma_{\mathbb{R}}(s)$ が

$$\gamma_{\mathbb{R}}(s) = \prod_{k=1}^{l} \Gamma\left(\frac{e_k(s) + p_k}{2}\right)$$

として得られる.

さて, 再び $K = \mathbb{C}$ の場合を考えると, b-関数の性質と部分積分より, $z_{\mathbb{C}}(s)$ は

$$z_{\mathbb{C}}(s + m) = (2\pi)^{-d_1 m_1 - \cdots - d_r m_r} b_m(s) z_{\mathbb{C}}(s)$$

という式を満たす. 一方, $\gamma_{\mathbb{C}}(s)$ はその定め方により

$$\gamma_{\mathbb{C}}(s + m) = h(m)^{-1} b_m(s) \gamma_{\mathbb{C}}(s)$$

を満たす. そこで,

$$C(s) = \prod_{i=1}^{r} ((2\pi)^{d_i} h_i^{-1})^{s_i} \frac{z_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}$$

とおくことにすると, 任意の m について $C(s + m) = C(s)$, すなわち $C(s)$ は周期関数となる.

さらに, $|z_{\mathbb{C}}(s)|/|\gamma_{\mathbb{C}}(s)|$ を評価することにより, $C(s)$ が s によらない定数である, ということが証明される. 従って,

$$\begin{aligned} z_{\mathbb{C}}(s) &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{s_i}\gamma_{\mathbb{C}}(s)C(s) \\ &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{s_i}\gamma_{\mathbb{C}}(s)C(0) \\ &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h_i)^{s_i}\frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(0)} \end{aligned}$$

を得るわけである. $K=\mathbb{R}$ の場合もほぼ同様となる. なお, この計算には概均質ベクトル空間の正則性の仮定は用いられていないことをここで注記しておく.

以下, 本論文の節構成について解説する:

まず 2 節では, 概均質ベクトル空間とその相対不変式を定義し, それらの性質について, 本論文に必要となることを簡単に復習する. 特に, 同じ指標に対応する相対不変式が定数倍を除き一致することや, 相対不変式が斉次式になること (命題 2.4 (i), (ii)), 基本相対不変式の存在 (定理 2.6) などが後で重要となる.

3 節では, 群が reductive な概均質ベクトル空間について少し解説を加えた後, b-関数の存在 (定理 3.3) や, その一次式への分解 (定理 3.14) について詳しく解説する.

そして 4 節, 5 節で $z_{\mathbb{C}}(s), z_{\mathbb{R}}(s)$ が上記のように計算されることを証明する.

さらに, 続く 6 節で, 概均質ベクトル空間の正則性を仮定し (ただし, ここでは "singular set が超曲面になる" という代わりに "$(\det g)^2$ に対応する相対不変式が存在する" という仮定を用いている), 局所関数等式の決定を行う.

7 節では, 概均質ベクトル空間のいくつかの例を挙げて, standard case や局所関数等式がどのように書かれるのかをみていくことにする.

2　概均質ベクトル空間とその相対不変式

$n\in\mathbb{N}$, $V=\mathbb{C}^n$ とし, $GL_n(\mathbb{C})\supset G$ を連結な線形代数群とする. また, $\mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}$ の乗法群, $X(G)$ を G から $\mathbb{C}^\times$ への有理指標全体のなす群とする.

定義 2.1 (i) (G,V) が 概均質ベクトル空間 であるとは, ある G-軌道 Gv_0 $(v_0\in V)$ が V の中で Zariski 開集合となっていることをいう. またそのとき, Gv_0 を (G,V) の open orbit, v_0 を generic point, $S=V-Gv_0$ を singular set と呼ぶ.

なお, V は Zarisiki 位相で既約だから, 実はこれは $\mathrm{Cl}(Gv_0)=V$ であることと同値である (ただし $\mathrm{Cl}(Gv_0)$ は Gv_0 の Zariski 閉包).

(ii) V 上の恒等的に 0 でない有理関数 $f(x) \in \mathbb{C}(x)$ $(= \mathbb{C}(x_1, \cdots, x_n))$ について, ある $\chi \in X(G)$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$f(gx) = \chi(g) f(x)$$

となるとき, $f(x)$ を χ に対応する <u>相対不変式</u> といい, $f \leftrightarrow \chi$ と書く. 特に $f \leftrightarrow 1$ のとき, f を <u>絶対不変式</u> という.

注意 2.2 上の (ii) で, 任意の $g \in G$ について $f(gx) = (\text{const.}) f(x)$ であれば, $f(x)$ は相対不変式である.
(証明) $f(x)$ を定数でない有理関数として上が成立するとする. このとき (const.) の部分を $\chi(g)$ とかき, $f(x_0) = 1$ となる $x_0 \in V$ をとれば, $\chi(g) = f(gx_0)$ だから χ は g の有理関数である. さらに, $\chi(g_1 g_2) = f(g_1 g_2 x_0) = \chi(g_1) f(g_2 x_0) = \chi(g_1)\chi(g_2)$ だから, $\chi \in X(G)$. □

補題 2.3 (G, V) が概均質ベクトル空間ならば絶対不変式は定数である.

[証明] $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ を V 上の恒等的に 0 でない多項式とし, $f(x) = P(x)/Q(x)$ が絶対不変式であったとする. このとき v_0 を (G, V) の generic point とすれば, f は Gv_0 上では定数 $(c = f(v_0))$ となる. 従って, $V \supset \{x \in V \,:\, P(x) - cQ(x) = 0\} \supset Gv_0$. 一方 $\mathrm{Cl}(Gv_0) = V$ であり, $\{x \in V \,:\, P(x) - cQ(x) = 0\}$ は Zariski 閉集合であるから V と一致する. よって $f(x)$ は V 上で定数である. □

命題 2.4 (G, V) を概均質ベクトル空間とする. このとき,
(i) 同じ指標に対応する相対不変式たちは定数倍を除き一致する.
(ii) 相対不変式は斉次式である.
(iii) 相対不変式の既約因子は相対不変式である.

[証明] (i) $\chi \in X(G)$, $f_1 \leftrightarrow \chi$, $f_2 \leftrightarrow \chi$ とすると, $f_1(x)/f_2(x)$ は絶対不変式となるから補題 2.3 より定数である. よって f_1, f_2 は定数倍を除き一致する.

(ii) $f(x)$ を相対不変式, $f \leftrightarrow \chi$ とするとき, 任意の $t \in \mathbb{C}^\times$ に対して, $f_t(x) = f(tx)$ とおけば $f_t \leftrightarrow \chi$ より $f_t(x) = f(tx) = (\text{const.}) f(x)$ となる. よって f は斉次式である.

(iii) $f \leftrightarrow \chi$, $f(x) = \prod_{i=1}^r f_i(x)^{m_i}$ を f の既約因子への分解とする (各 f_i は既約多項式). このとき各 $i = 1, \cdots, r$ について f_i が相対不変式になることを示す.

f_j が既約多項式ならば $g \in G$ について $f_j(gx)$ も既約多項式となるが,

$$\prod_{j=1}^r f_j(gx)^{m_j} = f(gx) = \chi(g) \prod_{j=1}^r f_j(x)^{m_j}$$

だから, 各 $g \in G$ に対してある j があって $f_i(gx) = (\mathrm{const.})f_j(x)$ となる. そこで, 各 $j = 1, \cdots, r$ について $G_{ij} = \{g \in G : f_i(gx) = (\mathrm{const.})f_j(x)\}$ とおけば,

$$G = \bigcup_{j=1}^{r} G_{ij},\ G_{ij_1} \cap G_{ij_2} = \phi\ (j_1 \neq j_2).$$

しかし G は連結だから, G_{ij} たちのうち一つだけが G と等しく, 他のものはすべて空であるはずである. 一方, G_{ii} は G の単位元 I_n を含むから空ではない. よって $G = G_{ii}$, すなわち任意の $g \in G$ について $f_i(gx) = (\mathrm{const.})f_i(x)$ となる. 故に f_i は相対不変式である. □

ここで, G の r 個の指標 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ が $X(G)$ 内で rank r の free Abel 群を生成するとき, $\chi_1, \cdots, \chi_r$ は乗法的に独立であるということにする. すると次が成り立つ:

命題 2.5 $\chi_1, \cdots, \chi_r \in X(G)$ が乗法的に独立で, 各 χ_i に対してある相対不変式 $f_i(x)$ があって $f_i \leftrightarrow \chi_i$ となっているとき, $f_1, \cdots, f_r$ は代数的に独立である.

[証明] $f_1, \cdots, f_r$ が代数的に独立でないとすると, $f_1, \cdots, f_r$ の互いに相異なる単項式たち $h_1, \cdots, h_q$ ($q \geq 2$, $h_i(x) = f_1(x)^{m_{i1}} \cdots f_r(x)^{m_{ir}}$ $(m_{i1}, \cdots, m_{ir} \in \mathbb{Z})$) で, 次を満たすものが存在する:

$$h_1, \cdots, h_q \text{ は一次従属で, それらのうちどの } (q-1) \text{ 個も一次独立.}$$

このとき $W = \{(t_1, \cdots, t_q) \in \mathbb{C}^q : \sum_{i=1}^{q} t_i h_i \equiv 0\}$ とすると, $h_1, \cdots h_q$ のとりかたにより $\dim W = 1$ である. また, $i = 1, \cdots, q$ について $h_i \leftrightarrow \lambda_i$ $(= \chi_1^{m_{i1}} \cdots \chi_r^{m_{ir}})$ とすると, 任意の $(t_1, \cdots, t_q) \in W$, $g \in G$ に対して $(t_1\lambda_1(g), \cdots, t_q\lambda_q(g)) \in W$ となるはずだが, $\dim W = 1$ だから, $(t_1\lambda_1(g), \cdots, t_q\lambda_q(g))$ は $(t_1, \cdots, t_q)$ のスカラー倍でなければならない. よって, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_q$. しかし, $h_1, \cdots, h_q$ は互いに相異なる $f_1, \cdots, f_r$ の単項式であり, $\chi_1, \cdots, \chi_r$ は乗法的に独立なのだから, $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ は互いに相異なるはず. これは矛盾である. □

次の定理はこの節で最も重要である.

定理 2.6 (G, V) を概均質ベクトル空間とし, S をその singular set とする. S の既約成分のうち, 余次元 1 のものの合併を S_0 とし, S_0 は空でないと仮定する. このとき S_0 の既約成分をすべて列挙し, それらを $S_i = \{x \in V : P_i(x) = 0\}$ $(P_i(x) \in \mathbb{C}[x]$, $i = 1, \cdots, r)$ とすれば, 次が成り立つ:

(i) $P_1, \cdots, P_r$ は代数的に独立な相対不変多項式である.

(ii) (G, V) の任意の相対不変式は, 定数倍を除き $P_1, \cdots, P_r$ の巾積 (負巾も許す) と一致する.

[証明] (i) G は連結ゆえに既約であり, $G\times S_i \ni (g,x)\mapsto gx\in GS_i$ は Zariski 位相で連続だから, 各 i について GS_i は既約である．一方, $S_i\subset GS_i\subset S$ で, S_i は S の一つの既約成分だから, $S_i=GS_i$. いいかえれば, S_i は G-不変となる．よって, 任意の $g\in G$ について, $g^{-1}S_i=\{x\in V\,:\,P_i(gx)=0\}=S_i$. 従って, Hilbert の零点定理, および P_i が既約多項式であることにより, $P_i(gx)=(\mathrm{const.})P_i(x)$ となる．よって, $P_i(x)$ は相対不変式である．また, $P_i\leftrightarrow\chi_i\ (i=1,\cdots,r)$ とすると, $P_1,\cdots,P_r$ はどの二つも相異なる既約多項式だから, $\chi_1,\cdots,\chi_r$ は乗法的に独立である．よって命題 2.5 により $P_1,\cdots,P_r$ は代数的に独立でもある.

(ii) 命題 2.4(iii) により, 任意の既約な相対不変多項式 P が $P_1,\cdots,P_r$ のうちのどれかと定数倍を除き一致することをいえばよい．v_0 を generic point とする．このとき $P(v_0)=0$ なら $P(Gv_0)=\{0\}$ すなわち $P\equiv 0$ となってしまうので, $P(v_0)\neq 0$. 従って, $P(x)$ は open orbit において 0 にならない．言いかえれば, $\{x\in V\,:\,P(x)=0\}\subset S$. 他方 $\{x\in V\,:\,P(x)=0\}$ は既約超曲面だから, $S_1,\cdots,S_r$ のうちのどれかと一致する. よってまた Hilbert の零点定理により, P とある P_i とが定数倍を除き一致する. □

今の (ii) の証明により, S_0 が空のときは (G,V) には相対不変式が存在しないことがわかる．以下, (G,V) は概均質ベクトル空間, S_0 は空でないと仮定し, 定理 2.6 の $P_1,\cdots,P_r$ を, (G,V) の <u>基本相対不変式</u> と呼ぶことにする．また, $\chi_1,\cdots,\chi_r\in X(G)$ を $P_i\leftrightarrow\chi_i\ (i=1,\cdots,r)$ なる有理指標とする.

ここで, $X(G)$ の部分群 X_1 を

$$X_1:=\{\chi\in X(G)\,:\,\text{ある相対不変式}\ f\ \text{があって},\ f\leftrightarrow\chi\}$$

により定めれば, X_1 は $\chi_1,\cdots,\chi_r$ によって生成される rank r の free Abel 群となる.

3 多変数 b-関数 (群が reductive な場合)

概均質ベクトル空間 (G,V) の G が reductive である場合, (G,V) とその双対 (G^*,V) がほぼ同じような概均質ベクトル空間となり, そのことにより b-関数の存在を容易に証明することができる．そこでまず 3.1 節において (G,V) とそれに対する (G^*,V) の相対不変式について解説し, 3.2 節で b-関数の存在を証明する．そして後に続く節でその一次式への分解について解説する.

3.1 群が reductive な場合の概均質ベクトル空間

(G,V) は前節の通りとし, $P_1,\cdots,P_r$ を基本相対不変式, $P_i\leftrightarrow\chi_i\ (i=1,\cdots,r)$, $X_1=\langle\chi_1,\cdots,\chi_r\rangle$ とする.

さらに, この節以降は G が reductive であると仮定する. このとき H を G の極大コンパクト部分群とすると, $\mathrm{Cl}(H) = G$ となり, また H はユニタリ群

$$U_n = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) : {}^t\bar{g}g = I_n\}$$

の部分群と共役になることが知られている.

以下, 必要ならば G を適当な共役に置き換えて, $H \subset U_n$ となるようにしておく.

補題 3.1 f を (G, V) の相対不変多項式, $f \leftrightarrow \chi$ とする. このとき $\bar{f}$ を, f の係数を複素共役で置き換えた多項式 (すなわち $\bar{f}(x) = \overline{f(\bar{x})}$) とすると,

$$\bar{f}({}^tg^{-1}x) = \chi(g)^{-1}\bar{f}(x) \ (g \in G).$$

[証明] まず任意の $h \in H$ に対して, ${}^th^{-1} = \bar{h}$ となることに注意すれば,

$$\bar{f}({}^th^{-1}x) = \bar{f}(\bar{h}x) = \overline{f(h\bar{x})} = \overline{\chi(h)f(\bar{x})} = \overline{\chi(h)}\bar{f}(x)$$

となることがいえる. 一方, $|\chi(H)|$ は $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$ のコンパクト部分群になるから, $|\chi(H)| = \{1\}$. すなわち $\overline{\chi(h)} = \chi(h)^{-1}$. よって, 任意の $h \in H$ に対して, $\bar{f}({}^th^{-1}x) = \chi(h)^{-1}\bar{f}(x)$, 言い換えれば,

$$G \supset \{g \in G : \bar{f}({}^tg^{-1}x) = \chi(g)^{-1}\bar{f}(x)\} \supset H$$

となる. ところが, $\mathrm{Cl}(H) = G$ で, $\{g \in G : \bar{f}({}^tg^{-1}x) = \chi(g)^{-1}\bar{f}(x)\}$ は G の Zariski 閉集合なのだからこれは G と等しい. 従って, 任意の $g \in G$ に対して $\bar{f}({}^tg^{-1}x) = \chi(g)^{-1}\bar{f}(x)$ となる. □

ここで $G^* = {}^tG$ とし, $V \ni y$ に対する $G^* \ni g$ の作用を $g \circ y = {}^tg^{-1}y$ により定める.

命題 3.2 (G^*, V) は上の作用で概均質ベクトル空間となる. またその基本相対不変式は $\bar{P}_1, \cdots, \bar{P}_r$ である.

[証明] v_0 を (G, V) の generic point とする. すると, $Gv_0 = \mathrm{Cl}(H)v_0 \subset \mathrm{Cl}(Hv_0) \subset V$ だから, $\mathrm{Cl}(Hv_0) = V$. $V \ni x \mapsto \bar{x}$ は Zariski 位相に関して同相写像なので,

$$V \supset \mathrm{Cl}(G^* \circ \overline{v_0}) = \mathrm{Cl}({}^tG^{-1}\overline{v_0}) \supset \mathrm{Cl}({}^tH^{-1}\overline{v_0}) = \mathrm{Cl}(\overline{Hv_0}) = V.$$

故に $\mathrm{Cl}(G^* \circ \overline{v_0}) = V$ となり, (G^*, V) は $\overline{v_0}$ を generic point とする概均質ベクトル空間であることがわかる.

f を (G^*, V) の任意の相対不変式とすると, 補題 3.1 より $\bar{f}$ は (G, V) の相対不変式になる. よって, $\bar{f}$ は定数倍を除き $P_1, \cdots, P_r$ の巾積と一致する, ということはつまり, f は $\bar{P}_1, \cdots, \bar{P}_r$ の巾積と定数倍を除き一致する. 今, f は (G^*, V) の任意の相対不変式としてとったのだから, $\bar{P}_1, \cdots, \bar{P}_r$ は (G^*, V) の基本相対不変式である. □

3.2 b-関数の存在とその次数について

まず, 複素変数 x_j $(j=1,\cdots,n)$ に対して $(\partial/\partial x_j)$ を, $(\partial/\partial x_j)x_j^m = m x_j^{m-1}$ $(m\in\mathbb{Z})$ となるようにとる ($x_j = u_j + \sqrt{-1}v_j$ とするとき $(\partial/\partial x_j) = (1/2)(\partial/\partial u_j - \sqrt{-1}\partial/\partial v_j)$ とすればよい).

そして, d 次斉次多項式

$$f(x) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=d} a_{k_1\cdots k_r} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

に対し, 微分演算子 $f(\partial_x)$ を,

$$f(\partial_x) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=d} a_{k_1\cdots k_r} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

と定める.

それから, $s=(s_1,\cdots,s_r)$ に対して,

$$\begin{aligned} P(x)^s &= P_1(x)^{s_1}\cdots P_r(x)^{s_r} \\ \bar{P}(x)^s &= \bar{P}_1(x)^{s_1}\cdots \bar{P}_r(x)^{s_r} \\ |P(x)|^s &= |P_1(X)|^{s_1}\cdots |P_r(x)|^{s_r} \end{aligned}$$

などと略記することにする.

さて, $X_1 \ni \chi = \chi_1^{m_1}\cdots\chi_r^{m_r}$ に対して $\delta(\chi) = (m_1,\cdots,m_r)\in\mathbb{Z}^r$ とおき, さらに $X_1^+ = \{\chi\in X_1 : \delta(\chi)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}\}$ とおくとき, 次が成立する:

定理 3.3 各 $\chi\in X_1^+$ に対して, ある r 変数多項式 $b_\chi(s_1,\cdots,s_r)\in\mathbb{C}[s_1,\cdots,s_r]$ が存在して,

(i) $\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{s+\delta(\chi)}] = b_\chi(s)P(x)^s$ $(s=(s_1,\cdots,s_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0})$.

(ii) $b_\chi(s)$ は実係数多項式となる. 従って $P(\partial_x)^{\delta(\chi)}[\bar{P}(x)^{s+\delta(\chi)}] = b_\chi(s)\bar{P}(x)^s$ $(s = (s_1,\cdots,s_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0})$ でもある.

(iii) $b_\chi(s)$ の最高次斉次部分の次数を d' とすると, $d' = \deg P(x)^{\delta(\chi)}$.

[証明] (i) $g\in G$ に対し $y = gx$ $(x,y\in V)$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)g^{-1}$$

となるから, $\bar{P}(\partial_y)^{\delta(\chi)} = \chi(g)^{-1}\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}$ である. 従って,

$$\frac{\bar{P}(\partial_y)^{\delta(\chi)}[P(y)^{s+\delta(\chi)}]}{P(y)^s} = \frac{\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{s+\delta(\chi)}]}{P(x)^s} \quad (x\in V,\ g\in G,\ y=gx).$$

すなわち $\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{s+\delta(\chi)}]/P(x)^s$ は絶対不変式となり, x によらない. これを $b_\chi(s)$ とかくことにする. また, $\deg P(x)^{\delta(\chi)}$ に関する帰納法により, $b_\chi(s)$ が s の多項式になり, その最高次斉次部分の次数 d' は $d = \deg P(x)^{\delta(\chi)}$ 以下になることは容易に示すことができる.

(ii) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$P(x)^{m\delta(\chi)} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=md} a^{(m)}_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

とおくと,

$$\bar{P}(x)^{m\delta(\chi)} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=md} \overline{a^{(m)}_{k_1\cdots k_n}} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

だから,

$$\begin{aligned}\bar{P}(\partial_x)^{m\delta(\chi)}P(x)^{m\delta(\chi)} &= \sum_{k_1+\cdots k_n=md} |a^{(m)}_{k_1\cdots k_n}|^2(k_1!)\cdots(k_n!)\ (\in \mathbb{R}_{>0}) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} b_\chi(k\delta(\chi)).\end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{m-1}\overline{b_\chi}(k\delta(\chi)) &= P(\partial_x)^{m\delta(\chi)}\bar{P}(x)^{m\delta(\chi)} = \bar{P}(\partial_x)^{m\delta(\chi)}P(x)^{m\delta(\chi)} \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} b_\chi(k\delta(\chi)) \in \mathbb{R}_{>0} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots).\end{aligned}$$

これにより $b_\chi(k\delta(\chi)) = \overline{b_\chi}(k\delta(\chi)) \in \mathbb{R}_{>0}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ となり, 従って, $b_\chi = \overline{b_\chi}$, すなわち b_χ が実係数多項式となることがわかる.

(iii) 以下, 必要ならば, G を $H \subset U_n$ という条件を保ちつつ共役で置きかえることにより $P(1, 0, \cdots, 0)^{\delta(\chi)} \neq 0$ と仮定してよい ($P(v)^{\delta(\chi)} \neq 0$, $||v|| = 1$ なる $v \in V$ が存在するので, v を第一列にもつユニタリ行列 u をとり G と ${}^t\bar{u}Gu$ とを置きかえる). このとき $a = P(1, 0, \cdots, 0)^{\delta(\chi)} = a^{(1)}_{d,0,\cdots,0}$ とおくと, $a^m = P(1, 0, \cdots, 0)^{m\delta(\chi)} = a^{(m)}_{d,0,\cdots,0}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ だから,

$$\prod_{k=0}^{m-1} b_\chi(k\delta(\chi)) = \sum_{k_1+\cdots k_n=md} |a^{(m)}_{k_1\cdots k_n}|^2(k_1!)\cdots(k_n!) \geq |a|^{2m}(md)!.$$

また, 十分大きな定数 $A > 0$ をとれば,

$$|b_\chi(0)| \leq A,\ |b_\chi(k\delta(\chi))| \leq A\sum_{i=0}^{d'} |k|^i \leq A(k+1)^{d'}\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるようにできるので, このとき

$$|a|^{2m}(md)! \leq \prod_{k=0}^{m-1} b_\chi(k\delta(\chi)) \leq A^m (m!)^{d'} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる. 一方, $(md)! \geq (m!)^d$ であるから

$$(m!)^{d-d'} \leq (m!)^{d-d'} \frac{(md)!}{(m!)^d} = \frac{(md)!}{(m!)^{d'}} \leq \left(\frac{A}{|a|^2} \right)^m$$

となるが, $d - d' > 0$ とすると, 十分大きな m に対してこの不等式は成立しなくなってしまうので, $d - d' \leq 0$ であることがいえる. しかし $d' \leq d$ であったから, $d' = d$ である. □

上記の $b_\chi(s)$ を $P(x)^{\delta(\chi)}$ の b-関数 と呼ぶ.
また, b-関数の一次式への分解に際しては次の系の成立が重要となる.

系 3.4 任意の $\chi, \chi' \in X_1^+$ に対して

$$b_{\chi\chi'}(s) = b_\chi(s) b_{\chi'}(s + \delta(\chi)). \tag{1}$$

[証明]

$$\begin{aligned} b_{\chi\chi'}(s)P(x)^s &= \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi\chi')}[P(x)^{s+\delta(\chi\chi')}] \\ &= b_{\chi'}(s+\delta(\chi))\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{s+\delta(\chi)}] \\ &= b_{\chi'}(s+\delta(\chi)) b_\chi(s) P(x)^s \end{aligned}$$

より成立する. □

補題 3.5 $\chi \in X_1^+$ に b_χ を対応させる写像 $b : X_1^+ \to \mathbb{C}(s_1, \cdots, s_r)^\times$ は, 任意の $\chi, \chi' \in X_1$ に対して (1) 式が成り立つように, 一意的に $b : X_1 \to \mathbb{C}(s_1, \cdots, s_r)^\times$ に拡張することができる.

[証明] 任意の $\chi \in X_1$ について, $\chi = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ なる $\lambda_1, \lambda_2 \in X_1^+$ が必ず存在するが, このとき

$$b_\chi(s) := \frac{b_{\lambda_1}(s)}{b_{\lambda_2}(s + \delta(\chi))}$$

と定める. これは well-defined である. 実際, $\chi = \lambda_1 \lambda_2^{-1} = \lambda'_1(\lambda'_2)^{-1}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2 \in X_1^+)$ のとき, $\lambda_1 \lambda'_2 = \lambda'_1 \lambda_2$ だから

$$\begin{aligned} \frac{b_{\lambda_1\lambda'_1}(s)}{b_{\lambda'_1\lambda_2}(s+\delta(\chi))} &= \frac{b_{\lambda_1}(s) b_{\lambda'_1}(s+\delta(\lambda_1))}{b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi)) b_{\lambda'_1}(s+\delta(\chi\lambda_2))} = \frac{b_{\lambda_1}(s)}{b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi))} \\ = \frac{b_{\lambda_1\lambda'_1}(s)}{b_{\lambda_1\lambda'_2}(s+\delta(\chi))} &= \frac{b_{\lambda'_1}(s) b_{\lambda_1}(s+\delta(\lambda'_1))}{b_{\lambda'_2}(s+\delta(\chi)) b_{\lambda_1}(s+\delta(\chi\lambda'_2))} = \frac{b_{\lambda'_1}(s)}{b_{\lambda'_2}(s+\delta(\chi))} \end{aligned}$$

となる.

さて, $\chi = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $\chi' = \lambda_1'(\lambda_2')^{-1}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2' \in X_1^+)$ に対し,

$$\begin{aligned}
b_{\chi\chi'}(s) &= b_{(\lambda_1\lambda_1')(\lambda_2\lambda_2')^{-1}}(s) \\
&= \frac{b_{\lambda_1\lambda_1'}(s)}{b_{\lambda_2\lambda_2'}(s+\delta(\chi\chi'))} \\
&= \frac{b_{\lambda_1}(s)b_{\lambda_1'}(s+\delta(\lambda_1))}{b_{\lambda_2'}(s+\delta(\chi\chi'))b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi\chi'\lambda_2'))} \cdot \frac{b_{\lambda_1'\lambda_2}(s+\delta(\chi))}{b_{\lambda_1'\lambda_2}(s+\delta(\chi))} \\
&= \frac{b_{\lambda_1}(s)b_{\lambda_1'}(s+\delta(\lambda_1))b_{\lambda_1'}(s+\delta(\chi))b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi\lambda_1'))}{b_{\lambda_2'}(s+\delta(\chi\chi'))b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi\lambda_1'))b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi))b_{\lambda_1'}(s+\delta(\chi\lambda_2))} \\
&= \frac{b_{\lambda_1}(s)}{b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi))} \cdot \frac{b_{\lambda_1'}(s+\delta(\chi))}{b_{\lambda_2'}(s+\delta(\chi\chi'))} \\
&= b_\chi(s)b_{\chi'}(s+\delta(\chi))
\end{aligned}$$

となるので (1) 式が成り立つ.

また, $b' : X_1 \to \mathbb{C}(s_1, \cdots, s_r)^\times$ を, (1) 式を保つ別の拡張とするとき, $\chi = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in X_1^+)$ に対し

$$b'_\chi(s)b'_{\lambda_2}(s+\delta(\chi)) = b'_{\chi\lambda_2}(s) = b'_{\lambda_1}(s) = b_{\lambda_1}(s)$$

となるが, $b'_{\lambda_2}(s+\delta(\chi)) = b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi))$ だから

$$b'_\chi(s) = \frac{b_{\lambda_1}(s)}{b_{\lambda_2}(s+\delta(\chi))} = b_\chi(s).$$

したがって b の拡張は一意的である. □

3.3 Cocycle condition を満たす多項式たち

補題 3.5 により拡張された b-関数はある種の cocycle となる. その意味で, (1) 式は cocycle condition と呼ばれることがある.

一般に, cocycle condition を満たす多項式の組があれば, それらを補題 3.5 のように拡張できて, やはりある種の cocycle となる. そして, それらの多項式たちはすべて, ある非常に特別な形をした一次式の積として書けることが知られている. この節ではそのことを詳しく説明することにする.

なお, これは [Sm2] ([Sm1] 前半の英訳) の Appendix (by Muro) に, 係数についての議論を少し加えた内容となっている.

3.3.1 Group cohomology からの準備

この小節ではまず, group cohomology からの準備として, 1-cocycle の定義やいくつかの簡単な性質などについて解説する.

X を任意の群とし, X がある Abel 群 R に自己同型として作用しているとする. すなわち, $\alpha \in X$ に対し, $R \ni a \mapsto a^\alpha \in R$ なる作用があって

$$(a_1 a_2)^\alpha = a_1^\alpha a_2^\alpha,\ a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta\ (a, a_1, a_2 \in R,\ \alpha, \beta \in X).$$

このとき, $c : X \to R$ が 1-cocycle であるとは,

$$c(\alpha\beta) = c(\alpha)c(\beta)^\alpha\ (\alpha, \beta \in X)$$

となることをいう.

命題 3.6 X から R への 1-cocycle 全体を $Z^1(X,R)$ と書く. このとき $Z^1(X,R)$ は和 $(c_1+c_2)(\alpha) = c_1(\alpha)c_2(\alpha)$ に関して加法群をなす. また X の単位元を ε, R の単位元を 1 とすれば, 任意の $c \in Z^1(X,R)$ について $c(\varepsilon) = 1$.

[証明] $c_1, c_2 \in Z^1(X,R)$ のとき,

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)(\alpha\beta) &= c_1(\alpha\beta)c_2(\alpha\beta) = c_1(\alpha)c_1(\beta)^\alpha c_2(\alpha)c_2(\beta)^\alpha \\ &= c_1(\alpha)c_2(\alpha)(c_1(\beta)c_2(\beta))^\alpha = (c_1+c_2)(\alpha)(c_1+c_2)(\beta)^\alpha\end{aligned}$$

より $(c_1+c_2) \in Z^1(X,R)$ であるから $Z^1(X,R)$ はこの和で閉じている. そして, $\alpha \mapsto 1$ を単位元, c の逆元を $(-c)(\alpha) = c(\alpha)^{-1}$ として $Z^1(X,R)$ が加法群をなすことがわかる.

また, $c(\varepsilon) = c(\varepsilon\varepsilon) = c(\varepsilon)c(\varepsilon)^\varepsilon = c(\varepsilon)^2$ より $c(\varepsilon) = 1$. □

$c \in Z^1(X,R)$ が coboundary であるとは, ある $b \in R$ があって, すべての $\alpha \in X$ に対し $c(\alpha) = b^\alpha b^{-1}$ となることをいう.

命題 3.7 coboundary 全体 $B^1(X,R)$ は $Z^1(X,R)$ の部分群となる.

[証明] $1 = 1^\alpha 1^{-1}$ だから, 単位元 $\alpha \mapsto 1$ は coboundary である.

c_1, c_2 が coboundary で, $c_1(\alpha) = b_1^\alpha b_1^{-1}$, $c_2(\alpha) = b_2^\alpha b_2^{-1}$ だとすると,

$$(c_1 - c_2)(\alpha) = c_1(\alpha)c_2(\alpha)^{-1} = b_1^\alpha b_1^{-1}(b_2^\alpha b_2^{-1})^{-1} = (b_1 b_2^{-1})^\alpha (b_1 b_2^{-1})^{-1}$$

より $c_1 - c_2$ も coboundary となる. よって coboundary 全体は $Z^1(X,R)$ の中で部分群となる. □

最後に, X の R への作用は, $\mathbb{Z}$-係数の X の群環

$$\mathbb{Z}[X] = \left\{ \sum_{\text{有限和}} m_i \alpha_i \ :\ m_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \in X \right\}$$

の作用に自然に拡張できることを注意しておく. その作用は

$$a^\alpha = \prod_i (a^{\alpha_i})^{m_i} \quad \left(\alpha = \sum_i m_i \alpha_i\right)$$

とすればよい.

3.3.2 Free Abel 群から有理関数体の乗法群への cocycle

X を, $\beta_1, \cdots, \beta_r$ を basis とする rank r の free Abel 群とし, ε をその単位元とする. また, $X \ni \alpha = \beta^{m_1} \cdots \beta^{m_r}$ に対し $\delta(\alpha) = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ とおく. さらに, $R = \mathbb{C}(s_1, \cdots, s_r)^\times$ として, X の R への作用を

$$f(s)^\alpha = f(s + \delta(\alpha)) \quad (f(s) \in R,\ \alpha \in X)$$

により定める. 以下しばらく, この作用に関して $c \in Z^1(X, R)$ をひとつとって固定する. また, $c(\alpha)$ は c_α と書くことにする. この小節では, 一般の $c_\alpha(s)$ について, 後で必要になるいくつかの補題を証明する.

$c_{\beta_1}(s), \cdots, c_{\beta_r}(s)$ の既約因子たちのうち, X の作用で定数倍を除き互いに移り得ない既約多項式を列挙し, それらを $f_1(s), \cdots, f_l(s)$ とする. このとき, X の作用が群環 $\mathbb{Z}[X]$ の作用に拡張できることに注意すれば, ある $a'_i : X \to \mathbb{Z}[X]$ $(i = 1, \cdots, l)$ があって

$$c_\alpha(s) = (\text{const.}) \prod_{i=1}^{l} f_i(s)^{a'_i(\alpha)}$$

となることがいえる. 一方, $F_i := \{\alpha \in X \ :\ f_i(s)^\alpha = (\text{const.}) f_i(s)\}$ $(i = 1, \cdots, l)$ とおけば, これらは X の部分群となる. しかも $\alpha \in X$ の作用では各 $f_i(s)$ の最高次斉次部分は変わらないから, 実は $F_i = \{\alpha \in X \ :\ f_i(s)^\alpha = f_i(s)\}$ である. 従って, 各 $f_i(s)$ への $\mathbb{Z}[X]$ の作用は $\mathbb{Z}[X/F_i]$ の作用を経由していると考えてよい. また, f_i は既約多項式だから, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{Z}[X/F_i]$ に対し

$$f_i(s)^{\theta_1} = f_i(s)^{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$$

となる. よって, 各 f_i に対し $a_i : X \to \mathbb{Z}[X/F_i]$ が一意的に存在し

$$c_\alpha(s) = (\text{const.}) \prod_{i=1}^{l} f_i(s)^{a_i(\alpha)}$$

となることがわかる. さらに,

$$\begin{array}{rcl} c_{\alpha\beta}(s) & = & (\text{const.}) \prod_{i=1}^{l} f_i(s)^{a_i(\alpha\beta)} \\ = c_\alpha(s) c_\beta(s)^\alpha & = & (\text{const.}) \prod_{i=1}^{l} f_i(s)^{a_i(\alpha)} \prod_{i=1}^{l} (f_i(s)^{a_i(\beta)})^\alpha \end{array}$$

だから, $X \ni \alpha \mapsto \alpha^{(i)} \in X/F_i$ を標準全射とすれば

$$a_i(\alpha\beta) = a_i(\alpha) + a^{(i)}a_i(\beta),$$

すなわち $a_i \in Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i])$ である.

補題 3.8 各 X/F_i は torsion free である.

[証明] $\alpha \in X$ について, ある $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ があって $\alpha^k \in F_i$ となるなら $\alpha \in F_i$ となることを示す.

$\alpha^k \in F_i$ ならば任意の $m \in \mathbb{Z}$ について $\alpha^{mk} \in F_i$ だから

$$f_i(s)^{\alpha^{mk}} = f_i(s + mk\delta(\alpha)) = f_i(s)$$

となる. このとき $g(t) = f_i(s + tk\delta(\alpha)) - f_i(s)$ とおくと, $g(t)$ は t の多項式として無数の解: $g(m) = 0$ $(m \in \mathbb{Z})$ をもつ. よって $g \equiv 0$. 故に $0 = g(1/k) = f_i(s+\delta(\alpha)) - f_i(s)$, すなわち $f_i(s)^\alpha = f_i(s)$ となり, $\alpha \in F_i$ となることがわかる. □

補題 3.9 任意の $a \in Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i])$ に対し

$$\alpha \in F_i \Rightarrow a(\alpha) = 0.$$

[証明] $\alpha \in F_i$ のとき $\alpha^{(i)} = \varepsilon^{(i)}$ であるから, 任意の $\beta \in X$, $\beta^{(i)} \neq \varepsilon^{(i)}$ に対して

$$\begin{array}{rcl} a(\alpha\beta) & = & a(\alpha) + \alpha^{(i)}a(\beta) \quad = \quad a(\alpha) + a(\beta) \\ & = & a(\beta) + \beta^{(i)}a(\alpha). \end{array}$$

従って $(\varepsilon^{(i)} - \beta^{(i)})a(\alpha) = 0$ となる. 補題 3.8 より $\mathbb{Z}[X/F_i]$ は整域だから, $a(\alpha) = 0$. □

上の補題により, $Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i]) \simeq Z^1(X/F_i, \mathbb{Z}[X/F_i])$ となることがわかる. そこで, 以下この同型により $Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i]) = Z^1(X/F_i, \mathbb{Z}[X/F_i])$ と考えることにする.

補題 3.10 $\operatorname{rank} X/F_i \geq 2$ ならば, $Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i]) = B^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i])$.

[証明] $a \in Z^1(X, \mathbb{Z}[X/F_i])$, $h = \operatorname{rank} X/F_i$ とする. また, $h \geq 2$ とし, $\lambda_1, \cdots, \lambda_h \in X$ を $X/F_i = \langle \lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_h^{(i)} \rangle$ となるようにとる. $1 \leq j < k \leq h$ に対し, $a(\lambda_j\lambda_k) = a(\lambda_j) + \lambda_j^{(i)}a(\lambda_k) = a(\lambda_k) + \lambda_k^{(i)}a(\lambda_j)$ だから

$$(\varepsilon^{(i)} - \lambda_j^{(i)})a(\lambda_k) = (\varepsilon^{(i)} - \lambda_k^{(i)})a(\lambda_j). \tag{2}$$

$\mathbb{Z}[X/F_i]$ は, $\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_h^{(i)}$ の負巾を許す $\mathbb{Z}$ 係数の多項式環

$$\mathbb{Z}[\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_h^{(i)}, (\lambda_1^{(i)})^{-1}, \cdots, (\lambda_h^{(i)})^{-1}]$$

と同型, 特にU.F.D.であり, しかも $(\varepsilon^{(i)}-\lambda_j^{(i)})$ と $(\varepsilon^{(i)}-\lambda_k^{(i)})$ は既約だから, (2) 式より,

$$(\varepsilon^{(i)}-\lambda_j^{(i)})\,|\,a(\lambda_j),\ (\varepsilon^{(i)}-\lambda_k^{(i)})\,|\,a(\lambda_k).$$

よって, ある $\tau_i\in\mathbb{Z}[X/F_i]$ があって

$$a(\lambda_j)=(\varepsilon^{(i)}-\lambda_j^{(i)})\tau_i,\ a(\lambda_k)=(\varepsilon^{(i)}-\lambda_k^{(i)})\tau_i.$$

j, k は任意の相異なる index であったから, 結局,

$$a(\lambda_j)=(\varepsilon^{(i)}-\lambda_j^{(i)})\tau_i\quad(j=1,\cdots,h)$$

となる. さらに, $a\in Z^1(X/F_i,\mathbb{Z}[X/F_i])$ と考えれば, $y\in X/F_i$ の $\lambda_1^{(i)},\cdots,\lambda_h^{(i)}$ についての order に関する帰納法により,

$$a(y)=(\varepsilon^{(i)}-y)\tau_i\quad(y\in X/F_i),$$

すなわち $a(y)=y(-\tau_i)-(-\tau_i)$ となることがわかる. 従って, $a\in B^1(X/F_i,\mathbb{Z}[X/F_i])$ である. a は $Z^1(X,\mathbb{Z}[X/F_i])$ の任意の元としてとったのだから, これにより

$$Z^1(X,\mathbb{Z}[X/F_i])=B^1(X,\mathbb{Z}[X/F_i])$$

を得る. □

補題 3.11 (i) $\operatorname{rank}X/F_i\neq 0$ $(i=1,\cdots,l)$.

(ii) $\chi\in X$ について, $c_\chi(s)$ が多項式で, ある i について $\operatorname{rank}X/F_i\geq 2$ となるなら, $f_i(s)^{a_i(\chi)}$ は定数.

(iii) $c_{\beta_1}(s),\cdots,c_{\beta_r}(s)$ がすべて定数でない多項式なら, $\operatorname{rank}X/F_i=1$ $(i=1,\cdots,l)$.

[証明] (i) $\operatorname{rank}X/F_i=0$ とすると, 任意の $\alpha\in X$ について $f_i(s)^\alpha=f_i(s)$ となるが, これは f_i が定数であることを意味するのでこのようなことはあり得ない.

(ii) $f_1,\cdots,f_l$ は X の作用では移り得ない, 互いに素な既約多項式たちであったから, $\chi\in X$ に対し, $f_1(s)^{a_1(\chi)},\cdots,f_l(s)^{a_l(\chi)}$ はどの二つも共通因子を持たない. 従って $c_\chi(s)=$ 多項式 ならば各 $f_i(s)^{a_i(\chi)}$ も多項式でなければならない.

さて, ある i について $\operatorname{rank}X/F_i\geq 2$ のとき, 補題 3.10 より, ある $\tau_i\in\mathbb{Z}[X/F_i]$ があって, 任意の $\alpha\in X$ に対して $a_i(\alpha)=(\varepsilon^{(i)}-\alpha^{(i)})\tau_i$ となる. ここで $\tau_i=\sum_{k=1}^m n_k\theta_k$ $(\theta_k\in X/F_i,\,n_k\in\mathbb{Z})$ とおくと

$$f_i(s)^{a_i(\chi)}=\frac{f_i(s)^{\tau_i}}{f_i(s)^{\chi^{(i)}\tau_i}}=\prod_{k=1}^m\left(\frac{f_i(s)^{\theta_k}}{f_i(s)^{\chi^{(i)}\theta_k}}\right)^{n_k}\tag{3}$$

となるが, (3) 式の右辺をみると分子分母にそれぞれ同じ数だけ既約多項式がでてくるので, これが多項式であるためには, 定数であるより他はない.

(iii) $c_{\beta_1}(s), \cdots, c_{\beta_r}(s)$ がすべて定数でない多項式であるとする. このときある i について $\operatorname{rank} X/F_i \geq 2$ とすると, (ii) より $f_i(s)^{a_i(\beta_1)}, \cdots, f_i(s)^{a_i(\beta_r)}$ は全て定数になる. しかしそれでは $f_i(s)$ が $c_{\beta_1}(s), \cdots, c_{\beta_r}(s)$ のうちのどれかの既約因子であるということに反する. □

3.3.3 一次式の積にかけることと, その係数についての議論

記号はまた前節の通りとし, 補題 3.11 の (iii) が成立しているとする. 以下, 前小節の補題を用いて, $c_\alpha(s)$ $(\alpha \in X)$ が一次式の積に分解されることを証明することにしよう. その前にまず次のような準備をする:

各 $i = 1, \cdots, l$ について $X/F_i = \langle \lambda_i^{(i)} \rangle$ なる $\lambda_i \in X$ をとる. このとき $m \in \mathbb{Z}$ に対し, 帰納法により,

$$a_i(\lambda_i^m) = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} (\lambda_i^{(i)})^j \right) a_i(\lambda_i) & (m > 0) \\ 0 & (m = 0) \\ \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{-m} -(\lambda_i^{(i)})^{-j} \right) a_i(\lambda_i) & (m < 0) \end{cases}$$

となることがわかる. さらに, $e_i^*(\alpha) = \operatorname{ord}_{\lambda_i} \alpha$ (すなわち $\alpha^{(i)} = (\lambda_i^{(i)})^m$ なら $e_i^*(\alpha) = m$) とおき, 一次形式 $\bar{e}_i^*$ を $\bar{e}_i^*(s) = \sum_{i=1}^r e_i^*(\beta_i) s_i$ により定める. このとき $\bar{e}_i^*(s)^\alpha = \bar{e}_i^*(s) + e_i^*(\alpha)$ である.

ここで, $\{e_1^*, \cdots, e_l^*\}$ のうち相異なるものを $e_1, \cdots, e_N$ とする. このとき $e_{i_1}^* = e_{i_2}^* = e_k$ ならば $e_k(\lambda_{i_1}) = e_k(\lambda_{i_2}) = 1$ だから, $\bar{e}_k(s)^{\lambda_{i_1}} = \bar{e}_k(s)^{\lambda_{i_2}} = \bar{e}_k(s) + 1$. そこで, 各 e_k に対して, $e_k = e_j^*$ なる j を適当に一つ選び, $\sigma_k = \lambda_j$ とする. さらに $\tilde{a}_k : X \to \mathbb{Z}[X]$ $(k = 1, \cdots, N)$ を

$$\tilde{a}_k(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{e_k(\alpha)-1} \sigma_k^j & (e_k(\alpha) > 0) \\ 0 & (e_k(\alpha) = 0) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{-e_k(\alpha)} -\sigma_k^{-j} & (e_k(\alpha) < 0) \end{cases}$$

により定める. すると, $e_k = e_i^*$ なる i に対し $\bar{e}_k(s)^{a_i(\alpha)} = (\bar{e}_k(s)^{a_i(\lambda_i)})^{\tilde{a}_k(\alpha)}$ となる.

以上の準備のもと, 次を示す:

定理 3.12 c, $e_1, \cdots, e_N$, $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_N$ は上記の通りとする. このとき

(i) $\mathrm{G.C.D.}(e_k(\beta_i))_{\substack{i=1,\cdots,r \\ e_k(\beta_i)\neq 0}} = 1 \quad (k=1,\cdots,N)$.

(ii) ある一変数有理式 $\eta_1(t),\cdots,\eta_N(t)\in\mathbb{C}(t)$, 及び指標 $h : X\to\mathbb{C}^\times$ があって,

$$c_\alpha(s) = h(\alpha)\prod_{k=1}^{N}\eta_k(\bar{e}_k(s))^{\tilde{a}_k(\alpha)} \quad (\alpha\in X).$$

(iii) $X^+ = \{\alpha\in X \,:\, c_\alpha(s)\,\text{は多項式}\,\}$ とすると, 任意の $\alpha_1,\alpha_2\in X^+$, $k=1,\cdots,N$ について $e_k(\alpha_1), e_k(\alpha_2)\geq 0$ であるか, または $e_k(\alpha_1), e_k(\alpha_2)\leq 0$ であるかのどちらかである.

[証明] (i) $\sigma_k = \beta_1^{k_1}\cdots\beta_r^{k_r}$ とすると $1 = e_k(\sigma_k) = k_1e_k(\beta_1)+\cdots+k_re_k(\beta_r)$.

(ii) 各 $i=1,\cdots,l$ に対し, $\lambda_{i1}=\lambda_i$ とし, $\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{ir}\in X$ を $F_i = \langle\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{ir}\rangle$ となるようにとる. このとき $X = \langle\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{ir}\rangle$ である.

さらに, $j=1,\cdots,r$ に対し $e^*_{ij}(\alpha) = \mathrm{ord}_{\lambda_{ij}}\alpha$ とすれば, $|\det(e^*_{ij}(\beta_k))_{j,k}| = 1$ となる. 特に, $s'_j = \bar{e}^*_{ij}(s)$ $(j=1,\cdots,r)$ とおけば $s'_1,\cdots,s'_r$ は一次独立である. 故に $s_1,\cdots,s_r$ はそれぞれ $s'_1,\cdots,s'_r$ の一次結合で表すことができる.

そこで, $g_i\in\mathbb{C}[s'_1,\cdots,s'_r]$ を $f_i(s) = g_i(s')$ $(s' = (s'_1,\cdots,s'_r))$ となるようにとる. このとき, 任意の F_i の元 $\alpha = \lambda_{i2}^{k_2}\cdots\lambda_{ir}^{k_r}$ に対し $f_i(s)^\alpha = f_i(s)$ であったから,

$$g_i(s'_1, s'_2+k_2,\cdots,s'_r+k_r) = g_i(s') \quad (k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{Z}).$$

よって, $g_i(s')$ は s'_1 のみからなる一変数多項式である. しかも $f_i(s)$ は定数でない既約多項式なのだから, これは一次式でなければならない. 故に

$$f_i(s) = g_i(s') = (\mathrm{const.})(s'_1+p_i) = (\mathrm{const.})(\bar{e}^*_i(s)+p_i)\ (p_i\in\mathbb{C}).$$

すなわち

$$c_\alpha(s) = (\mathrm{const.})\prod_{i=1}^{l} f_i(s)^{a_i(\alpha)} = (\mathrm{const.})\prod_{i=1}^{l}(\bar{e}^*_i(s)+p_i)^{a_i(\alpha)} \quad (\alpha\in X)$$

となる. ここで,

$$\bar{\eta}_k(s) = \prod_{\substack{i=1 \\ e^*_i=e_k}}^{l}(\bar{e}_k(s)+p_i)^{a_i(\lambda_i)} \quad (k=1,\cdots,N)$$

とおき, $\eta_k\in\mathbb{C}(t)$ を $\eta_k(\bar{e}_k(s)) = \bar{\eta}_k(s)$ なる一変数有理式とすれば,

$$c_\alpha(s) = (\mathrm{const.})\prod_{k=1}^{N}\eta_k(\bar{e}_k(s))^{\tilde{a}_k(\alpha)}$$

で, (const.) の部分を $h(\alpha)$ とおけば, $c_{\alpha\beta}(s) = c_\alpha(s)c_\beta(s)^\alpha$ より, $h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta)$.

(iii) $e_1, \cdots, e_N$ は相異なるので, $k \neq k'$ なら $\eta_k(\bar{e}_k(s))^{\tilde{a}_k(\alpha)}$ と $\eta_{k'}(\bar{e}_{k'}(s))^{\tilde{a}_{k'}(\alpha)}$ は共通因子を全く持たない. したがって

$$c_\alpha(s) \text{ が多項式} \Leftrightarrow \eta_k(\bar{e}_k(s))^{\tilde{a}_k(\alpha)} \text{が多項式 } (k = 1, \cdots, N)$$

である. ここで, $\eta_k(t) = \prod_{i=1}^{m_k}(t + q_{ki})^{\mu_{ki}}$ $(\mu_{ki} = \pm 1)$, $M_k = \sum_{i=1}^{m_k} \mu_{ki}$ とおく. $c_\alpha(s)$ が多項式ならば各 $\eta_k(\bar{e}_k(s))^{\tilde{a}_k(\alpha)}$ は多項式で, その最高次斉次部分は $(\bar{e}_k(s))^{M_k e_k(\alpha)}$ である. 従って $\alpha_1, \alpha_2 \in X^+$, $k = 1, \cdots, N$ に対し,

$$\begin{aligned} & e_k(\alpha_1), e_k(\alpha_2) \geq 0 \quad (M_k > 0 \text{ のとき}) \\ \text{または} \quad & e_k(\alpha_1), e_k(\alpha_2) \leq 0 \quad (M_k < 0 \text{ のとき}). \end{aligned}$$

□

注意 3.13 上の定理で, 必要ならば λ_i の代わりに λ_i^{-1} をあらかじめとっておくことにより,

$$e_k(\beta_1), \cdots, e_k(\beta_r) \geq 0 \quad (k = 1, \cdots, N)$$

としてよい. このとき,

$$X^+ = \{\alpha \in X \,:\, \delta(\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r\} = \{\alpha \in X \,:\, e_k(\alpha) \geq 0 \ (k = 1, \cdots, N)\}.$$

3.4 b-関数についてのまとめ

ここで, 定理 3.3 の b-関数に話を戻すと, 補題 3.5 より $b \in Z^1(X_1, R)$ となり, しかも $b_{\chi_1}(s), \cdots, b_{\chi_r}(s)$ は定数でない多項式だから, 定理 3.12 を適用することができる. また, 定理 3.3(ii) の証明より, $h(\chi) \in \mathbb{R}_{>0}^\times$ としてよい. よって次の定理がいえる.

定理 3.14 ある準同型 $e_1, \cdots, e_N : X_1 \to \mathbb{Z}$, および $\eta_1(t), \cdots, \eta_N(t) \in \mathbb{C}(t)$, $h : X_1 \to \mathbb{R}_{>0}^\times$ があって

(i) 任意の $\chi \in X_1^+$ に対し $e_k(\chi) \geq 0$ $(k = 1, \cdots, N)$ で,

$$b_\chi(s) = h(\chi) \prod_{\substack{k=1 \\ e_k(\chi) \neq 0}}^{N} \prod_{j=0}^{e_k(\chi)-1} \eta_k(\bar{e}_k(s) + j) \qquad \left(\text{ただし, } \bar{e}_k(s) = \sum_{i=1}^{r} e_k(\chi_i)s_i\right).$$

(ii) $\mathrm{G.C.D.}(e_k(\chi_i))_{\substack{i=1,\cdots,r \\ e_k(\chi_i)\neq 0}} = 1 \quad (k = 1, \cdots, N)$.

(iii) 各 η_k は, $\eta_k(t) = \prod_{i=1}^{m_k}(t + q_{ki})^{\mu_{ki}}$ $(\mu_{ki} = \pm 1, \sum_{i=1}^{m_k} \mu_{ki} > 0)$ の形.

(iv) $\chi \in X_1^+$, $e_k(\chi) > 0$ なら $\prod_{j=0}^{e_k(\chi)-1} \eta_k(t + j)$ は多項式.

なお, 上記の η_k は, e_k 方向の 部分 b-関数 と呼ばれている.

4 複素数体上の局所ゼータ関数 (standard case)

4.1 Γ-関数

局所ゼータ関数の計算においては Γ-関数の性質がとても重要になる. そこで, 本題に入る前に, それらについていくつか補足しておくことにしよう.

$s \in \mathbb{C}$ に対し, $\Gamma(s)$ を

$$\Gamma(s) := \lim_{m\to\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$$

により定義する. $\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \cdots$ を 1 位の極にもつ有理型関数である. また $\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

と積分表示されることが知られている. この $\Gamma(s)$ は $(s-1)!$ $(s \in \mathbb{N})$ の複素数への拡張である. すなわち, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が任意の $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<0}$ について成りたつ. また, これを繰り返すと $\Gamma(s+m) = (s+m-1)\cdots s\Gamma(s)$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ などとなる.

それから, 下の補題が成り立つ ([I2, 6.2]):

補題 4.1 任意の $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<0}$ に対し, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$ とおくと,

$$|\Gamma(s)| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}(1 + o(1)) \quad (|t| \to \infty).$$

4.2 $z_{\mathbb{C}}(s)$ の計算

それでは, 以下, $\mathbb{C}$ 上の standard case, $z_{\mathbb{C}}(s)$ の計算を行っていくことにする.

(G, V) を 3 節のように群が reductive な概均質ベクトル空間とし, Y をその open orbit とする. また, $P_1, \cdots, P_r$ をその基本相対不変式, $d_i = \deg P_i(x)$, $P_i \leftrightarrow \chi_i$ $(i = 1, \cdots, r)$, $X_1 = \langle \chi_1, \cdots, \chi_r \rangle$ とし, $b_\chi(s)$ を $P(x)^{\delta(\chi)}$ の b-関数, η_k $(k = 1, \cdots, N)$ をそれぞれ e_k 方向の部分 b-関数として, $b_\chi(s)$ が定理 3.14 のように書けているとする. すなわち, 各 k について $\eta_k(t) = \prod_{i=1}^{m_k} (t + q_{ki})^{\mu_{ki}}$ $(\mu_{ki} = \pm 1)$ となっているとき, $\chi \in X_1^+$ に対して

$$b_\chi(s) = h(\chi) \prod_{\substack{k=1 \\ e_k(\chi)\neq 0}}^{N} \prod_{i=1}^{m_k} \prod_{j=0}^{e_k(\chi)-1} (\bar{e}_k(s) + q_{ki} + j)^{\mu_{ki}}.$$

ここで, $\gamma_{\mathbb{C}}(s)$ を

$$\gamma_{\mathbb{C}}(s) := \prod_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{m_k} \Gamma(\bar{e}_k(s) + q_{ki})^{\mu_{ki}}$$

により定める. すると, $\chi \in X_1^+$ に対し $\bar{e}_k(s+\delta(\chi)) = \bar{e}_k(s)+e_k(\chi)$ だから, $e_k(\chi) > 0$ なら $\Gamma(\bar{e}_k(s+\delta(\chi))+q_{ki}) = \Gamma(\bar{e}_k(s)+q_{ki}+e_k(\chi)) = \prod_{j=0}^{e_k(\chi)-1}(\bar{e}_k(s)+q_{ki}+j)\Gamma(\bar{e}_k(s)+q_{ki})$. よって

$$\gamma_{\mathbb{C}}(s+\delta(\chi)) = h(\chi)^{-1}b_\chi(s)\gamma_{\mathbb{C}}(s)$$

となる.

さて, 絶対値 $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ を $t \in \mathbb{C}$ に対し $|t|_{\mathbb{C}} = t\bar{t} = |t|^2$ により定め, $\mathrm{Re}(s_1), \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > 0$ なる $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$z_{\mathbb{C}}(s) := \int_V |P(x)|_{\mathbb{C}}^s e^{-2\pi\, {}^t x\bar{x}} dx \quad \left(= \int_Y |P(x)|_{\mathbb{C}}^s e^{-2\pi\, {}^t x\bar{x}} dx \right)$$

とおく (微分形式 dx は, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x_i = u_i + \sqrt{-1}v_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対し $dx = 2^n du_1 dv_1 \cdots du_n dv_n$ としてとる). この積分は上記の範囲では絶対収束して $z_{\mathbb{C}}(s)$ は正則となる.

この節の目標は, 次を証明することである:

定理 4.2 $z_{\mathbb{C}}(s)$ は $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続され,

$$z_{\mathbb{C}}(s) = \prod_{i=1}^r ((2\pi)^{-d_i} h(\chi_i))^{s_i} \frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(0)}$$

となる.

この定理の証明のため, まずは次を示す:

補題 4.3 $\chi \in X_1^+$, $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対し

$$\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^s P(x)^{\delta(\chi)}] = b_\chi(s)|P(x)|_{\mathbb{C}}^s.$$

[証明] 各複素変数 x_j $(j = 1, \cdots, n)$ について $(\partial/\partial x_j)[\bar{x}_j] = 0$ となることに注意すれば, $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対し,

$$\begin{aligned} \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^s P(x)^{\delta(\chi)}] &= \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[\overline{P(x)}^s P(x)^{s+\delta(\chi)}] \\ &= \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[\bar{P}(\bar{x})^s P(x)^{s+\delta(\chi)}] \\ &= \bar{P}(\bar{x})^s \bar{P}(\partial_x)[P(x)^{s+\delta(\chi)}] \\ &= \overline{P(x)}^s b_\chi(s) P(x)^s \\ &= b_\chi(s)|P(x)|_{\mathbb{C}}^s \end{aligned}$$

となることがわかる. これにより上記補題を得る. □

以下, $u = (u_1, \cdots, u_r)$, $v = (v_1, \cdots, v_r)$ に対し $u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_rv_r$ などと書くことにする. すると, 例えば $d = (d_1, \cdots, d_r)$ とするとき $d \cdot \delta(\chi) = \deg P(x)^{\delta(\chi)}$ となる.

さて, 上の補題を使えば, 部分積分により

$$\begin{aligned}
b_\chi(s)z_{\mathbb{C}}(s) &= \int_V (\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^s P(x)^{\delta(\chi)}])e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}dx \\
&= (-1)^{d\cdot\delta(\chi)}\int_V (|P(x)|_{\mathbb{C}}^s P(x)^{\delta(\chi)})\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}dx \\
&= (2\pi)^{d\cdot\delta(\chi)}\int_V |P(x)|_{\mathbb{C}}^s P(x)^{\delta(\chi)}\bar{P}(\bar{x})^{\delta(\chi)}e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}dx \\
&= (2\pi)^{d\cdot\delta(\chi)}\int_V |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s+\delta(\chi)}e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}dx \\
&= (2\pi)^{d\cdot\delta(\chi)}z_{\mathbb{C}}(s+\delta(\chi)).
\end{aligned}$$

故に

$$z_{\mathbb{C}}(s+\delta(\chi)) = (2\pi)^{-d\cdot\delta(\chi)}b_\chi(s)z_{\mathbb{C}}(s).$$

これにより $z_{\mathbb{C}}(s)$ は $\mathbb{C}^r$ における有理型関数として解析接続される. とくに

$$\int_V e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}dx = 1$$

だから (c.f. [Kt1, 補題 3.6]), $z_{\mathbb{C}}(0)=1$ である.

以下, 上の式を使って定理を証明していくことにする. なお, この証明は [I2, Chapter 6] の方法をそのまま多変数に拡張したものである.

まず,

$$C(s) = \prod_{i=1}^r ((2\pi)^{d_i}h(\chi_i)^{-1})^{s_i}\frac{z_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}$$

とおくと, 任意の $\chi\in X_1^+$ に対して $C(s+\delta(\chi))=C(s)$ となる. これにより $C(s)$ は全平面で正則な周期関数として解析接続され,

$$C(s) = \sum_{u_1,\cdots,u_r=-\infty}^{\infty}\alpha_{u_1\cdots u_r}e^{2\pi\sqrt{-1}(u_1s_1+\cdots u_rs_r)}$$

と Fourier 級数展開される. このとき各 $u=(u_1,\cdots,u_r)$ に対して α_u は s によらない数で, $\sigma=(\sigma_i,\cdots,\sigma_r)=(\mathrm{Re}(s_1),\cdots,\mathrm{Re}(s_r))$, $t=(t_1,\cdots,t_r)=(\mathrm{Im}(s_1),\cdots,\mathrm{Im}(s_r))$ とおくと,

$$\alpha_u = e^{2\pi u\cdot t}\int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r}C(s)e^{-2\pi\sqrt{-1}u\cdot\sigma}d\sigma$$

と書くことができる.

そこでこれから $u\neq(0,\cdots,0)\Rightarrow\alpha_u=0$ となることを示し, $C(s)$ が s によらない定数であることを証明することにする.

上の式より

$$\begin{aligned}|\alpha_u| &\leq e^{2\pi u\cdot t}\int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r}|C(s)|d\sigma \\ &= e^{2\pi u\cdot t}\int_1^2\cdots\int_1^2\left(\prod_{i=1}^r h(\chi_i)^{-\sigma_i}\right)(2\pi)^{d\cdot\sigma}\frac{|z_{\mathbb{C}}(s)|}{|\gamma_{\mathbb{C}}(s)|}d\sigma_1\cdots d\sigma_r \qquad (4)\end{aligned}$$

となるので, この右辺の式を評価して, s のとりかたによりいくらでも小さくできることを示そう.

$|z_{\mathbb{C}}(s)|$ の評価

$z_{\mathbb{C}}(s)$ の定義式において, $l = l(x) = \sqrt{{}^t x\bar{x}}$, $x = lu$ とする. このとき, $dx = 2^n l^{2n-1} dl du$ となる. そして

$$\psi(s) = 2^{n-1}\int_{l(u)=1}|P(x)|_{\mathbb{C}}^s du$$

とおく.

$P_i(lu) = l^{d_i}P_i(u)$ より $|P(lu)|_{\mathbb{C}}^s = l^{2d\cdot s}|P(u)|_{\mathbb{C}}^s$ だから, $\mathrm{Re}(s_1),\cdots \mathrm{Re}(s_r) > 0$ なる範囲で

$$\begin{aligned}z_{\mathbb{C}}(s) &= \int_V |P(x)|_{\mathbb{C}}^s e^{-2\pi\, {}^t x\bar{x}}dx \\ &= 2^n\int_0^\infty l^{2(d\cdot s+n)-1}e^{-2\pi l^2}dl\int_{l(u)=1}|P(u)|_{\mathbb{C}}^s du \\ &= 2\psi(s)\int_0^\infty l^{2(d\cdot s+n)-1}e^{-2\pi l^2}dl \\ &\quad (\text{ここで } \nu = 2\pi l^2 \text{ とおけば}, 4\pi l dl = d\nu \text{ で}) \\ &= 2\psi(s)\int_0^\infty \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{d\cdot s+n-1}e^{-\nu}(4\pi)^{-1}d\nu \\ &= (2\pi)^{-d\cdot s-n}\psi(s)\int_0^\infty \nu^{d\cdot s+n-1}e^{-\nu}d\nu \\ &= (2\pi)^{-d\cdot s-n}\psi(s)\Gamma(d\cdot s+n)\end{aligned}$$

である. さらに

$$|\psi(s)| \leq 2^{n-1}\int_{l(u)=1}|P(x)|_{\mathbb{C}}^\sigma du$$

だから, この右辺の $1 \leq \sigma_i \leq 2$ $(i = 1,\cdots,r)$ なる範囲での最大値を M とすれば, この範囲で

$$|z_{\mathbb{C}}(s)| \leq (2\pi)^{-d\cdot\sigma-n}M|\Gamma(d\cdot s+n)|$$

となる.
　また, 補題 4.1 により

$$|\Gamma(d\cdot s+n)|=(2\pi)^{\frac{1}{2}}|d\cdot t|^{d\cdot\sigma+n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|d\cdot t|}(1+o(1))$$

となる. ただし $o(1)$ は $|d\cdot t|\to\infty$ のとき 0 に収束する無限小である.
　以上をまとめて

$$|z_{\mathbb{C}}(s)|\leq(2\pi)^{-d\cdot\sigma-n+\frac{1}{2}}M|d\cdot t|^{d\cdot\sigma+n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|d\cdot t|}(1+o(1))$$

を得る.

$|\gamma_{\mathbb{C}}(s)|$ の評価

　$\tilde{e}_k=(e_k(\chi_1),\cdots,e_k(\chi_r))$ $(k=1,\cdots,N)$ とおく.
　柏原の定理 ([Km]) により $q_{ki}\in\mathbb{Q}_{>0}$ となることに注意すれば, 補題 4.1 より

$$|\Gamma(\bar{e}_k(s)+q_{ki})^{\mu_{ki}}|=((2\pi)^{\frac{1}{2}}|\tilde{e}_k\cdot t|^{\tilde{e}_k\cdot\sigma+q_{ki}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|\tilde{e}_k\cdot t|}(1+o_k(1)))^{\mu_{ki}}$$

となる. ただし $o_k(1)$ は $|\tilde{e}_k\cdot t|\to\infty$ のとき 0 に収束する無限小である.
　従って, $M_k=\sum_{v=1}^{m_k}\mu_{kv}>0$ とおくと,

$$\begin{aligned}|\gamma_{\mathbb{C}}(s)| &= \prod_{k=1}^{N}\prod_{v=1}^{m_k}|\Gamma(\bar{e}_k(s)+q_{kv})^{\mu_{kv}}|\\ &= \prod_{k=1}^{N}\prod_{v=1}^{m_k}((2\pi)^{\frac{1}{2}}|\tilde{e}_k\cdot t|^{\tilde{e}_k\cdot\sigma+q_{kv}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|\tilde{e}_k\cdot t|}(1+o_k(1)))^{\mu_{kv}}\\ &= \prod_{k=1}^{N}(2\pi)^{\frac{M_k}{2}}|\tilde{e}_k\cdot t|^{M_k\tilde{e}_k\cdot\sigma+\sum_v\mu_{kv}q_{kv}-\frac{M_k}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}M_k|\tilde{e}_k\cdot t|}(1+o_k(1))\end{aligned}$$

となる.

$|\alpha_u|$ の評価

　さて, $u\neq(0,\cdots,0)$ に対し $u_1c_1+\cdots+u_rc_r\neq 0$ となる正の数 $c_1,\cdots,c_r>0$ を適当にとる. そして (4) 式の右辺において, $t=(c_1,\cdots,c_r)t_0$ $(t_0\in\mathbb{R})$ となるような s をとると,

$$|z_{\mathbb{C}}(s)|\leq(2\pi)^{-d\cdot\sigma-n+\frac{1}{2}}M\left(\left|\left(\sum c_id_i\right)\right||t_0|\right)^{d\cdot\sigma+n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|(\sum c_id_i)t_0|}(1+o(1)).$$

また, $d=\sum_{k=1}^{N} M_k\tilde{e}_k$ より

$$\begin{aligned}|\gamma_{\mathbb{C}}(s)| &= (2\pi)^{\frac{\sum M_k}{2}}|t_0|^{d\cdot\sigma+\sum\mu_{kv}q_{kv}-\frac{\sum M_k}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|(\sum c_id_i)t_0|}\\ &\quad\times\left(\prod\left(\sum c_ie_k(\chi_i)\right)^{M_k\tilde{e}_k\cdot\sigma+\sum\mu_{kv}q_{kv}-\frac{M_k}{2}}(1+o_k(1))\right)\end{aligned}$$

となる.

よって,

$$\delta_0=n-\frac{1}{2}-\sum\mu_{kv}q_{ki}+\frac{\sum M_k}{2}$$

とおき, t_0 によらない適当な定数 L をとれば,

$$|\alpha_u|\le e^{2\pi(\sum c_iu_i)t_0}|t_0|^{\delta_0}L(1+o(1))$$

となる. ここで, $e^{2\pi(\sum c_iu_i)t_0}\to 0$ となる方向で $|t_0|\to\infty$ とすれば, 右辺は 0 に収束する.

以上より, $u\neq(0,\cdots,0)$ のとき $\alpha_u=0$ となり, $C(s)$ が s によらない定数であることがいえた. すなわち $C(s)=C(0)$.

従って

$$\begin{aligned}z_{\mathbb{C}}(s) &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h(\chi_i))^{s_i}\gamma_{\mathbb{C}}(s)C(0)\\ &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h(\chi_i))^{s_i}\gamma_{\mathbb{C}}(s)\frac{z_{\mathbb{C}}(0)}{\gamma_{\mathbb{C}}(0)}\\ &= \prod_{i=1}^{r}((2\pi)^{-d_i}h(\chi_i))^{s_i}\frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s)}{\gamma_{\mathbb{C}}(0)}\end{aligned}$$

を得る. 以上で定理 4.2 を証明することができた. □

5 実数体上の局所ゼータ関数 (standard case)

この節では, 各基本相対不変式が multiplicity free であるときに $z_{\mathbb{R}}(s)$ が前節同様に計算できることをみていく. それにあたり, まず最初に $\mathbb{R}$ 上の基本相対不変式について少し説明することにする.

5.1 実数体上の基本相対不変式

(G,V) をまた 3 節のように群が reductive な概均質ベクトル空間とする. さらにこの節では G は $\mathbb{R}$ 上定義されている, すなわち $\overline{G}=G$ と仮定する.

さて, (G,V) の singular set を S とし, S_0 を S の余次元 1 の既約成分の合併とする. このとき次が成り立つことはよく知られている:

補題 5.1 ある $\mathbb{R}$ 係数多項式 $f(x)$ があって $S_0 = \{x \in V \,:\, f(x) = 0\}$.

[証明] $x \in V$ の isotropy subgroup を $G_x = \{g \in G \,:\, gx = x\}$ とする. このとき写像 $G/G_x \ni gG_x \mapsto gx \in Gx$ は全単射な双有理写像となるので, $\dim Gx = \dim G/G_x = \dim G - \dim G_x$ である. また, 一般には $\dim Gx \leq \dim V$ であるが, Gx が open orbit である時のみ $\dim Gx = \dim V$ となるので,

$$x \in S \Leftrightarrow \dim Gx < \dim V \Leftrightarrow \dim G - \dim V < \dim G_x$$

となる.

さて, $g \in G_x \Leftrightarrow gx = x \Leftrightarrow \bar{g}\bar{x} = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{g} \in G_{\bar{x}} \Leftrightarrow g \in \overline{G_{\bar{x}}}$ だから, $G_x = \overline{G_{\bar{x}}}$ である. 一方 $G_{\bar{x}} \ni g \mapsto \bar{g} \in \overline{G_{\bar{x}}}$ は Zariski 位相で同相写像になるので, $\dim G_{\bar{x}} = \dim \overline{G_{\bar{x}}} = \dim G_x$ である. よって,

$$\begin{aligned} x \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \dim G_x > \dim G - \dim V \quad \Leftrightarrow \quad \dim G_{\bar{x}} > \dim G - \dim V \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{x} \in S, \end{aligned}$$

すなわち $\bar{S} = S$ となり, S が $\mathbb{R}$ 上定義されることがわかる. 従って S_0 も $\mathbb{R}$ 上定義され, 上記の補題が成り立つことがいえる. $\square$

さて, 今の補題にでてきた $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ の $\mathbb{R}$ 上既約因子をとり, $P_1(x), \cdots, P_r(x)$ とする. これらは (G,V) の相対不変式であり, また, 任意の $\mathbb{R}$ 係数相対不変式は, 実数定数倍を除き $P_1(x), \cdots, P_r(x)$ の巾積と一致する. この $P_1(x), \cdots, P_r(x)$ を (G,V) の $\mathbb{R}$ 上の基本相対不変式と呼ぶことにする.

また, $P_i \leftrightarrow \chi_i$ $(i = 1, \cdots, r)$, $X_1 = \langle \chi_1, \cdots, \chi_r \rangle$ とすれば, この $P_1(x), \cdots, P_r(x)$ に対しても, $P(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{s+\delta(\chi)}] = b_\chi(s)P(x)^s$ なる b-関数が存在して, 定理 3.14 のような一次式の積に書かれることは容易にわかる.

そこでまた, $d_i = \deg P_i(x)$, $b_\chi(s)$ を $P(x)^{\delta(\chi)}$ の b-関数, $\eta_k(t) = \prod_{i=1}^{m_k}(t + q_{ki})^{\mu_{ki}}$ $(k = 1, \cdots, N,\ \mu_{ki} = \pm 1)$ をそれぞれ e_k 方向の部分 b-関数とし, $\chi \in X_1^+$ に対して

$$b_\chi(s) = h(\chi) \prod_{\substack{k=1 \\ e_k(\chi) \neq 0}}^{N} \prod_{i=1}^{m_k} \prod_{j=0}^{e_k(\chi)-1} (\bar{e}_k(s) + q_{ki} + j)^{\mu_{ki}}.$$

と書けているとしてよい.

ここで, $P_1, \cdots, P_r$ を勝手に ± 1 倍しても b-関数は変わらない. つまり, $P_i'(x) = \pm P_i(x)$ $(i = 1, \cdots, r,$ 復号任意$)$ としてもやはり $P'(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P'(x)^{s+\delta(\chi)}] = b_\chi(s)P'(x)^s$ となる.

補題 5.2 $V_{\mathbb{R}}$ を V の $\mathbb{R}$ 有理点全体とすると, $\chi \in X_1^+$, $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対し $V_{\mathbb{R}}$ 上で,

$$P(\partial_x)^{\delta(\chi)}[|P(x)|^s P(x)^{\delta(\chi)}] = b_\chi(s)|P(x)|^s.$$

[証明] $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_r) \in \{\pm 1\}^r$ に対し

$$V_\xi := \{x \in V_{\mathbb{R}} \, : \, |P_i(x)| = \xi_i P_i(x) \ (i = 1, \cdots, r)\}$$

とおき, $P_i^{(\xi)} = \xi_i P_i$, $P^{(\xi)}(x)^s = P_1^{(\xi)}(x)^{s_1} \cdots P_r^{(\xi)}(x)^{s_r}$ などとする. すると各 V_ξ 上で,

$$\begin{aligned} P(\partial_x)^{\delta(\chi)}[|P(x)|^s P(x)^{\delta(\chi)}] &= P^{(\xi)}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P^{(\xi)}(x)^s P^{(\xi)}(x)^{\delta(\chi)}] \\ &= b_\chi(s) P^{(\xi)}(x)^s \\ &= b_\chi(s)|P(x)|^s \end{aligned}$$

となるが, $\bigcup_{\xi \in \{\pm 1\}^r} V_\xi = V_{\mathbb{R}}$ だから, 結局全 $V_{\mathbb{R}}$ 上で補題の式が成り立つ. □

5.2 $z_{\mathbb{R}}(s)$ の計算

それでは, $z_{\mathbb{R}}(s)$ の計算を行っていくことにしよう.

以下, $P_1(x), \cdots, P_r(x)$ は multiplicity free, すなわち

$$P_i(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_i} \leq n} a_{j_1 \cdots j_{d_i}} x_{j_1} \cdots x_{j_{d_i}} \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{5}$$

という形をしているものと仮定する. このとき $V_{\mathbb{R}}$ 上で

$$P_i(\partial_x) e^{-\pi\, {}^t x x} = (-2\pi)^{d_i} P_i(x) e^{-\pi\, {}^t x x} \quad (i = 1, \cdots, r)$$

が成立する.

そして, $\mathrm{Re}(s_1), \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > 0$ なる $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$z_{\mathbb{R}}(s) := \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^s e^{-\pi\, {}^t x x} dx$$

とおく. この積分は上記の範囲では絶対収束して $z_{\mathbb{R}}(s)$ は正則となる.

さらに, 補題 5.2 と部分積分により, 各 $i = 1, \cdots, r$ に対し

$$\begin{aligned} b_{\chi_i}(s) z_{\mathbb{R}}(s) &= \int_{V_{\mathbb{R}}} (P_i(\partial_x)[|P(x)|^s P_i(x)]) e^{-\pi\, {}^t x x} dx \\ &= (-1)^{d_i} \int_{V_{\mathbb{R}}} (|P(x)|^s P_i(x)) P_i(\partial_x) e^{-\pi\, {}^t x x} dx \\ &= (2\pi)^{d_i} \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^s P_i(x) P_i(x) e^{-\pi\, {}^t x x} dx \\ &= (2\pi)^{d_i} \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{s + 2\delta(\chi_i)} e^{-\pi\, {}^t x x} dx \\ &= (2\pi)^{d_i} z_{\mathbb{R}}(s + 2\delta(\chi_i)). \end{aligned}$$

故に

$$z_{\mathbb{R}}(s+2\delta(\chi_i))=(2\pi)^{-d_i}b_{\chi_i}(s)z_{\mathbb{R}}(s)\quad(i=1,\cdots,r).$$

これにより $z_{\mathbb{R}}(s)$ は $\mathbb{C}^r$ における有理型関数として解析接続される．特に $z_{\mathbb{R}}(0)=1$ である．

補題 5.3 各基本相対不変式が multiplicity free ならば,

(i) $b_{\chi_i}(s)b_{\chi_j}(s+2\delta(\chi_i))=b_{\chi_i}(s+2\delta(\chi_j))b_{\chi_j}(s)$ $(i,j=1,\cdots,r)$.

(ii) $e_k(\chi_i)=0,1$ $(k=1,\cdots,N,\ i=1,\cdots,r)$.

(iii) 特に, 各部分 b-関数は多項式．すなわち $\mu_{ki}=1$ $(k=1,\cdots,N,\ i=1,\cdots,m_k)$ とできる．

[証明] まず,

$$\begin{aligned} z_{\mathbb{R}}(s+2\delta(\chi_i\chi_j)) &= (2\pi)^{-d_id_j}b_{\chi_i}(s+2\delta(\chi_j))b_{\chi_j}(s)z_{\mathbb{R}}(s) \\ &= (2\pi)^{-d_id_j}b_{\chi_i}(s)b_{\chi_j}(s+2\delta(\chi_i))z_{\mathbb{R}}(s) \end{aligned}$$

より (i) が成立する．

(ii) 各 $k=1,\cdots,N$ に対し, $e_k(\chi_i),e_k(\chi_j)>0$ なる i,j を任意にとる．このとき (i) の式を部分 b-関数ごとに考えると

$$\begin{aligned} &\prod_{u=1}^{m_k}\prod_{v=0}^{e_k(\chi_i)-1}(\bar{e}_k(s)+q_{ku}+v)^{\mu_{ku}}\prod_{u=1}^{m_k}\prod_{v=0}^{e_k(\chi_j)-1}(\bar{e}_k(s)+q_{ku}+2e_k(\chi_i)+v)^{\mu_{ku}} \\ =&\prod_{u=1}^{m_k}\prod_{v=0}^{e_k(\chi_i)-1}(\bar{e}_k(s)+q_{ku}+2e_k(\chi_j)+v)^{\mu_{ku}}\prod_{u=1}^{m_k}\prod_{v=0}^{e_k(\chi_j)-1}(\bar{e}_k(s)+q_{ku}+v)^{\mu_{ku}} \end{aligned}$$

を得る．

ここで $q_{k1},\cdots,q_{km_k}$ のうち最大のものを q_k とおくと, 左辺にでてくる一次式たちのうち定数項が最大のものは, $(\bar{e}_k(s)+q_k+2e_k(\chi_i)+e_k(\chi_j)-1)$ であり, 右辺のそれは $(\bar{e}_k(s)+q_k+2e_k(\chi_j)+e_k(\chi_i)-1)$ である．この両者は一致していなければならないのだから,

$$q_k+2e_k(\chi_i)+e_k(\chi_j)-1=q_k+2e_k(\chi_j)+e_k(\chi_i)-1$$

すなわち $e_k(\chi_i)=e_k(\chi_j)$ を得る．よって, $e_k(\chi_1),\cdots,e_k(\chi_r)$ のうち 0 でないものはすべて一致する．ところが定理 3.12(i) より 0 でないものの最大公約数は 1 になるのだから, それらはすべて 1 になる．

また, (iii) は (ii) と定理 3.14(iv) よりただちに従う． □

そこで, $\gamma_{\mathbb{R}}(s)$ を

$$\gamma_{\mathbb{R}}(s):=\prod_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{m_k}\Gamma\left(\frac{\bar{e}_k(s)+q_{ki}}{2}\right)$$

により定める. すると

$$\gamma_{\mathbb{R}}(s+2\delta(\chi_i)) = 2^{-d_i} h(\chi_i)^{-1} b_{\chi_i}(s)\gamma_{\mathbb{R}}(s) \quad (i=1,\cdots,r)$$

となる.

さて, この節の目標は, 前節同様次を証明することである:

定理 5.4

$$z_{\mathbb{R}}(s) = \prod_{i=1}^{r} (\pi^{-d_i} h(\chi_i))^{\frac{s_i}{2}} \frac{\gamma_{\mathbb{R}}(s)}{\gamma_{\mathbb{R}}(0)}.$$

証明は $z_{\mathbb{C}}(s)$ の場合とほぼ同様になる. まず,

$$C(s) = \prod_{i=1}^{r} (\pi^{d_i} h(\chi_i)^{-1})^{\frac{s_i}{2}} \frac{z_{\mathbb{R}}(s)}{\gamma_{\mathbb{R}}(s)}$$

とおくと, 任意の $\chi \in X_1^+$ に対して $C(s+2\delta(\chi)) = C(s)$ となる. これにより $C(s)$ は全平面で正則な周期関数として解析接続され,

$$C(s) = \sum_{u_1,\cdots,u_r=-\infty}^{\infty} \alpha_{u_1\cdots u_r} e^{2\pi\sqrt{-1}(u_1\frac{s_1}{2}+\cdots u_r\frac{s_r}{2})}$$

と Fourier 級数展開される. このとき各 $u = (u_1,\cdots,u_r)$ に対して α_u は s によらない数で, また, $\sigma = (\sigma_i,\cdots,\sigma_r) = (\mathrm{Re}(s_1)/2,\cdots,\mathrm{Re}(s_r)/2)$, $t = (t_1,\cdots,t_r) = (\mathrm{Im}(s_1)/2,\cdots,\mathrm{Im}(s_r)/2)$ とおくと,

$$\alpha_u = e^{2\pi u\cdot t} \int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r} C(s) e^{-2\pi\sqrt{-1}u\cdot\sigma} d\sigma$$

と書くことができる.

そこでこれから $u \neq (0,\cdots,0) \Rightarrow \alpha_u = 0$ となることを示し, $C(s)$ が s によらない定数であることを証明することにする.

上の式より

$$\begin{aligned} |\alpha_u| &\leq e^{2\pi u\cdot t} \int_{\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r} |C(s)| d\sigma \\ &= e^{2\pi u\cdot t} \int_1^2 \cdots \int_1^2 \left(\prod_{i=1}^{r} h(\chi_i)^{-\sigma_i} \right) \pi^{d\cdot\sigma} \frac{|z_{\mathbb{R}}(s)|}{|\gamma_{\mathbb{R}}(s)|} d\sigma_1 \cdots d\sigma_r \end{aligned} \tag{6}$$

となるので, この右辺の式を評価して, s のとりかたによりいくらでも小さくできることを示そう.

$|z_{\mathbb{R}}(s)|$ の評価

$z_{\mathbb{R}}(s)$ の定義式において, $l = l(x) = \sqrt{{}^t xx}$, $x = lu$ とする．このとき, $dx = l^{n-1} dl du$ となる．そして

$$\psi(s) = 2^{-1} \int_{l(u)=1} |P(x)|^s du$$

とおく.

$P_i(lu) = l^{d_i} P_i(u)$ だから, $\mathrm{Re}(s_1), \cdots \mathrm{Re}(s_r) > 0$ なる範囲で

$$\begin{aligned}
z_{\mathbb{R}}(s) &= \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^s e^{-\pi\, {}^t xx} dx \\
&= \int_0^\infty l^{d\cdot s+n-1} e^{-\pi l^2} dl \int_{l(u)=1} |P(u)|^s du \\
&= 2\psi(s) \int_0^\infty l^{d\cdot s+n-1} e^{-\pi l^2} dl \\
&\quad (\text{ここで } \nu = \pi l^2 \text{ とおけば}, 2\pi l dl = d\nu \text{ で}) \\
&= 2\psi(s) \int_0^\infty \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{d\cdot s+n}{2}-1} e^{-\nu} (2\pi)^{-1} d\nu \\
&= \pi^{-\frac{d\cdot s+n}{2}} \psi(s) \int_0^\infty \nu^{\frac{d\cdot s+n}{2}-1} e^{-\nu} d\nu \\
&= \pi^{-\frac{d\cdot s+n}{2}} \psi(s) \Gamma\left(\frac{d\cdot s+n}{2}\right)
\end{aligned}$$

である．さらに

$$|\psi(s)| \leq 2^{-1} \int_{l(u)=1} |P(x)|^{2\sigma} du$$

だから, この右辺の $1 \leq \sigma_i \leq 2$ $(i = 1, \cdots, r)$ なる範囲での最大値を M とすれば, この範囲で

$$|z_{\mathbb{R}}(s)| \leq \pi^{-d\cdot\sigma-\frac{n}{2}} M \left|\Gamma\left(\frac{d\cdot s+n}{2}\right)\right|$$

となる.

また, 補題 4.1 により

$$\left|\Gamma\left(\frac{d\cdot s+n}{2}\right)\right| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |d\cdot t|^{d\cdot\sigma+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|d\cdot t|}(1+o(1))$$

となる．ただし $o(1)$ は $|d\cdot t| \to \infty$ のとき 0 に収束する無限小である.

以上をまとめて

$$|z_{\mathbb{R}}(s)| \leq 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-d\cdot\sigma-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} M |d\cdot t|^{d\cdot\sigma+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|d\cdot t|}(1+o(1))$$

を得る.

$|\gamma_{\mathbb{R}}(s)|$ の評価

$\tilde{e}_k = (e_k(\chi_1), \cdots, e_k(\chi_r))$ $(k = 1, \cdots, N)$ とおくと, 補題 4.1 より

$$\left|\Gamma\left(\frac{\bar{e}_k(s) + q_{ki}}{2}\right)\right| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\tilde{e}_k \cdot t|^{\tilde{e}_k \cdot \sigma + \frac{q_{ki}}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\tilde{e}_k \cdot t|}(1 + o_k(1))$$

となる. ただし $o_k(1)$ は $|\tilde{e}_k \cdot t| \to \infty$ のとき 0 に収束する無限小である.

$$\begin{aligned}
|\gamma_{\mathbb{R}}(s)| &= \prod_{k=1}^{N}\prod_{v=1}^{m_k}\left|\Gamma\left(\frac{\bar{e}_k(s) + q_{kv}}{2}\right)\right| \\
&= \prod_{k=1}^{N}\prod_{v=1}^{m_k}(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\tilde{e}_k \cdot t|^{\tilde{e}_k \cdot \sigma + \frac{q_{kv}}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\tilde{e}_k \cdot t|}(1 + o_k(1)) \\
&= \prod_{k=1}^{N}(2\pi)^{\frac{m_k}{2}} |\tilde{e}_k \cdot t|^{m_k\tilde{e}_k \cdot \sigma + \sum_v \frac{\mu_{kv}q_{kv}}{2} - \frac{m_k}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}m_k|\tilde{e}_k \cdot t|}(1 + o_k(1))
\end{aligned}$$

となる.

$|\alpha_u|$ の評価

さて, $u \neq (0, \cdots, 0)$ に対し $u_1c_1 + \cdots + u_rc_r \neq 0$ となる正の数 $c_1, \cdots, c_r > 0$ を適当にとる. そして (6) 式の右辺において, $t = (c_1, \cdots, c_r)t_0$ $(t_0 \in \mathbb{R})$ となるような s をとると,

$$|z_{\mathbb{R}}(s)| \leq 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-d\cdot\sigma - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}} M\left(\left|\left(\sum c_id_i\right)\right| |t_0|\right)^{d\cdot\sigma + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|(\sum c_id_i)t_0|}(1 + o(1)).$$

また, $d = \sum_{k=1}^{N} m_k\tilde{e}_k$ より

$$\begin{aligned}
|\gamma_{\mathbb{R}}(s)| &= (2\pi)^{\frac{\sum m_k}{2}} |t_0|^{d\cdot\sigma + \sum \frac{\mu_{kv}q_{kv}}{2} - \frac{\sum m_k}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|(\sum c_id_i)t_0|} \\
&\quad \times \left(\prod\left(\sum c_ie_k(\chi_i)\right)^{m_k\tilde{e}_k\cdot\sigma + \sum \frac{\mu_{kv}q_{kv}}{2} - \frac{m_k}{2}}(1 + o_k(1))\right)
\end{aligned}$$

となる.

よって,

$$\delta_0 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \sum \frac{\mu_{kv}q_{ki}}{2} + \frac{\sum m_k}{2}$$

とおき, t_0 によらない適当な定数 L をとれば,

$$|\alpha_u| \leq e^{2\pi(\sum u_ic_i)t_0}|t_0|^{\delta_0}L(1 + o(1))$$

となる．ここで, $e^{2\pi(\sum u_i c_i)t_0} \to 0$ となる方向で $|t_0| \to \infty$ とすれば, 右辺は 0 に収束する．

以上より, $u \neq (0,\cdots,0)$ のとき $\alpha_u = 0$ となり, $C(s)$ が s によらない定数であることがいえた．すなわち $C(s) = C(0)$.

従って

$$\begin{aligned}
z_{\mathbb{R}}(s) &= \prod_{i=1}^{r}(\pi^{-d_i}h(\chi_i))^{\frac{s_i}{2}}\gamma_{\mathbb{R}}(s)C(0) \\
&= \prod_{i=1}^{r}(\pi^{-d_i}h(\chi_i))^{\frac{s_i}{2}}\gamma_{\mathbb{R}}(s)\frac{z_{\mathbb{R}}(0)}{\gamma_{\mathbb{R}}(0)} \\
&= \prod_{i=1}^{r}(\pi^{-d_i}h(\chi_i))^{\frac{s_i}{2}}\frac{\gamma_{\mathbb{R}}(s)}{\gamma_{\mathbb{R}}(0)}
\end{aligned}$$

を得る．以上で定理 5.4 を証明することができた． □

6 多変数局所関数等式の具体的表示

6.1 複素数体上の局所関数等式

この節では, まず $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式について詳しく解説し, 4 節の結果をもとにその係数 $c(s)$ の決定を行う．

(G,V) を, また群が reductive な概均質ベクトル空間とし, Y を open orbit, $P_1,\cdots,P_r$ を基本相対不変式, $P_i \leftrightarrow \chi_i$ $(i=1,\cdots,r)$, $X_1 = \langle\chi_1,\cdots,\chi_r\rangle$, $d_i = \deg P_i$, $b_\chi(s)$ を $P(x)^{\delta(\chi)}$ の b-関数とする．

さらに, この節においては $\chi_0 \in X(G)$ を $\chi_0(g) = \det g$ により定め, $\chi_0^2 \in X_1$ となっていることを仮定する．そして, $\chi_0^2 = \chi_1^{2\kappa_1}\cdots\chi_r^{2\kappa_r}$ なる半整数 $\kappa_1,\cdots,\kappa_r$ をとり $\kappa = (\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ とおく．

さて, $\mathcal{S}(V)$ を V 上の Schwartz 空間とし, $\Phi(x) \in \mathcal{S}(V)$ に対して Fourier 変換 $\mathcal{F}(\Phi) \in \mathcal{S}(V)$ を

$$\mathcal{F}(\Phi)(y) = \int_V \Phi(x)e^{2\pi\sqrt{-1}({}^txy+{}^t\bar{x}\bar{y})}dx$$

により定める．

そして, $\mathrm{Re}(s_1) > \kappa_1,\cdots,\mathrm{Re}(s_r) > \kappa_r$ となる範囲の $s = (s_1,\cdots,s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して V 上の tempered distribution $Z_{\mathbb{C}}(s,\Phi)$ を

$$Z_{\mathbb{C}}(s,\Phi) := \int_Y |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s-\kappa}\Phi(x)dx \quad (\Phi \in \mathcal{S}(V))$$

と定める．各 Φ について, この積分は上記の範囲で絶対収束し $Z_{\mathbb{C}}$ は正則となる．

そして次が成り立つ ([Sm1, 第 2 章, §3]):

定理 6.1 (i) 各 $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に対し, $Z_{\mathbb{C}}(s,\Phi)$ は全 $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される.

(ii) ある有理型関数 $c(s)$ が存在して, 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に対し

$$Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) = c(s) Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s, \Phi)$$

が成立する.

[証明] (i) 任意の $\chi \in X_1^+$ に対し

$$\begin{aligned}
\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^{s+\delta(\chi)}] &= \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^{s} P(x)^{\delta(\chi)} \bar{P}(\bar{x})^{\delta(\chi)}] \\
&= \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)}[P(x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)}[|\bar{P}(\bar{x})|_{\mathbb{C}}^{s} \bar{P}(\bar{x})^{\delta(\chi)}]] \\
&= b_\chi(s) \bar{P}(\partial_x)[P(x)^{\delta(\chi)} |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s}] \\
&= b_\chi(s)^2 |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s}
\end{aligned}$$

となるから, 部分積分より

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{C}}(s+\delta(\chi), (\bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)}\Phi)) &= \int_Y |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s+\delta(\chi)-\kappa} \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)} \Phi(x) dx \\
&= \int_Y \bar{P}(\partial_x)^{\delta(\chi)} P(\partial_{\bar{x}})^{\delta(\chi)}[|P(x)|_{\mathbb{C}}^{s+\delta(\chi)-\kappa}] \Phi(x) dx \\
&= b_\chi(s-\kappa)^2 \int_Y |P(x)|_{\mathbb{C}}^{s-\kappa} \Phi(x) dx \\
&= b_\chi(s-\kappa)^2 Z_{\mathbb{C}}(s,\Phi).
\end{aligned}$$

これにより解析接続される.

(ii) 以下, $|\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s} = |\chi_1(g)|_{\mathbb{C}}^{s_1} \cdots |\chi_r(g)|_{\mathbb{C}}^{s_r}$ などと略記することにする. すると, 例えば $|\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{\kappa} = |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}$ である.

また, $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に対する $g \in G$ の作用を $\Phi_g(x) = \Phi(gx)$ として定める.

さて, $\mathrm{Re}(s_1) > \kappa_1, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > \kappa_r$ なる $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ をとる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Phi_g)(y) &= \int_V \Phi(gx) e^{2\pi\sqrt{-1}({}^t xy + {}^t\bar{x}\bar{y})} dx \\
&\quad (\text{ここで } x' = gx \text{ とおくと, } dx = |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1} dx' \text{ で}) \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1} \int_V \Phi(x') e^{2\pi\sqrt{-1}({}^t(g^{-1}x')y + {}^t(\overline{g^{-1}x'})\bar{y})} dx' \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1} \int_V \Phi(x') e^{2\pi\sqrt{-1}({}^t x'({}^t g^{-1} y) + {}^t\overline{x'}(\overline{{}^t g^{-1} y}))} dx' \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1} \mathcal{F}(\Phi)({}^t g^{-1} y)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi_g)) &= \int_Y |P(y)|_{\mathbb{C}}^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi_g)(y)dy \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}\int_Y |P(y)|_{\mathbb{C}}^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi)({}^tg^{-1}y)dy \\
&\quad (\text{ここで } y' = {}^tg^{-1}y \text{ とおくと, } dy = |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}dy' \text{ で}) \\
&= \int_Y |P({}^tgy')|_{\mathbb{C}}^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi)(y')dy' \\
&\quad (\text{補題 } 3.1 \text{ の証明により } |\chi_i({}^tg^{-1})| = |\chi_i(g)|^{-1}\ (i=1,\cdots,r)) \\
&= |\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s}|\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)).
\end{aligned}$$

すなわち

$$Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi_g)) = |\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s}|\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) \tag{7}$$

を得る. (i) の解析接続により, 上式は全 $\mathbb{C}^r$ で成立する.

次に, $\mathrm{Re}(s_1) < 0, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) < 0$ なる s をとる. すると,

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi_g) &= \int_Y |P(x)|_{\mathbb{C}}^{-s}\Phi(gx)dx \\
&\quad (\text{ここで } x' = gx \text{ とおくと, } dx = |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}dx' \text{ で}) \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}\int_Y |P(g^{-1}x')|_{\mathbb{C}}^{-s}\Phi(x')dx' \\
&= |\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}|\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s}\int_Y |P(x')|_{\mathbb{C}}^{-s}\Phi(x')dx' \\
&= |\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s}|\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi).
\end{aligned}$$

よって

$$Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi_g) = |\chi(g)|_{\mathbb{C}}^{s}|\chi_0(g)|_{\mathbb{C}}^{-1}Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi) \tag{8}$$

を得る. この式もやはり (i) の解析接続により全 $\mathbb{C}^r$ で成立する.

従って, Bruhat の定理 (例えば [W, Theorem 5.2.1.4] を参照) により, 各 s について $Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi))$ と $Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi)$ は Φ によらない定数倍を除いて一致する. その定数を $c(s)$ と書けば,

$$Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) = c(s)Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s,\Phi)$$

が成り立つ. $c(s)$ が有理型関数であることは (i) より明らか. □

上記の (ii) が局所関数等式と呼ばれるものである.

さて, これまでに $c(s)$ の部分は [Sm1] においては符号を除き決定されており, $r=1$ のときには [I1, 2] において符号をこめた形で得られている. $r \geq 2$ の場合については一般にはまだ完全に決定されていなかったが, 今回の 4 節の結果を用いれば, $c(s)$ を具

体的に求めることができる. 実際, $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ として standard function $\Phi(x) = e^{-2\pi\,{}^t x\bar{x}}$ をとれば $\mathcal{F}(\Phi) = \Phi$ で,

$$z_{\mathbb{C}}(s-\kappa) = Z_{\mathbb{C}}(s, \mathcal{F}(\Phi)) = c(s) Z_{\mathbb{C}}(\kappa - s, \Phi) = c(s) z_{\mathbb{C}}(-s).$$

すなわち次の結果を得る:

定理 6.2

$$\begin{aligned} c(s) &= \frac{z_{\mathbb{C}}(s-\kappa)}{z_{\mathbb{C}}(-s)} \\ &= \prod_{i=1}^{r} ((2\pi)^{-d_i} h(\chi_i))^{2s_i - \kappa_i} \frac{\gamma_{\mathbb{C}}(s-\kappa)}{\gamma_{\mathbb{C}}(-s)}. \end{aligned}$$

これが本論文における ($\mathbb{C}$ 上の) 主結果である.

6.2 実数体上の局所関数等式

次に, 実数体上の局所関数等式についてもいくつかの条件をつければ同様の議論が成り立つことをみていくことにする.

(G, V) を群が reductive な概均質ベクトル空間, Y を open orbit とし, G は $\mathbb{R}$ 上定義されているとする. また, $G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}}$ を G, V, Y の $\mathbb{R}$ 有理点全体, $P_1, \cdots, P_r$ を $\mathbb{R}$ 上の基本相対不変式, $P_i \leftrightarrow \chi_i$ $(i = 1, \cdots, r)$, $X_1 = \langle \chi_1, \cdots, \chi_r \rangle$ として, 次を仮定する:

(i) $\chi_0(g) = \det g$ とするとき, $\chi_0^2 \in X_1$.
(ii) $P_1, \cdots, P_r$ は multiplicity free, すなわち

$$P_i(x) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{d_i} \le n} a_{j_1 \cdots j_{d_i}} x_{j_1} \cdots x_{j_{d_i}} \quad (i = 1, \cdots, r)$$

のような形をしている.
(iii) $Y_{\mathbb{R}}$ はひとつの $G_{\mathbb{R}}$-軌道になっている.

そして, $d_i = \deg P_i$, $b_\chi(s)$ を $P(x)^{\delta(\chi)}$ の b-関数とし, $\chi_0^2 = \chi_1^{2\kappa_1} \cdots \chi_r^{2\kappa_r}$ なる半整数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_r$ をとり $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_r)$ とおく.

さて, $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の Schwartz 空間とし, $\Phi(x) \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して Fourier 変換 $\mathcal{F}(\Phi) \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ を

$$\mathcal{F}(\Phi)(y) = \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(x) e^{\pi\sqrt{-1}\,{}^t xy} dx$$

により定める.

そして, $\mathrm{Re}(s_1) > \kappa_1, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > \kappa_r$ となる範囲の $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して $V_{\mathbb{R}}$ 上の tempered distribution $Z_{\mathbb{R}}(s, \Phi)$ を

$$Z_{\mathbb{R}}(s,\Phi) := \int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{s-\kappa}\Phi(x)dx \quad (\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$$

と定める. 各 Φ について, この積分は上記の範囲で絶対収束し $Z_{\mathbb{R}}$ は正則となる.

そして次が成り立つ (例えば [Sf, Lemma 5.2, 5.5] 参照):

定理 6.3 (i) 各 $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し, $Z_{\mathbb{R}}(s,\Phi)$ は全 $\mathbb{C}^r$ の有理型関数として解析接続される.

(ii) ある有理型関数 $c(s)$ が存在して, 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し

$$Z_{\mathbb{R}}(s, \mathcal{F}(\Phi)) = c(s) Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s, \Phi)$$

が成立する.

[証明] (i) 部分積分により, 任意の $\chi \in X_1^+$ に対し

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{R}}(s+2\delta(\chi), (P(\partial_x)^{2\delta(\chi)}\Phi)) &= \int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{s+2\delta(\chi)-\kappa} P(\partial_x)^{2\delta(\chi)}\Phi(x)dx \\
&= \int_{Y_{\mathbb{R}}} P(\partial_x)^{2\delta(\chi)}[|P(x)|^{s+2\delta(\chi)-\kappa}]\Phi(x)dx \\
&= b_{\chi^2}(s-\kappa)\int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{s-\kappa}\Phi(x)dx \\
&= b_{\chi^2}(s-\kappa) Z_{\mathbb{R}}(s,\Phi).
\end{aligned}$$

これにより解析接続される.

(ii) 以下, $|\chi(g)|^s = |\chi_1(g)|^{s_1} \cdots |\chi_r(g)|^{s_r}$ などと略記することにする. すると, 例えば $|\chi(g)|^{\kappa} = |\chi_0(g)|$ である.

また, $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対する $g \in G_{\mathbb{R}}$ の作用を $\Phi_g(x) = \Phi(gx)$ として定める.

さて, $\mathrm{Re}(s_1) > \kappa, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) > \kappa$ なる $s = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Phi_g)(y) &= \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(gx) e^{\pi\sqrt{-1}\,{}^t xy} dx \\
&\quad (\text{ここで } x' = gx \text{ とおくと, } dx = |\chi_0(g)|^{-1}dx' \text{ で}) \\
&= |\chi_0(g)|^{-1} \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(x') e^{\pi\sqrt{-1}\,{}^t (g^{-1}x')y} dx' \\
&= |\chi_0(g)|^{-1} \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(x') e^{\pi\sqrt{-1}\,{}^t x'({}^t g^{-1}y)} dx' \\
&= |\chi_0(g)|^{-1} \mathcal{F}(\Phi)({}^t g^{-1} y)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi_g)) &= \int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(y)|^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi_g)(y)dy \\
&= |\chi_0(g)|^{-1}\int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(y)|^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi)({}^tg^{-1}y)dy \\
&\quad (\text{ここで } y' = {}^tg^{-1}y \text{ とおくと}, dy = |\chi_0(g)|dy' \text{ で}) \\
&= \int_{Y_{\mathbb{R}}} |P({}^tgy')|^{s-\kappa}\mathcal{F}(\Phi)(y')dy' \\
&= |\chi(g)|^s|\chi_0(g)|^{-1}Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)).
\end{aligned}$$

すなわち

$$Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi_g)) = |\chi(g)|^s|\chi_0(g)|^{-1}Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) \tag{9}$$

を得る. (i) の解析接続により, 上式は全 $\mathbb{C}^r$ で成立する.

次に, $\mathrm{Re}(s_1) < 0, \cdots, \mathrm{Re}(s_r) < 0$ なる s をとる. すると,

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi_g) &= \int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{-s}\Phi(gx)dx \\
&\quad (\text{ここで } x' = gx \text{ とおくと}, dx = |\chi_0(g)|^{-1}dx' \text{ で}) \\
&= |\chi_0(g)|^{-1}\int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(g^{-1}x')|^{-s}\Phi(x')dx' \\
&= |\chi_0(g)|^{-1}|\chi(g)|^s\int_{Y_{\mathbb{R}}} |P(x')|^{-s}\Phi(x')dx' \\
&= |\chi(g)|^s|\chi_0(g)|^{-1}Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi).
\end{aligned}$$

よって

$$Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi_g) = |\chi(g)|^s|\chi_0(g)|^{-1}Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi) \tag{10}$$

を得る. この式もやはり (i) の解析接続により全 $\mathbb{C}^r$ で成立する.

従って, Bruhat の定理により, 各 s について $Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi))$ と $Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi)$ は Φ によらない定数倍を除いて一致する. その定数を $c(s)$ と書けば,

$$Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) = c(s)Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi)$$

が成り立つ. $c(s)$ が有理型関数であることは (i) より明らか. □

さて, 複素数体上のときと同様, これまでに $c(s)$ の部分は符号を除き決定されており, 特に $r = 1$ のときには [I1, 3] において符号をこめた形で得られている. $r \geq 2$ の場合についてはまだ完全には決定されていなかったが, 今回の 5 節の結果を用いれば, 一般の $r \geq 1$ について $c(s)$ を具体的に求めることができる. 実際, $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ として standard function $\Phi(x) = e^{-\pi\, {}^txx}$ をとれば $\mathcal{F}(\Phi) = \Phi$ で,

$$z_{\mathbb{R}}(s-\kappa) = Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) = c(s)Z_{\mathbb{R}}(\kappa - s,\Phi) = c(s)z_{\mathbb{R}}(-s).$$

すなわち次の結果を得る:

定理 6.4

$$
\begin{aligned}
c(s) &= \frac{z_{\mathbb{R}}(s-\kappa)}{z_{\mathbb{R}}(-s)} \\
&= \prod_{i=1}^{r} (\pi^{-d_i} h(\chi_i))^{s_i - \frac{\kappa_i}{2}} \frac{\gamma_{\mathbb{R}}(s-\kappa)}{\gamma_{\mathbb{R}}(-s)}.
\end{aligned}
$$

これが本論文における ($\mathbb{R}$ 上の) 主結果である.

7 例

この節では, 例として下記の概均質ベクトル空間について, standard case や局所関数等式がどのように書かれるのかをみていくことにする ($m = 1, 2, 3, \cdots$):

(i) $(GL_1^{m+1} \times SL_m, \Lambda_1 \overbrace{\oplus \cdots \oplus}^{m+1} \Lambda_1)$
(ii) $(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$
(iii) $(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*)$

なお, これらが概均質ベクトル空間であることやその相対不変式については [Kt2] を, $Y_{\mathbb{R}}$ が一つの $G_{\mathbb{R}}$ 軌道になることについては [KKH] を, b-関数については [Ks] をそれぞれ参考にした.

7.1 $(GL_1^{m+1} \times SL_m, \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1)$

$V \simeq \mathbb{C}^m \overbrace{\oplus \cdots \oplus}^{m+1} \mathbb{C}^m$ とおく. そして, $GL_1^{m+1} \times SL_m \ni g = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}, A)$ に対し, $\rho : g \mapsto \rho(g) \in GL(V)$ を, $\rho(g)v = (\alpha_1 A v_1, \cdots, \alpha_{m+1} A v_{m+1})$ $(v = (v_1, \cdots, v_{m+1}) \in V)$ により定め, $G = \rho(GL_1^{m+1} \times SL_{2m})$ とする. このとき (G, V) は正則概均質ベクトル空間となる.

この (G, V) の基本相対不変式は

$$P_i(v) = \det(v_1, \cdots, \check{v}_i, \cdots, v_{m+1}) \quad (i = 1, \cdots, m+1)$$

であり, また, $\kappa_i = 1$ $(i = 1, \cdots, m+1)$ である.

そして b-関数は各 $E_i = (0, \cdots, \overset{i}{1}, \cdots, 0)$ に対し

$$b_{E_i}(s) = (s_i + 1) \prod_{k=2}^{m} (s_1 + \cdots + s_{m+1} + k) \quad (i = 1, \cdots, m+1)$$

と計算されている (ただし, $m=1$ のときは $\prod_{k=2}^{m}(s_1+\cdots+s_{m+1}+k)=1$ とする. 以下同様). 従ってこの場合は

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{C}}(s) &= \prod_{i=1}^{m+1}\Gamma(s_i+1)\prod_{k=2}^{m}\Gamma(s_1+\cdots+s_{m+1}+k),\\ \gamma_{\mathbb{R}}(s) &= \prod_{i=1}^{m+1}\Gamma\left(\frac{s_i+1}{2}\right)\prod_{k=2}^{m}\Gamma\left(\frac{s_1+\cdots+s_{m+1}+k}{2}\right)\end{aligned}$$

となる.

よって standard case は,

$$\begin{aligned}z_{\mathbb{C}}(s) &= (2\pi)^{-m(s_1+\cdots+s_{m+1})}\prod_{i=1}^{m+1}\Gamma(s_i+1)\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma(s_1+\cdots+s_{m+1}+k)}{(k-1)!},\\ z_{\mathbb{R}}(s) &= \pi^{-\frac{1}{2}(m(s_1+\cdots+s_{m+1})+1)}\prod_{i=1}^{m+1}\Gamma\left(\frac{s_i+1}{2}\right)\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\cdots+s_{m+1}+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},\end{aligned}$$

局所関数等式は,

$$\begin{aligned}Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) &= (2\pi)^{-m(2s_1+\cdots+2s_{m+1}-m-1)}\prod_{i=1}^{m+1}\frac{\Gamma(s_i)}{\Gamma(-s_i+1)}\\ &\quad\times\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma(s_1+\cdots+s_{m+1}-m-1+k)}{\Gamma(-s_1-\cdots-s_{m+1}+k)}Z_{\mathbb{C}}(1-s_1,\cdots,1-s_{m+1},\Phi),\\ Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) &= \pi^{-m(s_1+\cdots+s_{m+1}-\frac{m+1}{2})}\prod_{i=1}^{m+1}\frac{\Gamma\left(\frac{s_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_i+1}{2}\right)}\\ &\quad\times\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\cdots+s_{m+1}-m-1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_1-\cdots-s_{m+1}+k}{2}\right)}Z_{\mathbb{R}}(1-s_1,\cdots,1-s_{m+1},\Phi)\end{aligned}$$

である.

7.2 $(GL_1^3\times SL_{2m},\Lambda_2\oplus\Lambda_1\oplus\Lambda_1)$

$V\simeq \mathrm{Alt}(2m)\oplus\mathbb{C}^{2m}\oplus\mathbb{C}^{2m}$ とおく. そして, $GL_1^3\times SL_{2m}\ni g=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,A)$ に対し, $\rho: g\mapsto\rho(g)\in GL(V)$ を, $\rho(g)v=(\alpha_1 AX\,{}^tA,\alpha_2 Ay,\alpha_3 Az)$ $(v=(X,y,z)\in V)$ により定め, $G=\rho(GL_1^3\times SL_{2m})$ とする. このとき (G,V) は正則概均質ベクトル空間となる.

さて, 基本相対不変式は

$$\begin{aligned} P_1(X,y,z) &= \mathrm{Pf}(X), \\ P_2(X,y,z) &= \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} X & y & z \\ -{}^t y & & \\ -{}^t z & \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2m$ となる.

そして b-関数は

$$\begin{aligned} b_{(1,0)}(s) &= (s_1+1)\prod_{k=2}^{m}(s_1+s_2+2k-1), \\ b_{(0,1)}(s) &= (s_2+1)(s_2+2m)\prod_{k=2}^{m}(s_1+s_2+2k-1) \end{aligned}$$

と計算されている (ただし, $m=1$ のとき $\prod_{k=2}^{m}(s_1+s_2+2k-1)=1$ とおく. 以下同様). 従ってこの場合は

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{C}}(s) &= \Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+2m)\prod_{k=2}^{m}\Gamma(s_1+s_2+2k-1), \\ \gamma_{\mathbb{R}}(s) &= \Gamma\left(\frac{s_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+2m}{2}\right)\prod_{k=2}^{m}\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2k-1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる.

よって standard case は,

$$\begin{aligned} z_{\mathbb{C}}(s) &= (2\pi)^{-ms_1-(m+1)s_2}\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)\frac{\Gamma(s_2+2m)}{(2m-1)!}\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma(s_1+s_2+2k-1)}{(2k-2)!}, \\ z_{\mathbb{R}}(s) &= \pi^{-\frac{1}{2}(ms_1+(m+1)s_2)-1}\Gamma\left(\frac{s_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+m\right)}{(m-1)!}\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

局所関数等式は,

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{C}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) &= (2\pi)^{-m(2s_1-1)-(m+1)(2s_2-2m)}\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2-2m+1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(-s_1+1)\Gamma(-s_2+1)\Gamma(-s_2+2m)} \\ &\quad \times\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma(s_1+s_2-2m+2k-2)}{\Gamma(-s_1-s_2+2k-1)}Z_{\mathbb{C}}(1-s_1,2m-s_2,\Phi), \\ Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) &= \pi^{-m(s_1-\frac{1}{2})-(m+1)(s_2-m)}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2-2m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s_2+2m}{2}\right)} \\ &\quad \times\prod_{k=2}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+s_2}{2}-m+k-1\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_1-s_2+2k-1}{2}\right)}Z_{\mathbb{R}}(1-s_1,2m-s_2,\Phi) \end{aligned}$$

である.

7.3 $(GL_1^3 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus \Lambda_1^*)$

$V \simeq \mathrm{Alt}(2m) \oplus \mathbb{C}^{2m} \oplus \mathbb{C}^{2m}$ とおく. そして, $GL_1^3 \times SL_{2m} \ni g = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A)$ に対し, $\rho : g \mapsto \rho(g) \in GL(V)$ を, $\rho(g)v = (\alpha_1 AX\, {}^tA, \alpha_2\, {}^tA^{-1}y, \alpha_3\, {}^tA^{-1}z)$ $(v = (X, y, z) \in V)$ により定め, $G = \rho(GL_1^3 \times SL_{2m})$ とする. このとき (G, V) は正則概均質ベクトル空間となる.

さて, 基本相対不変式は

$$\begin{aligned} P_1(X,y,z) &= \mathrm{Pf}(X), \\ P_2(X,y,z) &= {}^tyXz \end{aligned}$$

であり, $\kappa_1 = 2m-3$, $\kappa_2 = 2m$ となる.

そして b-関数は

$$\begin{aligned} b_{(1,0)}(s) &= \prod_{k=1}^{m-1}(s_1+2k-1)(s_1+s_2+2m-1), \\ b_{(0,1)}(s) &= (s_2+1)(s_2+2m)(s_1+s_2+2m-1) \end{aligned}$$

と計算されている (ただし, $m=1$ のときは $\prod_{k=1}^{m-1}(s_1+2k-1) = 1$ とおく. 以下同様). 従ってこの場合は

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{C}}(s) &= \prod_{k=1}^{m-1}\Gamma(s_1+2k-1)\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+2m)\Gamma(s_1+s_2+2m-1), \\ \gamma_{\mathbb{R}}(s) &= \prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{s_1+2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2+2m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2m-1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる.

よって standard case は,

$$\begin{aligned} z_{\mathbb{C}}(s) &= (2\pi)^{-ms_1-3s_2}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\Gamma(s_1+2k-1)}{(2k-2)!}\frac{\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+2m)}{(2m-1)!}\frac{\Gamma(s_1+s_2+2m-1)}{(2m-2)!}, \\ z_{\mathbb{R}}(s) &= \pi^{-\frac{1}{2}(ms_1+3s_2+1)}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+2k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{s_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+m\right)}{(m-1)!}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

局所関数等式は,

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{C}}(s, \mathcal{F}(\Phi)) &= (2\pi)^{-m(2s_1-2m-3)-3(2s_2-2m)}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\Gamma(s_1-2m+2k-4)}{\Gamma(-s_1+2k-1)}\frac{\Gamma(s_2-2m+1)}{\Gamma(-s_2+1)} \\ &\quad \times\frac{\Gamma(s_2)}{\Gamma(-s_2+2m)}\frac{\Gamma(s_1+s_2-2m-4)}{\Gamma(-s_1-s_2+2m-1)}Z_{\mathbb{C}}(2m-3-s_1, 2m-s_2, \Phi), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathbb{R}}(s,\mathcal{F}(\Phi)) &= \pi^{-m(s_1-\frac{2m-3}{2})-3(s_2-m)}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1}{2}-m+k-2\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_1+2k-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{s_2-2m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_2+1}{2}\right)} \\
&\quad\times\frac{\Gamma\left(\frac{s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_2}{2}+m\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+s_2}{2}-m-2\right)}{\Gamma\left(\frac{-s_1-s_2+2m-1}{2}\right)}Z_{\mathbb{R}}(2m-3-s_1,2m-s_2,\Phi)
\end{aligned}
$$

である.

8 Appendix

8.1 $Y_{\mathbb{R}}$ に群が推移的に作用しない場合について

6.2 節で, $Y_{\mathbb{R}}$ に $G_{\mathbb{R}}$ が推移的に作用しない場合には, $Y_{\mathbb{R}}=Y_1\cup\cdots Y_l$ といくつか有限個の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道に分解されるので, そのそれぞれの Y_i $(i=1,\cdots,l)$ に対して局所ゼータ関数を

$$Z_i(s,\Phi)=\int_{Y_i}|P(x)|^{s-\kappa}\Phi(x)dx$$

と定める. すると局所関数等式は

$$Z_i(s,\mathcal{F}(\Phi))=\sum_{j=1}^{l}c_{ij}(s)Z_j(\kappa-s,\Phi)$$

と, $Z_1,\cdots,Z_l$ の間の線形関係として書かれる. このとき, $c_{ij}(s)$ の計算の一助として 5 節の方法が使えるかもしれない.

実際, 各 Y_i に対する standard case として,

$$z_i(s)=\int_{Y_i}|P(x)|^{s}e^{-\pi\,{}^t xx}dx$$

を考えると, (部分積分のところができれば良いので)

$$z_i(s+2\delta(\chi_m))=(2\pi)^{-d_m}b_{\chi_m}(s)z_i(s)\quad(m=1,\cdots,r)$$

が成り立つ. すると, これにより

$$z_i(s)=\left(\int_{Y_i}e^{-\pi\,{}^t xx}dx\right)z_{\mathbb{R}}(s)$$

を得る. だから, $\int_{Y_i}e^{-\pi\,{}^t xx}dx$ の部分が簡単に計算できるようならば, $c_{ij}(s)$ たちについての少なくとも一つの関係式が得られることになる.

8.2 局所ゼータ関数の b-関数への応用

「局所関数等式の b-関数による具体的表示」とは, 見方を変えていうと,

(i) 局所ゼータ関数の standard case や関数等式の計算.

(ii) b-関数の計算.

の両者の同値性である. だから, 逆に, 局所ゼータ関数の性質から b-関数についての何らかの主張が導かれることもある. 例えば本論文では言及しなかったが, b-関数の関数等式:

$$b_\chi(s) = b_\chi(-s-\kappa-\delta(\chi))$$

が, 局所関数等式から直ちに証明できる.

他にも, [I2, Theorem 6.3.2] では, $r=1$ の時に, $z_{\mathbb{C}}(s)$ の解析的性質を用いて, (佐藤の)b-関数が Bernstein の意味での b-関数でもある, ということが証明されている.

Bernstein の b-関数は多変数の場合に拡張されているので ([G] 参照), 今回の結果を使えば多変数の場合にも Bernstein の b-関数と佐藤の b-関数との関係について何らかの定理が証明できるかもしれない, と筆者は期待している. それは今後の研究課題としたい.

参考文献

[G] A. Gyoja, *"Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions"*, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 33-2, 399–411, 1993.

[H] H. Hosokawa, *"Some results on Igusa local zeta functions associated with simple prehomogeneous vector spaces"*, J. Math. Soc. Japan Vol. 49, No. 3, 565–587, 1997.

[I1] J. Igusa, *"On functional equations of complex powers"*, Invent. math. 85, 1–29, 1986.

[I2] J. Igusa, *"An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions"*, Studies in Advanced Mathematics 14, AMS/IP 2000.

[KKH] T. Kimura, S. Kasai, H. Hosokawa, *"Universal Transitivity of Simple and 2-simple Prehomogeneous Vector Spaces"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 38, 2, 11–41, 1988.

[Km] M. Kashiwara, *"B-Functions and Holonomic Systems"*, Invent. math. 38, 33–53, 1976.

[Ks] 笠井伸一, “単純代数群の正則概均質ベクトル空間の b-関数について”, 京都大学数理解析研究所講究録 629, 31–81, 1987.

[Kt1] 木村達雄, “概均質ベクトル空間”, 岩波書店, 1998.

[Kt2] T. Kimura, *“A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiplications”*, Journ. of Alg. Vol. 83, No. 1, 72–100, 1983.

[Sf] F. Sato, *“Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations”*, Tôhoku Math. Journ. 34, 437–483, 1982.

[Sm1] 佐藤幹夫述, 新谷卓郎記, “概均質ベクトル空間の理論”, 数学の歩み 15-1, 85–157, 1970.

[Sm2] M. Sato, note by T. Shintani, translated by M. Muro, *“Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note”*, Nagoya Math. J. Vol. 120, 1–34, 1990.

[W] G. Warner, *“Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I”*, Springer-Verlag, 1972.